

О ЧЕРНИКОВСКИХ p -ГРУППАХ

Extensions of divisible Abelian p -groups with minimality condition by means of a finite p -group H are investigated. The conditions are established under which the problem of describing all nonisomorphic extensions of this sort is wild. All the nonisomorphic Chernikov p -groups are described whose factor-group is a cyclic group of order p^s , $s \leq 2$, with respect to the maximal divisible Abelian subgroup.

Досліджуються розширення повних абелевих p -груп з умовою мінімальності за допомогою скінченної p -групи H . Встановлено, коли задача опису всіх таких неізоморфних розширень є дикою. Описані всі неізоморфні черніковські p -групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p^s , $s \leq 2$.

Пусть G — черниковская группа, т. е. группа, являющаяся расширением прямой суммы конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы. Исследованиям свойств черниковских групп посвящено много работ [1–7].

Пусть M — полная абелева p -группа с условием минимальности. В [7] на основании целочисленных p -адических представлений конечных групп изучаются расширения $G(M, H)$ группы M с помощью циклической p -группы H . В частности, с точностью до изоморфизма классифицированы все такие расширения, если H — группа порядка p .

Настоящая статья является продолжением работы [7]. В ней показано, что описание всех неізоморфных расширений произвольной группы M с помощью конечной p -группы H , $p \neq 2$, является дикой задачей, если H не является циклической группой порядка p^r , $r \leq 2$. Дается также классификация всех неізоморфных p -групп Черникова, являющихся расширениями группы M с помощью циклической группы порядка p^2 , $p \geq 2$. При доказательстве этих результатов существенно используются работы [8–12]. Отметим, что основные теоремы этой работы без доказательства приведены в [13].

1. О расширениях полных абелевых p -групп с условием минимальности. Пусть M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p -группы T , т. е.

$$M = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_n, \quad M_i = T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Известно [2], что группа $\text{Aut } M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbf{Z}_p)$, где \mathbf{Z}_p — кольцо целых p -адических чисел. Отсюда и из теории расширений групп [2, 14] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью конечной группы H определяется некоторым матричным представлением Γ степени n группы H над кольцом \mathbf{Z}_p и некоторой системой факторов $\{\mu_{u,v}\}$, $u, v \in H$; $\mu_{u,v} \in M$. Обозначим такое расширение через $G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$.

Пусть $\{a_r \mid r = 0, 1, 2, \dots\}$ — образующие элементы группы T , причем $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$, $r \in \mathbf{N}$. Если $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{Z}_p$, и $m = (m_1, \dots$

$\dots, m_n)$, $m_i \in M_i = T$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)}p + x_{ij}^{(2)}p^2 + \dots$, $m_j = y_0^{(j)}a_0 + y_1^{(j)}a_1 + \dots + y_{k_j}^{(j)}a_{k_j}$, $0 \leq x_{ij}^{(r)}$, $y_i^{(s)} < p$, то $A(m) = (m'_1, \dots, m'_n)$. где

$$m'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 1. Матричные \mathbf{Z}_p -представления $\Gamma: h \rightarrow \Gamma_h$ и $\Delta: h \rightarrow \Delta_h$ степени n конечной группы H называются обобщенно эквивалентными, если существуют такие матрица $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и автоморфизм ψ группы H , что

$$C\Gamma_h = \Delta_{\psi(h)}C, \quad h \in H. \quad (2)$$

Пусть далее M — p -группа вида (1), H — произвольная конечная группа. Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Из изоморфизма групп $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ и $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu'_{u,v}\})$ вытекает обобщенная эквивалентность представлений Γ и Δ .

Доказательство. Пусть ρ — изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2 , $\bar{h} (\overline{\bar{h}})$ — представитель смежного класса группы G_1 (G_2) по подгруппе M , соответствующий элементу h группы H . Очевидно, $\rho(M) = M$ и $\rho(\bar{h}) = \overline{\psi(h) + m_h}$, где $m_h \in M$ и $\psi: h \rightarrow \psi(h)$ — некоторый автоморфизм группы H . Обозначим через C ограничение ρ на M . Можно считать, что $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$. Теперь для произвольного $m \in M$ имеем

$$\begin{aligned} (C\Gamma_h)(m) &= C(-\bar{h} + m + \bar{h}) = \rho(-\bar{h} + m + \bar{h}) = -m_h - \overline{\psi(h)} + \\ &+ \rho(m) + \overline{\psi(h) + m_h} = -\overline{\psi(h)} + C(m) + \overline{\psi(h)} = (\Delta_{\psi(h)}C)(m). \end{aligned}$$

Следовательно, для \mathbf{Z}_p -представлений Γ и Δ имеет место равенство (2), что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть \mathbf{Z}_p -представления Γ и Δ степени n группы H обобщенно эквивалентны, т. е. существуют такие $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и $\psi \in \text{Aut } H$, что имеет место (2). Тогда группа $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ изоморфна группе $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu'_{u,v}\})$, где $\mu'_{u,v} = C(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)})$, $u, v \in H$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\{\mu'_{u,v}\}$ является системой факторов, которой соответствует некоторое расширение группы M с помощью группы H , определяющееся \mathbf{Z}_p -представлением Δ . Для этого необходимо доказать [2, 14] справедливость равенства

$$\mu'_{u+v,w} + \Delta_w(\mu'_{u,v}) = \mu'_{u,v+w} + \mu'_{v,w}, \quad u, v, w \in H. \quad (3)$$

Из условий леммы получаем

$$\begin{aligned} \mu'_{u+v,w} + \Delta_w(\mu'_{u,v}) &= C(\mu_{\psi^{-1}(u)+\psi^{-1}(v), \psi^{-1}(w)} + \Gamma_{\psi^{-1}(w)}(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)})), \\ \mu'_{u+v,w} + \mu'_{v,w} &= C(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)+\psi^{-1}(w)} + \mu_{\psi^{-1}(v), \psi^{-1}(w)}). \end{aligned}$$

Поскольку для произвольных элементов u, v, w группы H $\mu_{u+v,w} + \Gamma_w(\mu_{u,v}) = \mu_{u,v+w} + \mu_{v,w}$, то отсюда вытекает (3).

Искомый изоморфизм $\rho : G_1 \rightarrow G_2$ строим следующим образом: $\rho(\bar{h} + m) = \overline{\psi(h)} + C(m)$, $h \in H$, $m \in M$, $\bar{h} (\overline{h})$ — представитель смежного класса группы $G_1 (G_2)$ по подгруппе M , соответствующий элементу $h \in H$. Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 сразу вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть M — p -группа вида (1), H — произвольная конечная группа, G_1, G_2 — расщепляемые расширения группы M с помощью группы H , определяющиеся соответственно \mathbf{Z}_p -представлениями Γ и Δ группы H . Группы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда представления Γ и Δ обобщенно эквивалентны.

Пусть далее M — p -группа вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s , $s \geq 1$, $\Gamma : a \rightarrow \Gamma_a$ — матричное \mathbf{Z}_p -представление степени n группы H . Рассмотрим подгруппы $A(\Gamma), B(\Gamma)$ группы M вида $A(\Gamma) = \{m \in M \mid \Gamma_a(m) = m\}$, $B(\Gamma) = \{(E + \Gamma_a + \dots + \Gamma_a^{p^s-1})(m) \mid m \in M\}$, где E — единичная матрица порядка n . Известно [14, 15], что тогда произвольное расширение вида $G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ эквивалентно расширению $G(M, H, \Gamma, \{\mu'_{u,v}\})$, где

$$\mu'_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < p^s, \\ m_0, & \text{если } i+j \geq p^s, \end{cases} \quad 0 \leq i, j < p^s, \quad (4)$$

для некоторого $m_0 \in A(\Gamma)$. Поэтому циклические расширения группы M с помощью группы H , определяющиеся \mathbf{Z}_p -представлением Γ группы H и системой факторов вида (4), будем обозначать через $G(M, H, \Gamma, m_0)$ либо кратко $G(\Gamma, m_0)$. Расширения $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Gamma, m_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $m_0 - m_1 \in B(\Gamma)$.

Лемма 4 [7]. Группы $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Gamma, m_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся такие матрица $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и натуральное число r , не делящееся на p , что $C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r$ и $m_0 - C^{-1}(rm_1) \in B(\Gamma)$.

2. Описание некоторых классов неизоморфных черниковских p -групп. Приведем необходимые для дальнейшего результаты из теории целочисленных p -адических представлений конечных p -групп.

Пусть \mathbf{Q}_p — поле p -адических чисел. Будем говорить, что матричное \mathbf{Z}_p -представление Γ циклической p -группы H содержит d различных неприводимых компонент, если $\Gamma \mathbf{Q}_p$ -эквивалентно представлению $\Gamma' = n_1 \Delta_1 + \dots + n_d \Delta_d$, $n_i \geq 1$, $i = 1, \dots, d$, где $\Delta_1, \dots, \Delta_d$ — попарно неэквивалентные неприводимые \mathbf{Q}_p -представления группы H .

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p -группа порядка p^s , $s \geq 1$, и ε — первообразный корень степени p^{s_1} из 1, $0 \leq s_1 \leq s$. Для произвольного элемента θ кольца $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$ через $\tilde{\theta}$ обозначим матрицу, соответствующую оператору умножения на θ в \mathbf{Z}_p -базисе $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{k-1}$ кольца $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$, $k = \varphi(p^{s_1})$, φ — функция Эйлера. Тогда произвольное неприводимое \mathbf{Z}_p -представление группы $H = \langle a \rangle$ \mathbf{Z}_p -эквивалентно представлению вида $a \rightarrow \tilde{\varepsilon}$, $0 \leq s_1 \leq s$. В

силу [10] неразложимое \mathbb{Z}_p -представление группы H с двумя неприводимыми компонентами $a \rightarrow \bar{\epsilon}$ и $a \rightarrow \bar{\xi}$ (ξ — первообразный корень степени p^{s_2} из 1, $0 \leq s_1 < s_2 \leq s$) \mathbb{Z}_p -эквивалентно представлению вида

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle \delta \rangle \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix},$$

где $\langle \delta \rangle$ — \mathbb{Z}_p -матрица, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta \in \mathbb{Z}_p[\xi]$ в \mathbb{Z}_p -базисе $1, \xi, \dots, \xi^{d-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\xi]$ ($d = \varphi(p^{s_2})$).

Теорема 1 [10]. Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p -группа порядка p^s , $s \geq 2$, и Δ_i , $i = 1, 2, 3$, — неприводимые \mathbb{Z}_p -представления вида $\Delta_1: a \rightarrow 1$, $\Delta_2: a \rightarrow \bar{\epsilon}$, $\Delta_3: a \rightarrow \bar{\xi}$, $\xi^{p^{s_2}} = \xi^{p^{s_1}} = 1$, $0 < s_1 < s_2 \leq s$. Тогда неразложимые матричные \mathbb{Z}_p -представления группы H с неприводимыми компонентами из множества $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ с точностью до эквивалентности исчерпываются следующими представлениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: a \rightarrow 1, \quad \Gamma_2: a \rightarrow \bar{\epsilon}, \quad \Gamma_3: a \rightarrow \bar{\xi}, \\ \Gamma_4: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6^{(j)}: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle t^j \rangle \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix}, \\ \Gamma_7^{(j)}: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle t^j \rangle & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_8^{(j)}: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle t^j \rangle & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_9: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & \bar{\epsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{10}^{(i)}: a \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \langle t^i \rangle & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & \bar{\epsilon} & \langle 1 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $t = \xi - 1$; $j = 0, 1, \dots, \varphi(p^{s_1}) - 1$; $i = 1, 2, \dots, \varphi(p^{s_1}) - 1$, причем $\Gamma_{10}^{(j)}$ отсутствует, если $p^{s_1} = 2$.

До конца пункта, если не оговорено противное, M — p -группа вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая p -группа порядка p^s , $s \geq 2$, и Δ_i , $i = 1, 2, 3$, — неприводимые \mathbb{Z}_p -представления вида $\Delta_1: a \rightarrow 1$, $\Delta_2: a \rightarrow \bar{\epsilon}$, $\Delta_3: a \rightarrow \bar{\xi}$, $\xi^{p^{s_2}} = \xi^{p^{s_1}} = 1$, $0 < s_1 < s_2 \leq s$. Обозначим через \mathcal{W} множество всех неизоморфных нерасщепляемых расширений вида $G(M, H, \Gamma, m_0)$, где Γ пробегает множество всех неэквивалентных неразложимых матричных \mathbb{Z}_p -представлений группы H с неприводимыми компонентами из множества $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. Если $\Phi_{p^{s_1}}(x) = -\alpha_1 - \alpha_2 x - \dots - \alpha_k x^{k-1} + x^k$, $k = \varphi(p^{s_1})$, $\Phi_{p^{s_2}}(x) = -\beta_1 - \beta_2 x - \dots - \beta_d x^{d-1} + x^d$, $d = \varphi(p^{s_2})$ — полиномы деления круга соответственно по-

рядков p^{β_1}, p^{β_2} , и $(\xi - 1)^i = \gamma_0^{(i)} + \gamma_1^{(i)}\xi + \dots + \gamma_{d-1}^{(i)}\xi^{d-1}$, $\gamma_j^{(i)} \in \mathbb{Z}_p$, $j = 0, \dots, d-1$.
то из [7] вытекает, что множество \mathcal{W} исчерпывается такими группами:

$$G(\Gamma_2, m_2), \quad m_2 = (\alpha_1 a_0, (\alpha_1 + \alpha_2) a_0, \dots, (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}) a_0, a_0);$$

$$G(\Gamma_3, m_3), \quad m_3 = (\beta_1 a_0, (\beta_1 + \beta_2) a_0, \dots, (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{d-1}) a_0, a_0);$$

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4), \quad m_4 = (a_0 + \beta_1 a_1, a_0 + (\beta_1 + \beta_2) a_1, \dots, \\ \dots, a_0 + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{d-1}) a_1, a_1, m_2);$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_5), \quad m_5 = (m_3, 0, \dots, 0), \quad j = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}), \quad m_6^{(j)} = (\gamma_0^{(j)} a_0, (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)}) a_0, \dots, \\ \dots, (\gamma_0^{(j)} + \gamma_1^{(j)} + \dots + \gamma_{d-2}^{(j)}) a_0, 0, m_2), \quad j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_7^{(j)}, m_7), \quad m_7 = (m_3, 0, \dots, 0), \quad j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(0)}, m_8), \quad m_8 = (0, \dots, 0, m_2, -a_0);$$

$$G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)}), \quad m_8^{(j)} = (m_6^{(j)}, 0, \dots, 0), \quad j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_9, m_9), \quad m_9 = (m_3, 0, \dots, 0),$$

где $\{a_r\}$ — образующие элементы квазициклической p -группы T ($pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$, $r \in \mathbb{N}$).

Введем отношение порядка \prec на множестве \mathcal{W} :

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4) \prec G(\Gamma_8^{(0)}, m_8) \prec G(\Gamma_6^{(1)}, m_6^{(1)});$$

$$G(\Gamma_6^{(i)}, m_6^{(i)}) \prec G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)}), \quad \text{если } i \leq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(i)}, m_8^{(i)}) \prec G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}), \quad \text{если } i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(k-1)}, m_8^{(k-1)}) \prec G(\Gamma_2, m_2); \quad G(\Gamma_8^{(k-1)}, m_8^{(k-1)}) \prec G(\Gamma_3, m_3);$$

$$G(\Gamma_2, m_2) \prec G(\Gamma_9, m_9); \quad G(\Gamma_3, m_3) \prec G(\Gamma_9, m_9);$$

$$G(\Gamma_9, m_9) \prec G(\Gamma_6^{(k-1)}, m_5); \quad G(\Gamma_6^{(i)}, m_5) \prec G(\Gamma_7^{(j)}, m_7), \quad \text{если } i \geq j,$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1, \quad j = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$G(\Gamma_7^{(i)}, m_7) \prec G(\Gamma_6^{(j)}, m_5), \quad \text{если } i > j, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Пусть Γ — произвольное матричное \mathbb{Z}_p -представление группы $H = \langle a \rangle$ и $\Gamma = \Gamma'_1 + \Gamma'_2$, где Γ'_i — некоторое \mathbb{Z}_p -представление группы H , $i = 1, 2$. Тогда в расширении $G(M, H, \Gamma, m)$ H -модуль M имеет вид $M = T_1 \dot{+} T_2$, где T_i — H -модуль, соответствующий представлению Γ'_i , $ax_i = \Gamma'_i(x_i)$, $x_i \in T_i$; $i = 1, 2$. Поэтому расширение $G(\Gamma, m) = G(M, H, \Gamma, m)$ можно записывать также в виде $G(\Gamma'_1 + \Gamma'_2, (v_1, v_2))$, где $v_i \in A(\Gamma'_i) \subset T_i$, $i = 1, 2$.

Лемма 5. Пусть $G(\Gamma', m')$, $G(\Gamma'', m'') \in \mathcal{W}$. Если $G(\Gamma', m') \prec G(\Gamma'', m'')$, то $G(\Gamma' + \Gamma'', (m', m'')) \cong G(\Gamma' + \Gamma'', (m', 0))$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что для доказательства данной леммы достаточно показать, что для произвольных расширений $G(\Gamma', m')$, $G(\Gamma'', m'')$ из \mathcal{W} таких, что $G(\Gamma', m') \prec G(\Gamma'', m'')$, существует обратимая \mathbb{Z}_p -матрица C такая, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C((m', m'')) - (m', 0) \in B(\Gamma)$, где $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. Рассмотрим ряд наиболее типичных случаев.

Покажем, что для произвольного $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2, (m_5, m_2)) \cong G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2, (0, m_2)). \quad (5)$$

Введем следующие обозначения: $\omega_2 = \zeta \varepsilon^{k-1} u^{k-1}$, $\omega'_2 = \eta t^{k-1} - \tau \zeta^{k-1} t^{d-1}$, $\omega_3 = \tau \zeta^{d-1} t^{d-1}$, где $u = \varepsilon - 1$, $t = \xi - 1$, $p = \zeta u^k = \tau t^d$, $\Phi_{p, \zeta}(\xi) = \eta t^k$ для некоторых $\zeta \in \mathbb{Z}_p[\varepsilon]^*$, $\eta, \tau \in \mathbb{Z}_p[\xi]^*$ (K^* — мультипликативная группа кольца K с единицей). Тогда из [7] следует, что $m_2 = \tilde{\omega}_2(e_k)$, $m_5 = (\tilde{\omega}_3(e_d), 0)$, где e_r — элемент p -группы $M_1 + \dots + M_r$, $M_i = T$, вида $e_r = (a_0, 0, \dots, 0)$. Для произвольного элемента $\lambda = x_0 + x_1 \varepsilon + \dots + x_{k-1} \varepsilon^{k-1}$, $x_i \in \mathbb{Z}_p$, кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon]$ через $\tilde{\lambda}$ будем обозначать элемент кольца $\mathbb{Z}_p[\xi]$, который получается из λ путем замены ε на ξ . Пусть θ — такой элемент из $\mathbb{Z}_p[\varepsilon]$, что $\hat{\theta} = \xi^{d-k} \eta t^{k-1}$. Используя [10], нетрудно показать, что существует \mathbb{Z}_p -матрица S_1 , удовлетворяющая равенству $\tilde{\xi} S_1 + \langle t^j \hat{\theta} \rangle = \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_1 \tilde{\varepsilon}$. Положим

$$C = \begin{pmatrix} E_d & 0 & S \\ 0 & E_k & \overline{\theta u} \\ 0 & 0 & E_k \end{pmatrix},$$

где $S = S_1 \tilde{u} + \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_2$, S_2 — \mathbb{Z}_p -матрица, у которой все столбцы состоят из координат соответственно элементов $-\xi^{d-k}$, $-\xi^{d-k+1}$, ..., $-\xi^{d-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\xi]$ в \mathbb{Z}_p -базисе $1, \xi, \dots, \xi^{d-1}$. В силу [10] получаем $\tilde{\xi} S_1 \tilde{u} + \langle t^j \hat{\theta} \rangle \overline{\theta u} = \langle t^j \hat{\theta} \rangle \tilde{u} + S_1 \tilde{u} \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\xi} S_2 + \tilde{\xi} \langle t^j \hat{\theta} \rangle - \langle t^j \hat{\theta} \rangle = S_2 \tilde{\varepsilon}$. Отсюда $C\Gamma_a = \Gamma_a C$, где $\Gamma = \Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2$, $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Далее имеем $C((m_5, m_2)) = (m'_5, m_2)$, где $m'_5 = (m_3 + S(m_2), \overline{\theta u}(m_2))$. Очевидно, $\tilde{u}(m_2) = \tilde{u} \tilde{\omega}_2(e_k) = \tilde{\varepsilon}^{k-1} p(e_k) = 0$, $m_3 + S(m_2) = (\tilde{\omega}_3 + \langle t^j \hat{\theta} \rangle - \tilde{\xi}^{d-k} \tilde{\omega}'_2)(e_d) = 0$. Следовательно, $C((m_5, m_2)) = (0, m_2)$, т. е. справедливо (5).

Установим теперь, что для произвольных $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $i \leq j$, имеет место изоморфизм

$$G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}, (m_6^{(i)}, m_8^{(j)})) \cong G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}, (m_6^{(i)}, 0)).$$

Положим $\Gamma = \Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}$,

$$S = \begin{pmatrix} -\tilde{t}^{j-i} & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E_{d+k} & 0 & 0 \\ S & E_{d+k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно видеть, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C(m_6^{(i)}, m_8^{(j)}) = (m_6^{(i)}, 0)$.

Докажем, что

$$G(\Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}, (m_7, m_7)) \cong G(\Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}, (m_7, 0))$$

для произвольных $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $i > j$. Пусть $\Gamma = \Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}$, $\theta = -t^{i-j}$. Тогда $\hat{\theta} = -t^{i-j}$ и существует \mathbb{Z}_p -матрица S_1 , удовлетворяющая равенству $\tilde{\xi} S_1 + \langle t^j \hat{\theta} \rangle = \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_1 \tilde{\xi}$. Положим

$$S = \begin{pmatrix} -E_d & S_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E_{d+k+1} & 0 \\ S & E_{d+k+1} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C((m_7, m_7)) = (m_7, 0)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично предыдущим. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s , $s \geq 2$; ξ — первообразные корни соответственно степеней p^{s_1} , p^{s_2} , $0 < s_1 < s_2 \leq s$; \mathcal{V} — множество всех неэквивалентных матричных \mathbb{Z}_p -представлений группы H , содержащих неприводимые компоненты $\Delta_1: a \rightarrow 1$, $\Delta_2: a \rightarrow \tilde{\xi}$, $\Delta_3: a \rightarrow \xi$; $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \emptyset$. Тогда все неизоморфные расширения произвольной полной абелевой p -группы с условием минимальности с помощью группы H , определяющиеся \mathbb{Z}_p -представлениями из множества \mathcal{V} , исчерпываются следующими группами:

- 1) $G(\Gamma, 0)$; 2) $G(\Gamma_2 + \Gamma', (m_2, 0))$; 3) $G(\Gamma_3 + \Gamma', (m_3, 0))$;
- 4) $G(\Gamma_6^{(0)} + \Gamma', (m_4, 0))$; 5) $G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma', (m_5, 0))$;
- 6) $G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma', (m_6^{(j)}, 0))$; 7) $G(\Gamma_7^{(j)} + \Gamma', (m_7, 0))$;
- 8) $G(\Gamma_8^{(0)} + \Gamma', (m_8, 0))$; 9) $G(\Gamma_8^{(j)} + \Gamma', (m_8^{(j)}, 0))$;
- 10) $G(\Gamma_9 + \Gamma', (m_9, 0))$; 11) $G(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma', (m_2, m_3, 0))$, где $\Gamma \in \mathcal{V}$; $\Gamma' \in \mathcal{V}'$; $i = 0, 1, \dots, k-1$; $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Доказательство. Из лемм 4–5, теоремы 1 и из [7] (теорема 2, предложение 1) вытекает, что для доказательства данной теоремы достаточно показать, что расширение $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (m_2, m_3))$ не изоморфно ни одному из расширений $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (0, m_3))$, $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (m_2, 0))$. Последнее же утверждение следует из того факта, что произвольная матрица $C \in GL(k+d, \mathbb{Z}_p)$, удовлетворяющая равенству $C\Gamma_a = \Gamma_a^r C$ ($\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3$, $r \in \mathbb{N}$, $(r, p) = 1$), имеет вид $C = \text{diag}(C_1, C_2)$, где $C_1 \in GL(k, \mathbb{Z}_p)$, $C_2 \in GL(d, \mathbb{Z}_p)$. Поскольку $B(\Gamma) = 0$, то

$$(m_2, m_3) - C^{-1}(r(0, m_3)) \notin B(\Gamma), \quad (m_2, m_3) - C^{-1}(r(m_2, 0)) \notin B(\Gamma),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если в условиях теоремы 2 H — циклическая группа порядка p^2 , то представлениями из множества \mathcal{V} исчерпываются все неэквивалентные \mathbb{Z}_p -представления группы H . Поэтому теорема 2 дает описание всех неизоморфных черниковских p -групп, фактор-группа которых по максимальной полной абелевой подгруппе является циклической группой порядка p^2 .

3. О дикости задачи классификации расширений произвольной пол-ной абелевой p -группы с условием минимальности с помощью конечной p -группы.

Лемма 6. Пусть H — циклическая p -группа порядка p^s , $s > 2$. \mathcal{W}_k — множество всех расширений вида $G(M, H, \Gamma, m)$, где M — произвольная пол-ная абелева p -группа с условием минимальности, а Γ пробегает все неэквивалентные матричные \mathbb{Z}_p -представления группы H , содержащих k неэквивалентных неприводимых компонент $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Тогда задача классификации всех неизоморфных групп из множества \mathcal{W}_k является дикой, т. е. включает задачу описания с точностью до подобия пар $n \times n$ -матриц над некоторым полем для произвольного натурального n , если выполняется одно из следующих условий: 1) $s > 3$, $k > 4$; 2) $s > 2$, $k = 3$, $p > 3$ и степень представления Δ_i больше 1, $i = 1, 2, 3$; 3) $s > 2$, $k > 3$, $p > 2$.

Доказательство. В случае, когда выполняется первое условие, доказательство леммы вытекает из [7] (теорема 1).

Пусть теперь p — произвольное простое число больше 3, $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s , $s > 2$. Из леммы 3 следует, что для доказательства данной леммы в случае 2 достаточно показать, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности \mathbb{Z}_p -представлений группы H , содержащих три неприводимые неэквивалентные компоненты, каждая из которых имеет степень, отличную от 1.

Введем далее следующие обозначения: E_n — единичная матрица порядка n ; $A^{(n)} = A \otimes E_n$ — тензорное произведение матриц A и E_n (A — произвольная \mathbb{Z}_p -матрица); ϵ_i — первообразный корень степени p^{s_i} из 1, $t_i = \epsilon_i - 1$, $i = 0, 1, 2, 3$; $0 = s_0 < s_1 < s_2 < s_3 \leq s$.

Рассмотрим \mathbb{Z}_p -представление группы H вида

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_3^{(2n)} & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_2^{(2n)} & \langle t_2^2 E_{2n} \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_1^{(2n)} \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \langle t_3^{p+1} E_n \rangle & 0 \\ 0 & \langle t_3^{p-1} E_n \rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \langle t_3 A \rangle & \langle B \rangle \\ \langle E_n \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

A, B — произвольные \mathbb{Z}_p -матрицы порядка n и $\langle D \rangle = \|\langle \delta_{ij} \rangle\|$, $D = \|\delta_{ij}\|$.

Предположим, что представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ — обобщенно эквивалентны. Тогда существует натуральное число k , не делящееся на p , и обратная матрица C такие, что

$$C\Gamma(A, B)_a = \Gamma(A', B')_{r_a} C. \tag{6}$$

Используя [10], можно показать, что представление $\Gamma' : a \rightarrow \Gamma(A', B')_{r_a}^r$ \mathbb{Z}_p -эквивалентно представлению $\Gamma(A'', B'')$ для некоторых \mathbb{Z}_p -матриц A'', B'' порядка n . Тогда из (6) получаем, что существует обратимая \mathbb{Z}_p -матрица C_1 такая, что $C_1\Gamma(A, B)_a = \Gamma(A'', B'')_{r_a} C_1$. Из [12] вытекает, что задача классифи-

сами всех неэквивалентных Z_p -представлений группы H вида $\Gamma(A, B)$ является дикой. Отсюда следует утверждение леммы в этом случае.

Пусть теперь p — произвольное нечетное простое число, $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s , $s > 2$. Аналогично предыдущему случаю можно показать, используя [12], что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности Z_p -представлений группы H вида

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_3^{(2n)} & \Lambda_1 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_2^{(2n)} & \langle t_2 E_{2n} \rangle & \langle E_{2n} \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_1^{(2n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_0^{(2n)} \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \langle t_3^{p+1} E_n \rangle & 0 \\ 0 & \langle t_3^{p-1} E_n \rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \langle t_3 A \rangle & \langle t_3 B \rangle \\ \langle E_n \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

Λ_1, Λ_2 — произвольные Z_p -матрицы порядка n . Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть G — произвольная конечная группа, N — нормальная подгруппа группы G . Если является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности точных Z_p -представлений группы G/N , то дикой будет и задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности Z_p -представлений группы G .

Доказательство. Пусть $\Gamma: g+N \rightarrow \Gamma_{g+N}$ и $\Delta: g+N \rightarrow \Delta_{g+N}$ — произвольные точные Z_p -представления степени n группы G/N . Рассмотрим Z_p -представления $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Delta}$ группы G вида $\bar{\Gamma}: g \rightarrow \Gamma_{g+N}$, $\bar{\Delta}: g \rightarrow \Delta_{g+N}$, $g \in G$. Предположим, что представления $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Delta}$ обобщенно эквивалентны, т. е. существуют $C \in GL(n, Z_p)$ и $\psi \in \text{Aut } G$ такие, что

$$C\bar{\Gamma}_g = \bar{\Delta}_{\psi(g)}C, \quad g \in G. \quad (7)$$

Поскольку Γ и Δ — точные Z_p -представления, то $\psi(N) = N$. Пусть ρ — автоморфизм группы G/N , определенный следующим образом: $\rho(g+N) = \psi(g) + N$, $g+N \in G/N$. Тогда из (7) получим $C\Gamma_{g+N} = \Delta_{\rho(g+N)}C$, $g+N \in G/N$. Отсюда и вытекает утверждение предложения.

Теорема 3. Описание всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p -группы с условием минимальности с помощью конечной p -группы H является дикой задачей, если выполняется одно из следующих условий: 1) H — абелева p -группа, $p \neq 2$; 2) H — нециклическая 2-группа порядка $\|H\| > 4$; 3) H — циклическая p -группа порядка p^s , $s > 2$ при $p \neq 2$, $s > 3$ при $p = 2$.

Доказательство. Отметим сразу, что доказательство теоремы в случае, когда выполняется условие 3, вытекает из леммы 6.

Пусть p — произвольное нечетное простое число и H — нециклическая p -группа. Поскольку группа H содержит нормальную подгруппу N , для которой H/N — группа типа (p, p) , то из предложения 1 следует, что для доказательства теоремы в данном случае достаточно показать, что является дикой за-

с точностью до обобщенной эквивалентности точных Z_p -представлений группы $H_0 = \langle a, b \rangle$, $pa = 0$, $pb = 0$.

Проверим, что точным Z_p -представлением группы H_0 является представление вида

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(3n)} & \Lambda(A, B) \\ 0 & E_{(2q+1)n} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_3 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(A, B) = \begin{pmatrix} E_{qn} & 0 & \langle A \rangle \\ E_{qn} & 0 & \langle E_n \rangle \\ E_{qn} & 0 & \langle B \rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & (\tilde{\varepsilon}^2)^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & E_{qn} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle A \rangle \\ \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & \langle \lambda A \rangle \\ -E_{qn} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$q = p - 1$; ε — первообразный корень степени p из 1; $\lambda = 1 + \varepsilon$; A, B — произвольные необратимые Z_p -матрицы порядка n .

Предположим, что для некоторых необратимых Z_p -матриц A, B, A', B' представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ обобщенно эквивалентны. Тогда существуют такие $C \in GL((5q+1)n, Z_p)$ и $\psi \in \text{Aut } H_0$ ($\psi: a \rightarrow ia + jb, b \rightarrow ka + lb$), что

$$C\Gamma(A, B)_g = \Gamma(A', B')_{\psi(g)}C, \quad g \in H_0. \quad (8)$$

Обозначим через $\text{tr}(L)$ след произвольной квадратной Z_p -матрицы L . Тогда

$$\text{tr}(\Gamma(A', B')_{ia+jb}) = n((\sigma_{i+j} + \sigma_{i+2j} + \sigma_i + 2\sigma_j)q + 1),$$

$$\sigma_r = \begin{cases} 1, & \text{если } r \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } r \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Отсюда из (8) получим $(\sigma_{i+j} + \sigma_{i+2j} + \sigma_i + 2\sigma_j)q + 1 = 2q + 1$. Следовательно, $j \equiv 0 \pmod{p}$ и $i \not\equiv 0 \pmod{p}$, $l \not\equiv 0 \pmod{p}$. Теперь на основании (8) и обратимости матриц A, B, A', B' , используя [10], можно показать, что представление $\Gamma': a \rightarrow \Gamma(A', B')_{ia}$, $b \rightarrow \Gamma(A', B')_{ka+lb}$ Z_p -эквивалентно представлению

$$\Gamma''(A'', B''): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(3n)} & \Lambda(A'', B'') \\ 0 & E_{(2q+1)n} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_3 \\ 0 & \Lambda'_2 \end{pmatrix},$$

где A, B — некоторые необратимые Z_p -матрицы порядка n и Λ'_3 — некоторая Z_p -матрица. Следовательно, существует такая матрица $C' \in GL((5q+1)n, Z_p)$, что $\Gamma(A, B)_a C' = C' \Gamma''(A'', B'')_a$, $\Gamma(A, B)_b C' = C' \Gamma''(A'', B'')_b$.

$$C' = \begin{pmatrix} \Theta & C'_0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & 0 \\ S_3 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_5 \end{pmatrix}, \quad C'_0 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{pmatrix},$$

$\Theta_i \in GL(n, \mathbb{Z}_p[\epsilon])$, $i = 1, 2, 3$, $\tilde{\Lambda} = \|\tilde{\lambda}_{ij}\|$, $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ и выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}^{*1} C_1 + S_1 &= \tilde{\Theta}_1 + C_1, & \tilde{\epsilon}^{(n)} C_3 + \langle A \rangle S_5 &= \tilde{\Theta}_1 \langle A'' \rangle + C_3, \\ \tilde{\epsilon}^{*2} C_4 + S_1 &= \tilde{\Theta}_2 + C_4, & \tilde{\epsilon}^{(n)} C_6 + \langle E_n \rangle S_5 &= \tilde{\Theta}_2 \langle E_n \rangle + C_6, \\ \tilde{\epsilon}^{*3} C_7 + S_1 &= \tilde{\Theta}_3 + C_7, & \tilde{\epsilon}^{(n)} C_9 + \langle B \rangle S_5 &= \tilde{\Theta}_3 \langle B'' \rangle + C_9. \end{aligned}$$

Отсюда $A \equiv \Theta_1 A'' \Theta_1^{-1} \pmod{V}$, $B \equiv \Theta_3 B'' \Theta_3^{-1} \pmod{V}$, где $V = (\epsilon - 1)(\mathbb{Z}_p[\epsilon])$. Очевидно, задача описания с точностью до подобия пар необратимых матриц над полем из p элементов является дикой.

Рассмотрим случай, когда H — нециклическая 2-группа порядка $|H| > 4$. Хорошо известно, что тогда существует нормальная подгруппа N группы H , для которой фактор-группа H/N изоморфна одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} D_8 &= \langle a, b \mid 4a = 2b = 0, -b + a + b = -a \rangle, \\ Q_8 &= \langle a, b \mid 4a = 0, 2b = 2a, -b + a + b = -a \rangle, \\ H_1 &= \langle a, b \mid 4a = 2b = 0, -b + a + b = a \rangle, \\ H_2 &= \langle a_i \mid 2a_i = 0, a_i + a_j = a_j + a_i; i, j = 1, 2, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому аналогично предыдущему случаю достаточно показать, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности всех точных \mathbb{Z}_2 -представлений каждой из групп D_8, Q_8, H_1, H_2 .

Рассмотрим \mathbb{Z}_2 -представление $\Gamma(A, B)$ группы D_8 вида

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(n)} & 0 & \Lambda(A) \\ 0 & \Lambda_1 & E_{2n} \\ 0 & 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} F^{(n)} & 0 & \Lambda'(A) \\ 0 & \Lambda_1 & \Lambda''(B) \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix},$$

где \tilde{i} — первообразный корень степени 4 из 1.

$$\Lambda(A) = (\langle E_n \rangle \langle A \rangle), \quad \Lambda'(A) = (S^{(n)} S_1 \otimes (-A)),$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda''(B) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

A, B — произвольные Z_2 -матрицы порядка n .

Очевидно, $\Gamma(A, B)$ — точное Z_2 -представление группы D_8 . Покажем, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности представлений $\Gamma(A, B)$ группы D_8 , где матрицы A, B пробегают множество Ω_n всех необратимых Z_2 -матриц C порядка $n = 4n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, таких, что матрица $C + E_n$ необратима.

Предположим, что для некоторых матриц $A, B, A', B' \in \Omega_n$ представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ обобщенно эквивалентны, т. е. существуют такие $C \in GL(6n, Z_2)$ и $\psi \in \text{Aut } D_8$ ($\psi: a \rightarrow ja, b \rightarrow la + b$), что

$$\Gamma(A, B)_g C = C \Gamma(A', B')_{\psi(g)}, \quad g \in D_8. \quad (10)$$

Поскольку $B' \in \Omega_n$, то из (10) следует, что $l \equiv 0 \pmod{2}$. Учитывая последнее, можно показать, что представление $\Gamma': g \rightarrow \Gamma(A', B')_{\psi(g)}$ Z_2 -эквивалентно представлению

$$\Gamma''(A'', B''): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(n)} & 0 & \Lambda(A'') \\ 0 & \Lambda_1 & E_{2n} \\ 0 & 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} F^{(n)} & 0 & \Lambda_2 \\ 0 & \Lambda_1 & \Lambda''(B'') \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix}$$

для некоторых матриц A'', B'' из Ω_n и некоторой Z_2 -матрицы Λ_2 . Следовательно, из (10) вытекает существование обратной матрицы C' такой, что $\Gamma(A, B)_a C' = C' \Gamma''(A'', B'')_a$, $\Gamma(A, B)_b C' = C' \Gamma''(A'', B'')_b$. Отсюда получаем

$$C' = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta} & 0 & 0 & S_{14} & S_{15} \\ 0 & S_{22} & 0 & S_{24} & S_{25} \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{pmatrix},$$

где $\Theta \in GL(n, Z_2[i])$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{i}^{(n)} S_{14} + \langle E_n \rangle S_{44} &= \tilde{\Theta} \langle E_n \rangle - S_{14}, & S_{24} + S_{44} &= S_{22} - S_{24}, \\ \tilde{i}^{(n)} S_{15} + \langle A \rangle S_{55} &= \tilde{\Theta} \langle A'' \rangle + S_{15}, & S_{25} + B S_{55} &= S_{22} B'' - S_{25}, \end{aligned}$$

$$-S_{35} + S_{55} = S_{33} + S_{35}, \quad -S_{34} + S_{44} = S_{33} - S_{34}.$$

Следовательно, $A \equiv \Theta A'' \Theta^{-1} \pmod{V}$, $B \equiv \Theta B'' \Theta^{-1} \pmod{V}$, где $V = (i - 1) Z_2[i]$. Задача же описания с точностью до подобия пар матриц из множества Ω_n является дикой [16, с. 48].

Аналогично предыдущему случаю можно доказать, что является дикой задача описания всех обобщенно неэквивалентных точных Z_2 -представлений

групп H_1, Q_8 . Для этого достаточно рассмотреть Z_2 -представления $\Gamma(A, B), \Gamma'(A', B')$ соответственно групп H_1, Q_8 вида

$$\Gamma(A, B): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(2n)} & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & \Lambda_n & E_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} E_{2n} & 0 & \Phi' & 0 \\ 0 & \Lambda_n & \Upsilon_n(E_n) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$\Gamma'(A', B'): a \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(2n')} & 0 & \Psi & 0 \\ 0 & \Lambda_{n'} & E_{2n'} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{n'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n'} \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} F' & 0 & \Psi' & 0 \\ 0 & \Lambda_{n'} & \Upsilon_{n'}(B') & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{n'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n'} \end{pmatrix},$$

где n — произвольное натуральное число, $n' = 4n_1, n_1 \in \mathbf{N}$,

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_r \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 0 & -F^{(n')} \\ F^{(n')} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_r(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ E_r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \langle A \rangle & \langle E_n \rangle \\ \langle E_n \rangle & \langle B \rangle \end{pmatrix}, \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 0 & (-S - S_1)^{(n)} \\ (S - S_1)^{(n)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \langle E_{n'} \rangle & \langle -A' \rangle \\ \langle -E_{n'} \rangle & \langle -A' \rangle \end{pmatrix}, \quad \Psi' = \begin{pmatrix} S^{(n')} & S_1 \otimes A' \\ S_1^{(n')} & S_1 \otimes A' \end{pmatrix},$$

A, B — произвольные Z_2 -матрицы порядка n , а A, B — Z_2 -матрицы, принадлежащие множеству Ω_n (см. обозначения (9)).

Наконец рассмотрим случай группы H_2 . Можно показать, используя [16, с. 48], что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности всех Z_2 -представлений $\Gamma(A, B)$ группы H_2 вида

$$\Gamma(A, B): a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda'_1 & \Lambda_1 \\ 0 & \Lambda'_2 \end{pmatrix}, \quad a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda'_1 & \Lambda_2 \\ 0 & -\Lambda'_2 \end{pmatrix}, \quad a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda'_3 & \Lambda_3 \\ 0 & \Lambda'_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda'_1 = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda'_2 = \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda'_3 = \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 \\ 0 & B & 0 \\ E_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 5n_1, n_1 \in \mathbf{N}$, A, B — Z_2 -матрицы порядка n такие, что матрицы $B, B + E_n$

$(A^T + E_n, B^T + E_n)$, по модулю 2 имеют ранг меньше n (C^T — матрица, транспонированная к матрице C). Теорема доказана.

1. Чершиков С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.
3. Robinson D. J. S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. — Berlin: Springer, 1972. — 464 p.
4. Kegel O., Wehrfritz B. A. Locally finite groups. — Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. — 210 p.
5. Hartley V. A dual approach to Černikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1977. — P. 215 — 239.
6. Гудивок П. М., Дроботенко В. С. Про циклічні розширення повних абелевих груп // Допов. АН УРСР. Сер. А. — 1966. — № 10. — С. 1239 — 1242.
7. Гудивок П. М., Вацук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, № 6. — С. 742 — 753.
8. Ройтер А. В. О представлениях группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1960. — № 19. — С. 65 — 74.
9. Берман С. Д., Гудивок П. М. О целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР. — 1962. — 145, № 6. — С. 1199 — 1201.
10. Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p -адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — 28, № 4. — С. 875 — 910.
11. Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers // Ann. Math. — 1962. — 76. — P. 73 — 92; — 1963. — 77. — P. 318 — 328.
12. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1978. — 148. — С. 96 — 105.
13. Гудивок П. М., Шапочка И. В. О расширениях абелевых p -групп // Допов. НАН України. — 1995. — № 2. — С. 8 — 9.
14. Холл М. Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 468 с.
15. Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966. — 543 с.
16. Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп. — Ужгород: Ужгород. ун-т, 1978. — 82 с.

Получено 20.12.96