УДК 512.544

И. В. Шапочка (Ужгородский гос. ун-т)

О p-ГРУППАХ ЧЕРНИКОВА, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЦИКЛИЧЕСКИМИ РАСШИРЕНИЯМИ ПОЛНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Let $\mathcal{V}$ be the set of all matrix $\mathbb{Z}_p$-representations of a cyclic p-group H which are the sums of indecomposable $\mathbb{Z}_p$-representations of the group H with no more two irreducible components ($\mathbb{Z}_p$ is the ring of p-adic integers). The extensions of an arbitrary divisible abelian p-group M with minimality conditions by a finite cyclic p-group H have been classified up to isomorphism which are determined by some reprezentations of the set $\mathcal{V}$.

Класифікуються з точністю до ізоморфізму розширення довільної повної абелевої p-групи M з умовою мінімальності за допомогою циклічної p-групи H, що визначаються деякими матричними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, які є сумою нерозкладних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи H, що містять не більше двох незвідних компонент ($\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел.

Исследованиям свойств черниковских групп посвящено много работ (см. [1–7]).

Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности. В [6, 7] на основании теории целочисленных p-адических представлений конечных групп изучаются черниковские p-группы $G(M, H, \Gamma)$, которые являются расширениями группы M с помощью конечной p-группы H и которые определяются матричным представлением Γ группы H над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. В частности с точностью до изоморфизма классифицированы все такие расширения, когда H — циклическая p-группа порядка p^s, а Γ пробегает множество всех $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более k ($k \leq 3$) неприводимых компонент $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, причем в случае $k = 3$ представление Δ_1 является единичным. Показано также, что задача классификации всех неизоморфных черниковских p-групп $G(M, H, \Gamma)$, где Γ пробегает множество всех матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих k неэквивалентных неприводимых компонент, является дикой (т. е. включает задачу описания с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над некоторым полем для произвольного натурального n), если выполняется одно из следующих условий: 1) $s > 3$, $k > 4$; 2) $s > 2$, $k = 3$, $p > 3$ и степень представления Δ_i больше 1 ($i = 1, 2, 3$); 3) $s > 2$, $k > 3$, $p > 2$. Отметим, что в [5] описаны все неизоморфные черниковские p-группы $G(M, H, \Gamma)$, где Γ пробегает множество всех вполне приводимых матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений циклической p-группы H.

В настоящей статье классифицируются с точностью до изоморфизма расширения произвольной полной абелевой p-группы M с условием минимальности с помощью циклической p-группы H, определяющиеся некоторыми матричными $\mathbb{Z}_p$-представлениями группы H, которые являются сумой неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более двух неприводимых компонент.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s (p — произвольное простое число, $s \in \mathbb{N}$) и M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p-группы C_{p^∞}, т. е.

$$M = M_1 \dot{+} \cdots \dot{+} M_n, \tag{1}$$

где $M_i = C_{p^\infty}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Известно [2], что группа $\operatorname{Aut} M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Отсюда и из теории расширений групп [2,8] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью циклической p-группы H определяется некоторым матричным представлением $\Gamma : a \to \Gamma_a$ степени n группы H над кольцом $\mathbb{Z}_p$ и некоторым элементом $m \in M$, удовлетворяющим условию $\Gamma_a(m) = m$. Будем обозначать такое расширение через $G(M, H, \Gamma, m)$ либо просто через $G(\Gamma, m)$.

Пусть $\{a_r \mid r = 0, 1, 2, \ldots\}$ — образующие элементы группы C_{p^∞}, причем $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ $(r \in \mathbb{N})$. Если $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p)$ и $m = (m_1, \ldots, m_n)$ $(m_i \in M_i = C_{p^\infty},\ i = 1, \ldots, n)$, $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \cdots$, $m_j = y_0^{(j)} a_0 + y_1^{(j)} a_1 + \cdots$ $\cdots + y_{k_j}^{(j)} a_{k_j}$ $(0 \le x_{ij}^{(r)}, y_i^{(s)} < p)$, то $A(m) = (m_1', \ldots, m_n')$, где

$$m_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Лемма 1 ([6]). *Пусть M — p-группа вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа и $\mathbb{Z}_p$-представления $\Gamma : a \to \Gamma_a$ и $\Delta : a \to \Delta_a$ группы H — обобщенно эквивалентны, т.е. существуют обратимая $\mathbb{Z}_p$-матрица C и натуральное число r взаимно простое с p такие, что $C\Gamma_a C^{-1} = \Delta_a^r$. Тогда группа $G(M, H, \Gamma, m)$ изоморфна группе $G(M, H, \Delta, C(r^{-1}m))$.*

Лемма 2 ([6]). *Из изоморфизма групп $G(M, H, \Gamma, m)$ и $G(M, H, \Delta, m')$ вытекает обобщенная эквивалентность $\mathbb{Z}_p$-представлений Γ и Δ.*

Лемма 3 ([6]). *Группы $G(M, H, \Gamma, m)$ и $G(M, H, \Gamma, m')$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют обратимая $\mathbb{Z}_p$-матрица C и натуральное число r взаимно простое с p, для которых выполняются следующие условия*

$$C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r, \qquad m - C^{-1}(rm') \in B(\Gamma),$$

где $B(\Gamma) = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{p^s-1} \Gamma_a^i(m_0) \mid m_0 \in M \right\}$.

Будем говорить, что матричное $\mathbb{Z}_p$-представление Γ циклической p-группы H содержит d различных неприводимых компонент, если Γ эквивалентно над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел представлению $\Gamma' = n_1\Delta_1 + \cdots + n_d\Delta_d$ $(n_i \in \mathbb{N};\ i = 1, \ldots, d)$, где $\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_d$ — попарно неэквивалентные неприводимые $\mathbb{Q}_p$-представления группы H.

Пусть ε_k — первообразный корень степени p^k из 1, где $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$. Для произвольного элемента θ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$ через $\tilde{\theta}$ обозначим матрицу, соответствующую оператору умножения на θ в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1,\ \varepsilon_k,\ \ldots,\ \varepsilon_k^{q_k - 1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$, где $q_k = \varphi(p^k)$, φ — функция Эйлера. Тогда произвольное неприводимое матричное $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению $\Delta_k : a \to \tilde{\varepsilon}_k$ для некоторого $k \in \{0,\ 1, \ldots, s\}$. В силу [9] неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H с двумя неприводимыми компонентами $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению

$$\Gamma_{kl}^{(i)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_k & \langle t_k^i \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_l \end{pmatrix},$$

где $k,l \in \{0,1,\dots,s\}$, $k>l$, $t_k=\varepsilon_k-1$, $i\in\{0,1,\dots,q_l-1\}$, $\langle\delta\rangle$ — $q_k\times q_l$-матрица над $\mathbb{Z}_p$, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta\in\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$ в $\mathbb{Z}_p$-базисе 1, ε_k, $\dots$, $\varepsilon_k^{q_k-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$. Причем представления $\Gamma_{kl}^{(i)}$ и $\Gamma_{kl}^{(j)}$ $(i,j\in\{0,1,\dots,q_l-1\})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $i=j$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ множество всех неизоморфных нерасщепляемых расширений вида $G(M,H,\Gamma,m)$, где Γ пробегает множество

$$\mathcal{V}_0=\left\{\Delta_{k'},\ \Gamma_{kl}^{(i)}\mid k',k,l=0,1,\dots,s\ (k>l);\ i=0,1,\dots,\varphi(p^l)-1\right\}$$

всех неэквивалентных неразложимых матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более двух неприводимых компонент. Если

$$\Phi_{p^k}(x)=-\alpha_1^{(k)}-\alpha_2^{(k)}x-\dots-\alpha_{q_k}^{(k)}x^{q_k-1}+x^{q_k}\quad (q_k=\varphi(p^k))$$

— полином деления груга порядка p^k, $k\in\{0,1,\dots,s\}$, и

$$t_k^i=(\varepsilon_k-1)^i=\gamma_0^{(k,i)}+\gamma_1^{(k,i)}\varepsilon_k+\dots+\gamma_{q_k-1}^{(k,i)}\varepsilon_k^{q_k-1}\quad (\gamma_j^{(k,i)}\in\mathbb{Z}_p,\ i,j=0,1,\dots,q_k-1),$$

то из [6] вытекает, что множество $\mathcal{W}$ исчерпывается группами:

$$G(\Delta_{k'},u_{k'}),\quad u_{k'}=(\alpha_1^{(k')}a_0,(\alpha_1^{(k')}+\alpha_2^{(k')})a_0,\dots,(\alpha_1^{(k')}+\alpha_2^{(k')}+\dots+\alpha_{q_{k'}-1}^{(k')})a_0,a_0);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)},v_{kl}),\quad v_{kl}=(a_0+\alpha_1^{(k)}a_1,a_0+(\alpha_1^{(k)}+\alpha_2^{(k)})a_1,\dots,a_0+(\alpha_1^{(k)}+\dots+\alpha_{q_k-1}^{(k)})a_1,a_1,u_l);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl}),\quad \bar u_{kl}=(u_k,0,\dots,0);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)}),\quad w_{kl}^{(j)}=(\gamma_0^{(k,j)}a_0,(\gamma_0^{(k,j)}+\gamma_1^{(k,j)})a_0,\dots,(\gamma_0^{(k,j)}+\gamma_1^{(k,j)}+\dots+\gamma_{q_k-2}^{(k,j)})a_0,0,u_l),$$

где $k'=1,2,\dots,s$; $k,l=1,\dots,s$ $(k>l)$; $i=0,1,\dots,q_l-1$; $j=1,2,\dots,q_l-1$.

Введем отношения порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{W}$:

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)},v_{kl})\prec G(\Delta_k,u_k);\quad G(\Gamma_{kl}^{(0)},v_{kl})\prec G(\Delta_l,u_l);\quad G(\Gamma_{kl}^{(0)},v_{kl})\prec G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl});$$
$$G(\Gamma_{kl}^{(0)},v_{kl})\prec G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)});\quad G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)})\prec G(\Delta_k,u_k);\quad G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)})\prec G(\Delta_l,u_l);$$
$$G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)})\prec G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl});\quad G(\Gamma_{kl}^{(j)},w_{kl}^{(j)})\prec G(\Gamma_{kl}^{(j')},w_{kl}^{(j')}),\ \text{если } j<j';$$
$$G(\Delta_k,u_k)\prec G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl});\quad G(\Delta_l,u_l)\prec G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl});$$
$$G(\Gamma_{kl}^{(i)},\bar u_{kl})\prec G(\Gamma_{kl}^{(i')},\bar u_{kl}),\ \text{если } i>i',$$

где $k,l=1,\dots,s$ $(k>l)$; $i,i'=0,1,\dots,\varphi(p^l)-1$; $j,j'=1,2,\dots,\varphi(p^l)-1$.

Лемма 4. *Пусть $G(\Gamma,m)$, $G(\Gamma',m')\in\mathcal{W}$. Если $G(\Gamma,m)\prec G(\Gamma',m')$, то $G(\Gamma+\Gamma',(m,m'))\cong G(\Gamma+\Gamma',(m,0))$.*

Доказательство леммы легко следует из [7].

Назовем два $\mathbb{Q}_p$-представления Υ и Υ' группы H дизъюнктными, если они не имеют общих неприводимых компонент.

Лемма 5. *Пусть группы $G(M,H,\Gamma,m)$ и $G(M',H,\Gamma',m')$ являются нерасщепляемыми расширениями соотвественно полных абелевых p-групп M и M' вида (1) с помощью циклической p-группы $H=\langle a\rangle$. Если представления $\Gamma: H\to GL(n,\mathbb{Z}_p)$ и $\Gamma': H\to GL(n',\mathbb{Z}_p)$, рассматриваемые как $\mathbb{Q}_p$-представления, являются дизъюнктными, то группа $G(M\dot{+}M',H,\Gamma+\Gamma',(m,m'))$ не изоморфна ни одной из групп $G(M\dot{+}M',H,\Gamma+\Gamma',(m,0))$ и $G(M\dot{+}M',H,\Gamma+\Gamma',(0,m'))$.*

Доказательство. Можно считать, что представления Γ и Γ' имеют вид

$$\Gamma: a\to\begin{pmatrix}\Upsilon_1(a) & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \Upsilon_g(a)\end{pmatrix},\qquad \Gamma': a\to\begin{pmatrix}\Lambda_1(a) & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_h(a)\end{pmatrix},$$

где $g,h\in\mathbb{N}$, $\Upsilon_i: a\to\Upsilon_i(a)$ $(i=1,\dots,g)$, $\Lambda_j: a\to\Lambda_j(a)$ $(j=1,\dots,h)$ — неприводимые $\mathbb{Z}_p$-представления группы H. Поскольку представления Γ и Γ' — дизъюнктны, то представления Υ_i и Λ_j являются неэквивалентными для произвольних $i\in\{1,\dots,g\}$ и $j\in\{1,\dots,h\}$. Хорошо известно (см. [10, 11]), что в этом случае для произвольного натурального r взаимно простого с p $\mathbb{Z}_p$-матрица S, удовлетворяющая равенству $S\Upsilon_i(a)=\Lambda_j(a)^rS$, является нулевой матрицей. Поэтому обратимая $\mathbb{Z}_p$-матрица C, удовлетворяющая равенству $C(\Gamma+\Gamma')_a=(\Gamma+\Gamma')_a^rC$, имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{pmatrix},$$

где $C_1\in GL(n,\mathbb{Z}_p)$, $C_2\in GL(n',\mathbb{Z}_p)$.

Далее, поскольку $B(\Gamma+\Gamma')=B(\Gamma)\dot{+}B(\Gamma')$ и $m\notin B(\Gamma)$, $m'\notin B(\Gamma')$ (см. обозначения леммы 3), то для произвольной матрицы $C\in GL(n+n',\mathbb{Z}_p)$ и произвольного числа $r\in\mathbb{N}$ $((r,p)=1)$, удовлетворяющих равенсту $C(\Gamma+\Gamma')_a=(\Gamma+\Gamma')_a^rC$, выполняются условия

$$(m,m')-C^{-1}(r(m,0))\notin B(\Gamma+\Gamma'),\quad (m,m')-C^{-1}(r(0,m'))\notin B(\Gamma+\Gamma').$$

Это доказывает данную лемму.

Теорема 1. *Пусть $H=\langle a\rangle$ — циклическая p-группа; $\mathcal{V}$ — множество всех неэквивалентных матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H вида $\Delta_1'+\dots+\Delta_g'+$ $+\Gamma_1'+\dots+\Gamma_h'$ $(g,h\in\mathbb{N})$, где Δ_i' — неприводимое $\mathbb{Z}_p$-представление $(i=1,\dots,g)$, Γ_j' — приводимое неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление $(j=1,\dots,h)$, содержащее две неприводимые компоненты, и для произвольных $j,\ j'\in\{1,\dots,h\}$ представления Γ_j' и $\Gamma_{j'}'$ являются либо дизъюнктными, либо $\mathbb{Q}_p$-эквивалентными; $\mathcal{V}'=V\cup\emptyset$. Тогда все неизоморфные расширения произвольной полной абелевой p-группы с условием минимальности с помощью группы H, определяющиеся $\mathbb{Z}_p$-представлениями из множества $\mathcal{V}$, исчерпываются группами:*

$$G(\Theta,0),\quad G(\Theta_1+\Theta_2+\dots+\Theta_r+\Theta',(m_1,m_2,\dots,m_r,0)),$$

где $r\in\mathbb{N}$, $\Theta\in\mathcal{V}$, $\Theta'\in\mathcal{V}'$, $G(\Theta_i,m_i)\in\mathcal{W}$ $(i=1,\dots,r)$ и для произвольных $i,\ j\in\{1,\dots,r\}$ не определено отношение порядка $\prec$ для групп $G(\Theta_i,m_i)$ и $G(\Theta_j,m_j)$.

Доказательство. Из [6] вытекает, что произвольное нерасщепляемое расширение полной абелевой p-группы с помощью циклической p-группы H, определяющееся $\mathbb{Z}_p$-представлением из множества $\mathcal{V}$, изоморфно группе

$$G_1 = G(\bar{\Theta}_1 + \cdots + \bar{\Theta}_d + \bar{\Theta}, (\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_d, 0))$$

для некоторых $d \in \mathbb{N}$, $\bar{\Theta} \in \mathcal{V}'$, $G(\bar{\Theta}_i, \bar{m}_i) \in \mathcal{W}$ $(i = 1, \ldots, d)$. Далее из леммы 4 следует, что группа G_1 изоморфна группе

$$G_2 = G(\Theta_1 + \cdots + \Theta_r + \Theta', (m_1, \ldots, m_d, 0)),$$

где $r \in \mathbb{N}$, $\Theta' \in \mathcal{V}'$, $G(\Theta_i, m_i) \in \mathcal{W}$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $\mathbb{Q}_p$-представления $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ попарно дизъюнктны. В свою очередь из леммы 5 получаем, что группа G_2 не изоморфна ни одной из групп вида

$$G(\hat{\Theta}_1 + \cdots + \hat{\Theta}_q + \hat{\Theta}, (\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_q, 0)),$$

где $q \in \mathbb{N}$, $\hat{\Theta} \in \mathcal{V}'$, $G(\hat{\Theta}_i, \hat{m}_i) \in \mathcal{W}$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $q < r$. Это завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность профессору П.М. Гудивку за помощь, оказанную при написании этой статьи.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980.– 384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finitness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
5. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
6. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6.– С. 742–753.
7. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
9. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, №4. – С. 875–910.
10. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.—М.: Наука, 1969.—668 с.
11. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп. – Ужгород: Ужгородский ун-т, 1978. – 82 с.

Получено 01.11.2001