УДК 512.544

И. В. Шапочка (Ужгородский гос. ун-т)

О p-ГРУППАХ ЧЕРНИКОВА, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЦИКЛИЧЕСКИМИ РАСШИРЕНИЯМИ ПОЛНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Let $\mathcal{V}$ be the set of all matrix $\mathbb{Z}_p$-representations of a cyclic p-group H which are the sums of indecomposable $\mathbb{Z}_p$-representations of the group H with no more two irreducible components ($\mathbb{Z}_p$ is the ring of p-adic integers). The extensions of an arbitrary divisible abelian p-group M with minimality conditions by a finite cyclic p-group H have been classified up to isomorphism which are determined by reprezentations of the set $\mathcal{V}$.

Класифікуються з точністю до ізоморфізму розширення довільної повної абелевої p-групи M з умовою мінімальності за допомогою циклічної p-групи H, що визначаються матричними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, які є сумою нерозкладних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи H, що містять не більше двох незвідних компонент ($\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел.

Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности. В [1, 2] на основании теории целочисленных p-адических представлений конечных групп изучаются черниковские p-группы $G(M, H, \Gamma)$, которые являются расширениями группы M с помощью конечной p-группы H и которые определяются матричным представлением Γ группы H над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. В частности с точностью до изоморфизма классифицированы все такие расширения, когда H — циклическая p-группа порядка p^s, а Γ пробегает множество всех $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более k ($k \leq 3$) неприводимых компонент $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, причем в случае $k = 3$ представление Δ_1 является единичным. Показано также, что задача классификации всех неизоморфных черниковских p-групп $G(M, H, \Gamma)$, где Γ пробегает множество всех матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих k неэквивалентных неприводимых компонент, является дикой (т. е. включает задачу описания с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над некоторым полем для произвольного натурального n), если выполняется одно из следующих условий: 1) $s > 3$, $k > 4$; 2) $s > 2$, $k = 3$, $p > 3$ и степень представления Δ_i больше 1 ($i = 1, 2, 3$); 3) $s > 2$, $k > 3$, $p > 2$. Отметим, что в [3] описаны все неизоморфные черниковские p-группы $G(M, H, \Gamma)$, где Γ пробегает множество всех вполне приводимых матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений циклической p-группы H.

В настоящей статье обобщаются результаты, полученные автором в [4]. В ней классифицируются с точностью до изоморфизма расширения произвольной полной абелевой p-группы M с условием минимальности с помощью циклической p-группы H, определяющиеся матричными $\mathbb{Z}_p$-представлениями группы H, которые являются сумой неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более двух неприводимых компонент.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s (p — произвольное простое число, $s \in \mathbb{N}$) и M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p-группы C_{p^∞}, т. е.

$$M = M_1 \dot{+} \cdots \dot{+} M_n, \tag{1}$$

где $M_i = C_{p^\infty}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Известно [5], что группа $\operatorname{Aut} M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Отсюда и из теории расширений групп [5] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью циклической p-группы H определяется некоторым матричным представлением $\Gamma : a \to \Gamma_a$ степени n группы H над кольцом

$\mathbb{Z}_p$ и некоторым элементом $m \in M$, удовлетворяющим условию $\Gamma_a(m) = m$. Будем обозначать такое расширение через $G(M, H, \Gamma, m)$ либо просто через $G(\Gamma, m)$.

Пусть $\{a_r \mid r = 0, 1, 2, \ldots\}$ — образующие элементы группы C_{p^∞}, причем $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ $(r \in \mathbb{N})$. Если $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p)$ и $m = (m_1, \ldots, m_n)$ $(m_i \in M_i = C_{p^\infty},\ i = 1, \ldots, n)$, $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \cdots$, $m_j = y_0^{(j)} a_0 + y_1^{(j)} a_1 + \cdots$ $\cdots + y_{k_j}^{(j)} a_{k_j}$ $(0 \le x_{ij}^{(r)}, y_i^{(s)} < p)$, то $A(m) = (m'_1, \ldots, m'_n)$, где

$$m'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем говорить, что матричное $\mathbb{Z}_p$-представление Γ циклической p-группы H содержит d различных неприводимых комнонент, если Γ эквивалентно над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел представлению $\Gamma' = n_1\Delta_1 + \cdots + n_d\Delta_d$ $(n_i \in \mathbb{N};\ i = 1, \ldots, d)$, где $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ — попарно неэквивалентные неприводимые $\mathbb{Q}_p$-представления группы H.

Пусть ε_k — первообразный корень степени p^k из 1, где $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$. Для произвольного элемента θ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$ через $\tilde{\theta}$ обозначим матрицу, соответствующую оператору умножения на θ в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1,\ \varepsilon_k,\ \ldots,\ \varepsilon_k^{q_k - 1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$, где $q_k = \varphi(p^k)$, φ — функция Эйлера. Тогда произвольное неприводимое матричное $\mathbb{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению $\Delta_k : a \to \tilde{\varepsilon}_k$ для некоторого $k \in \{0,\ 1, \ldots, s\}$. В силу [6] неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H с двумя неприводимыми компонентами $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению

$$\Gamma_{kl}^{(i)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_k & \langle t_k^i \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_l \end{pmatrix},$$

где $k, l \in \{0, 1, \ldots, s\}$, $k > l$, $t_k = \varepsilon_k - 1$, $i \in \{0, 1, \ldots, q_l - 1\}$, $\langle \delta \rangle$ — $q_k \times q_l$-матрица над $\mathbb{Z}_p$, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta \in \mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$ в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1,\ \varepsilon_k,\ \ldots,\ \varepsilon_k^{q_k-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$. Причем представления $\Gamma_{kl}^{(i)}$ и $\Gamma_{kl}^{(j)}$ $(i, j \in \{0, 1, \ldots, q_l - 1\})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $i = j$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ множество всех неизоморфных нерасщепляемых расширений вида $G(M, H, \Gamma, m)$, где Γ пробегает множество

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \Delta_{k'},\ \Gamma_{kl}^{(i)} \mid k', k, l = 0, 1, \ldots, s\ (k > l);\ i = 0, 1, \ldots, \varphi(p^l) - 1 \right\}$$

всех неэквивалентных неразложимых матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H, содержащих не более двух неприводимых компонент. Если

$$\Phi_{p^k}(x) = -\alpha_1^{(k)} - \alpha_2^{(k)} x - \cdots - \alpha_{q_k}^{(k)} x^{q_k - 1} + x^{q_k} \quad (q_k = \varphi(p^k))$$

— полином деления груга порядка p^k, $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$, и

$$t_k^i = (\varepsilon_k - 1)^i = \gamma_0^{(k,i)} + \gamma_1^{(k,i)} \varepsilon_k + \cdots + \gamma_{q_k-1}^{(k,i)} \varepsilon_k^{q_k - 1} \quad (\gamma_j^{(k,i)} \in \mathbb{Z}_p,\ i, j = 0, 1, \ldots, q_k - 1),$$

то из [1] вытекает, что множество $\mathcal{W}$ исчерпывается группами:

$$G(\Delta_{k'}, u_{k'}), \quad u_{k'} = (\alpha_1^{(k')} a_0, (\alpha_1^{(k')} + \alpha_2^{(k')}) a_0, \ldots, (\alpha_1^{(k')} + \alpha_2^{(k')} + \cdots + \alpha_{q_{k'}-1}^{(k')}) a_0, a_0);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}), \quad v_{kl} = (a_0 + \alpha_1^{(k)} a_1, a_0 + (\alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(k)}) a_1, \ldots, a_0 + (\alpha_1^{(k)} + \cdots + \alpha_{q_k-1}^{(k)}) a_1, a_1, u_l);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl}), \quad \bar{u}_{kl} = (u_k, 0, \ldots, 0);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}), \quad w_{kl}^{(j)} = (\gamma_0^{(k,j)} a_0, (\gamma_0^{(k,j)} + \gamma_1^{(k,j)}) a_0, \ldots, (\gamma_0^{(k,j)} + \gamma_1^{(k,j)} + \cdots + \gamma_{q_k-2}^{(k,j)}) a_0, 0, u_l),$$

где $k' = 1, 2, \ldots, s$; $k, l = 1, \ldots, s$ $(k > l)$; $i = 0, 1, \ldots, q_l - 1$; $j = 1, 2, \ldots, q_l - 1$.

Введем отношения порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{W}$:

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Delta_k, u_k); \quad G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Delta_l, u_l); \quad G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl});$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}); \quad G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Delta_k, u_k); \quad G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Delta_l, u_l);$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl}); \quad G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Gamma_{kl}^{(j')}, w_{kl}^{(j')}), \text{ если } j < j';$$

$$G(\Delta_k, u_k) \prec G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl}); \quad G(\Delta_l, u_l) \prec G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl});$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(i)}, \bar{u}_{kl}) \prec G(\Gamma_{kl}^{(i')}, \bar{u}_{kl}), \text{ если } i > i';$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Gamma_{kl_1}^{(i)}, \bar{u}_{kl_1}); \quad G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Gamma_{kl_1}^{(i)}, \bar{u}_{kl_1});$$

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)}, v_{kl}) \prec G(\Gamma_{k_1 l}^{(i)}, \bar{u}_{k_1 l}); \quad G(\Gamma_{kl}^{(j)}, w_{kl}^{(j)}) \prec G(\Gamma_{k_1 l}^{(i)}, \bar{u}_{k_1 l}),$$

где $k, k_1, l, l_1 = 1, \ldots, s$ $(k > l,\ k > l_1,\ k_1 > l,\ k \neq k_1,\ l \neq l_1)$; $i, i' = 0, 1, \ldots, \varphi(p^l) - 1$; $j, j' = 1, 2, \ldots, \varphi(p^l) - 1$.

Лемма 1. *Пусть* $G(\Gamma, m)$, $G(\Gamma', m') \in \mathcal{W}$. *Если* $G(\Gamma, m) \prec G(\Gamma', m')$, *то* $G(\Gamma + \Gamma', (m, m')) \cong G(\Gamma + \Gamma', (m, 0))$.

Доказательство. В случае, когда в условиях леммы представления Γ и Γ' содержат неприводимые компоненты Δ_k и Δ_l $(k \neq l)$, ее доказательство легко следует из [2].

Пусть $\Gamma = \Gamma_{kl}^{(0)}$, $\Gamma' = \Gamma_{kl_1}^{(i)}$, для некоторых $k, l, l_1 \in \{1, \ldots, s\}$ $(k > l,\ k > l_1,\ l \neq l_1)$; $i \in \{0, 1, \ldots, \varphi(p^l) - 1\}$. Положим

$$C = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ -pE_1 & A & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix},$$

где E_1, E_2, E_3 — единичные матрицы соответственно порядков $q_k = \varphi(p^k)$, $q_l = \varphi(p^l)$, $q_{l_1} = \varphi(p^{l_1})$; A — $q_k \times q_l$-матрица, стобцы которой состоят из координат соответственно элементов λ, $\lambda\varepsilon_k$, $\ldots$, $\lambda\varepsilon_k^{q_l-1} \in \mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$ в $\mathbb{Z}_p$-базисе 1, ε_k, $\ldots$, $\varepsilon_k^{q_k-1}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon_k]$; $\lambda = -\frac{p}{\Phi_{p^l}(\varepsilon_k)}$. Используя [7], нетрудно проверить, что

$$(\Gamma + \Gamma')_a C = C(\Gamma + \Gamma')_a, \qquad C(v_{kl}, \bar{u}_{k_1 l}) = C(v_{kl}, 0).$$

Отсюда и из [1] вытекает, что

$$G(\Gamma_{kl}^{(0)} + \Gamma_{kl_1}^{(i)}, (v_{kl}, \bar{u}_{kl_1})) \cong G(\Gamma_{kl}^{(0)} + \Gamma_{kl_1}^{(i)}, (v_{kl}, 0)).$$

В остальных случаях доказательство аналогичное.

Теорема 1. *Пусть* $H = \langle a \rangle$ — *циклическая* p-*группа;* $\mathcal{V}$ — *множество всех неэквивалентных матричных* $\mathbb{Z}_p$-*представлений группы* H *вида* $\Delta'_1 + \cdots + \Delta'_g + \Gamma'_1 + \cdots + \Gamma'_h$ $(g, h \in \mathbb{N})$, *где* Δ'_i — *неприводимое* $\mathbb{Z}_p$-*представление* $(i = 1, \ldots, g)$,

Γ'_j — *приводимое неразложимое* $\mathbb{Z}_p$*-представление* $(j = 1, \ldots, h)$*, содержащее две неприводимые компоненты;* $\mathcal{V}' = V \cup \emptyset$*. Тогда все неизоморфные расширения произвольной полной абелевой* p*-группы с условием минимальности с помощью группы* H*, определяющиеся* $\mathbb{Z}_p$*-представлениями из множества* $\mathcal{V}$*, исчерпываются группами:*

$$G(\Theta, 0), \quad G(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_r + \Theta', (m_1, m_2, \ldots, m_r, 0)),$$

где $r \in \mathbb{N}$*,* $\Theta \in \mathcal{V}$*,* $\Theta' \in \mathcal{V}'$*,* $G(\Theta_i, m_i) \in \mathcal{W}$ $(i = 1, \ldots, r)$ *и для произвольных* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *не определено отношение порядка* $\prec$ *для групп* $G(\Theta_i, m_i)$ *и* $G(\Theta_j, m_j)$*.*

Доказательство теоремы вытекает из [4] и леммы 1.

1. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6.– С. 742–753.
2. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.
3. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
4. *Шапочка И.В.* О p-группах Черникова, являющихся циклическими расширениями полных абелевых групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 132-136.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
6. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, №4. – С. 875–910.
7. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп. – Ужгород: Ужгородский ун-т, 1978. – 82 с.

Получено 01.11.2002