УДК 512.544

І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЧЕРНІКОВСЬКІ p-ГРУПИ, ФАКТОРГРУПА ЯКИХ ЗА МАКСИМАЛЬНОЮ ПОВНОЮ АБЕЛЕВОЮ ПІДГРУПОЮ Є АБЕЛЕВОЮ ГРУПОЮ ТИПУ (p, p)

Let H be the abelian p-group of the type (p, p) and $\mathbb{Z}_p$ be the ring of p-adic integers. Let $\mathcal{V}$ be the set of all indecomposable matrix $\mathbb{Z}_p$-representations of the group H with no more two irreducible components. The extensions of an arbitrary divisible abelian p-group M with minimality conditions by the group H, which are determined by representations from the set $\mathcal{V}$, have been classified up to isomorphism.

Класифікуються з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи, факторгрупа H яких за максимальною повною абелевою підгрупою є абелевою групою типу (p, p) і які визначаються нерозкладним матричними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, що містять не більше двох незвідних компонент.

Нехай M — повна абелева p-група з умовою мінімальності. В [1, 2] за допомогою теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп вивчаються черніковські p-групи $G(M, H, \Gamma)$, які є розширеннями групи M за допомогою скінченної p-групи H і які визначаються матричними зображеннями Γ групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Зокрема з точністю до ізоморфізму класифіковані всі такі розширення, коли H — циклічна p-група порядку p^s, а Γ пробігає множину всіх матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи H, що містять не більше k $(k \leq 3)$ незвідних компонент $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, причому у випадку $k = 3$ зображення Δ_1 є одиничним. Показано також, що задача класифікації всіх неізоморфних черніковських p-груп вигляду $G(M, H, \Gamma)$, де Γ пробігає множину всіх матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень p-групи H, що містять k нееквівалентних незвідних компонент, є дикою (тобто включає задачу описання з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над деяким полем для довільного натурального n), якщо виконується одна із наступних умов:

1) H — циклічна p-група порядку p^s, $s > 3$, $k > 4$;
2) H — циклічна p-група порядку p^s, $s > 2$, $k = 3$, $p > 3$ і степінь зображення Δ_i більше 1 $(i = 1, 2, 3)$;
3) H — циклічна p-група порядку p^s, $s > 2$, $k > 3$, $p > 2$;
4) H — нециклічна p-група, $k > 4$.

Відзначимо, що в [3] описані всі неізоморфні черніковські p-групи вигляду $G(M, H, \Gamma)$, де Γ пробігає множину всіх цілком звідних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень циклічної p-груп H. А в [4] класифіковані з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи вигляду $G(M, H, \Gamma)$, де Γ пробігає множину матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень циклічної p-групи H, які є сумою нерозкладних матричних зображень групи H, що містять не більше двох незвідних компонент.

В цій статті за допомогою теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп дається описання всіх неізоморфних черніковських p-груп, факторгрупа H яких за максимальною повною абелевою підгрупою є абелевою групою типу (p, p) і які визначаються нерозкладними матричними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, що містять не більше двох незвідних компонент.

Нехай надалі $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи C_{p^∞}, тобто

$$M^{(n)} = C_{p^\infty} \dotplus C_{p^\infty} \dotplus \cdots \dotplus C_{p^\infty}, \tag{1}$$

Добре відомо [5], що група автоморфізмів групи $M^{(n)}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Звідси і теорії розширень груп [5] випливає, що всяка черніковська група G, що є розширенням групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної групи H визначається деяким матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням $\Gamma : h \to \Gamma_h$ $(h \in H)$ та деякою системою факторів $\{\mu_{u,v} \in M^{(n)} \mid u,\, v \in H\}$. Таку черніковську групу G будемо позначати через $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$.

Відомо (див. наприклад [6]), що якщо H є циклічною групою з твірним елементом a порядку s, то розширення $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ еквівалентне (отже, ізоморфне) розширенню $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\nu_{u,v}\})$ з більш простішою системою факторів $\{\nu_{u,v}\}$ такою, що

$$\nu_{ia,\,ja} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i+j < s; \\ m_0, \text{ якщо } i+j \geq s \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, s-1),$$

де m_0 — деякий елемент групи $M^{(n)}$ такий, що $\Gamma_a(m_0) = m_0$ (див. познач. (2)). Це дає змогу дати більш просту характеристику ізоморфізму таких розширень, зокрема як це зроблено в [1].

Розглянемо аналогічне питання ізоморфізму розширень вигляду $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$, у випадку коли H є абелевою p-групою типу (p,p). Відзначимо, що задача класифікація неізоморфних розширень груп у загальному випадку вивчалась в [7].

Нехай надалі $\{c_r \mid r = 0, 1, \ldots\}$ — твірні елементи групи C_{p^∞}, причому $pc_0 = 0$, $pc_r = c_{r-1}$ $(r \in \mathbb{N})$. Якщо $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ і $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M^{(n)}$, де

$$\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_p, \quad (0 \leq x_{ij}^{(r)} < p),$$

$$m_j = y_0^{(j)} c_0 + y_1^{(j)} c_1 + \cdots + y_{k_j}^{(j)} c_{k_j} \in C_{p^\infty} \quad (0 \leq y_i^{(s)} < p),$$

то

$$A(m) = (m'_1, \ldots, m'_n), \tag{2}$$

де, у свою чергу,

$$m'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r c_s \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Нехай $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ — абелева група типу (p,p) і

$$\Gamma : ia + jb \to \Gamma_a^i \Gamma_b^j \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

— деяке матричне $\mathbb{Z}_p$-зображення групи H степеня n. Ведемо наступні позначення:

$$\Lambda_{q,r} = (E + \Gamma_a + \cdots + \Gamma_a^{q-1})(E + \Gamma_b + \cdots + \Gamma_b^{r-1}),$$

де E — одинична матриця порядку n, а q і r — деякі натуральні числа (додатково, за домовленістю, вважатимемо $\Lambda_{0,r} = \Lambda_{q,0} = E$); для довільного цілого числа k через k' та $\bar{k}$ будемо позначати відповідно частку та залишок при діленні числа k на p.

Лема 1. *Нехай $M^{(n)}$ — група вигляду* (1), $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ *— абелева група типу* (p,p) *та* $\Gamma : ia + jb \to \Gamma_a^i \Gamma_b^j$ *— деяке матричне* $\mathbb{Z}_p$*-зображення групи* H*. Якщо елементи* α, β, γ *групи* $M^{(n)}$ *задовольняються рівностям*

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\alpha) &= \alpha, \quad \Gamma_b(\alpha) = \alpha - \Lambda_{p,1}(\gamma), \\ \Gamma_b(\beta) &= \beta, \quad \Gamma_a(\beta) = \beta + \Lambda_{1,p}(\gamma), \end{aligned} \tag{3}$$

то $\{\nu_{ia+jb,ka+lb} \mid i,j,k,l \in \{0,1,\dots,p-1\}\}$*, де*

$$\nu_{ia+jb,ka+lb} = (i+k)'\alpha + (j+l)'\beta + (-(i+k)'\Lambda_{p,\overline{j+l}} + \Lambda_{k,j}\Gamma_b^l)(\gamma), \tag{4}$$

є системою факторів деякого розширення групи $M^{(n)}$ *за допомогою групи* H*, що визначається зображенням* Γ *групи* H*.*

Доведення. Нескладно показати, що якщо виконуються умови леми, то для довільних елементів u, v, w групи H справедлива рівність

$$\nu_{u+v,w} + \Gamma_w(\nu_{u,v}) = \nu_{u,v+w} + \nu_{v,w}.$$

Це означає, що $\{\nu_{u,v} \mid u,v \in H\}$, де $\nu_{u,v}$ визначено рівністю (4), є системою факторів деякого розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H, що визначається зображенням Γ групи H.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми* 1*. Тоді довільне розширення групи* $M^{(n)}$ *за допомогою групи* H*, що визначається зображенням* Γ *групи* H*, еквівалентне розширенню* $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\nu_{u,v}\})$*, де* $\{\nu_{u,v}\}$ *— система факторів вигляду* (4)*.*

Доведення. Припустимо, що G є деяким розширенням групи $M^{(n)}$ за допомогою групи $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, що визначається матричним зображенням $\Gamma : ia + jb \to \Gamma_a^i \Gamma_b^j$ групи H. Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — представники суміжних класів групи G за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають твірним елементам a і b групи H. Тоді для довільного елемента m із $M^{(n)}$

$$\Gamma_a(m) = -\bar{a} + m + \bar{a}, \qquad \Gamma_b(m) = -\bar{b} + m + \bar{b}.$$

Покладемо $\alpha = p\bar{a}$, $\beta = p\bar{b}$, $\gamma = -\bar{b} - \bar{a} + \bar{b} + \bar{a}$. Оскільки

$$p\left(\bar{a} + M^{(n)}\right) = M^{(n)}, \quad p\left(\bar{b} + M^{(n)}\right) = M^{(n)},$$

$$\left(\bar{a} + M^{(n)}\right) + \left(\bar{b} + M^{(n)}\right) = \left(\bar{b} + M^{(n)}\right) + \left(\bar{a} + M^{(n)}\right),$$

то α, β, γ є елементами підгрупи $M^{(n)}$ групи G.

Обчислимо

$$\Gamma_a(\alpha) = -\bar{a} + \alpha + \bar{a} = -\bar{a} + p\bar{a} + \bar{a} = p\bar{a} = \alpha,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_b(\alpha) = -\bar{b} + p\bar{a} + \bar{b} = p(-\bar{b} + \bar{a} + \bar{b}) = p(\bar{a} - \gamma) = \\ = p\bar{a} - \Gamma_a^{p-1}(\gamma) - \cdots - \Gamma_a^2(\gamma) - \Gamma_a(\gamma) - \gamma = \alpha - \Lambda_{p,1}(\gamma). \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\Gamma_b(\beta) = \beta, \quad \Gamma_a(\beta) = \beta + \Lambda_{1,p}(\gamma).$$

Отже, трійка елементів α, β, γ групи $M^{(n)}$ задовольняє рівностям (3).

Далі, розглянемо представники $i\bar{a}+j\bar{b}$ суміжних класів групи G за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають елементам $ia+jb$ групи H $(i,j=0,1,\ldots,p-1)$. Вибір цих представників задає систему факторів $\{\nu_{ia+jb,ka+lb}\}$ таку, що

$$(i\bar{a}+j\bar{b})+(k\bar{a}+l\bar{b})=\overline{i+k}\cdot\bar{a}+\overline{j+l}\cdot\bar{b}+\nu_{ia+jb,\,ka+lb}$$

$(i,j,k,l=0,1,\ldots,p-1)$. Нескладно показати, що ця система факторів є системою факторів вигляду (4). Лема доведена.

Із лем 1 та 2 випливає, що довільне розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою абелевої групи H типу (p,p) може бути задане $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H та трійкою елементів α, β, γ із $M^{(n)}$, які задовольняють рівностям (3). Тому надалі таке розширення будемо позначати просто через $G(\Gamma,\alpha,\beta,\gamma)$ і вважатимемо, що система факторів цього розширення є системою факторів вигляду (4). Із теорії розширень груп (див. [5, 6]) слідує, що розширення $G(\Gamma,\alpha,\beta,\gamma)$ та $G(\Gamma,\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma})$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли знайдуться такі елементи m_1 і m_2 групи $M^{(n)}$, що

$$\hat{\alpha}=\alpha+\Lambda_{p,1}(m_1),\quad \hat{\beta}=\beta+\Lambda_{1,p}(m_1),\quad \hat{\gamma}=\gamma+(E-\Gamma_b)(m_1)+(\Gamma_a-E)(m_2).$$

Для довільного $\mathbb{Z}_p$-зображення $\Gamma : h\to\Gamma_h$ степеня n абелевої групи $H = \langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$ типу (p,p) розглянемо підгрупи $A(M^{(n)},H,\Gamma)$, $B(M^{(n)},H,\Gamma)$ групи $M^{(3n)}$ вигляду

$$A(M^{(n)},H,\Gamma)=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in M^{(3n)}\mid \Gamma_a(\alpha)=\alpha,\ \Gamma_b(\alpha)=\alpha-\Lambda_{p,1}(\gamma),\\ \Gamma_b(\beta)=\beta,\ \Gamma_a(\beta)=\beta+\Lambda_{1,p})(\gamma)\},\tag{5}$$

$$B(M^{(n)},H,\Gamma)=\{(\Lambda_{p,1}(m_1),\Lambda_{1,p}(m_2),(E-\Gamma_b)(m_1)+(\Gamma_a-E)(m_2))\mid\\ m_1,m_2\in M^{(n)}\}.\tag{6}$$

Неважко бачити, що $B(M^{(n)},H,\Gamma)$ є підгрупою групи $A(M^{(n)},H,\Gamma)$.

Підсумувавши все вище сказане та використавши позначеннями (5)–(6), можна стверджувати, що будь-яке розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою абелевої групи H типу (p,p) може бути задане матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H та елементом (α,β,γ) групи $A(M^{(n)},H,\Gamma)$. Причому розширення $G(\Gamma,\alpha,\beta,\gamma)$ та $G(\Gamma,\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma})$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma})-(\alpha,\beta,\gamma)\in B(M^{(n)},H,\Gamma).$$

Лема 3. *Нехай $G_1=G(\Gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ та $G_2=G(\Gamma,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ — розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою абелевої групи $H=\langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$ типу (p,p), задані матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H та відповідно елементами $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ та $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ групи $A(M^{(n)},H,\Gamma)$. Групи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли знайдеться така матриця $C\in GL(n,\mathbb{Z}_p)$ і автоморфізм $\varphi\in\operatorname{Aut}H$ $(\varphi : a\to ia+jb,\ b\to ka+lb)$, що $C\Gamma_h=\Gamma_{\varphi(h)}C$ для довільного $h\in H$ і*

$$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)-(\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2,\tilde{\gamma}_2)\in B(M^{(n)},H,\Gamma),\tag{7}$$

де

$$\tilde{\alpha}_2 = C^{-1}\left(i\alpha_2 + j\beta_2 + \left(\sum_{r=1}^{p-1}\Lambda_{ri,\,j}\Gamma_b^{rj}\right)(\gamma_2)\right),$$

$$\tilde{\beta}_2 = C^{-1}\left(k\alpha_2 + l\beta_2 + \left(\sum_{r=1}^{p-1}\Lambda_{rk,\,l}\Gamma_b^{rl}\right)(\gamma_2)\right),$$

$$\tilde{\gamma}_2 = C^{-1}\left(\Lambda_{i,\,l}\Gamma_b^{j} - \Lambda_{k,\,j}\Gamma_b^{l}\right)(\gamma_2).$$

Доведення. Нехай групи $G_1 = G(\Gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ та $G_2 = G(\Gamma, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ізоморфні і ψ — ізоморфне відображення групи G_1 на G_2. Тоді з [2] (див. лему 1) випливає, що існують матриця $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ та автоморфізм φ групи H ($\varphi : a \to ia + jb,\ b \to ka + lb$), що $C\Gamma_h = \Gamma_{\varphi(h)}C$ для довільного елемента $h \in H$.

Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — представники суміжних класів групи G_2 за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають твірним елементам a і b групи H Розглянемо елементи $i\bar{a} + j\bar{b}$, $k\bar{a} + l\bar{b}$ групи G_2. Обчислимо

$$\tilde{\alpha}_2 = p(i\bar{a} + j\bar{b}) = i\alpha_2 + j\beta_2 + \left(\sum_{r=1}^{p-1}\Lambda_{ri,\,j}\Gamma_b^{rj}\right)(\gamma_2),$$

$$\tilde{\beta}_2 = p(k\bar{a} + l\bar{b}) = k\alpha_2 + l\beta_2 + \left(\sum_{r=1}^{p-1}\Lambda_{rk,\,l}\Gamma_b^{rl}\right)(\gamma_2),$$

$$\tilde{\gamma}_2 = -(k\bar{a} + l\bar{b}) - (i\bar{a} + j\bar{b}) + (k\bar{a} + l\bar{b}) + i\bar{a} + j\bar{b} = \left(\Lambda_{i,\,l}\Gamma_b^{j} - \Lambda_{k,\,j}\Gamma_b^{l}\right)(\gamma_2).$$

Оскільки $ia + jb$, $ka + lb$ є твірними елементами групи H, то групу G_2 можна записати у вигляді $G(\Gamma', \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2)$, де $\Gamma' : h \to \Gamma_{\varphi(h)}$ ($h \in H$). Отже, група $G_1 = G(\Gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ізоморфна групі $G_2 = G(\Gamma', \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2)$, причому ізоморфізм ψ переводить один в одного суміжні класи груп G_1 та G_2 за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають одному і тому ж елементу групи H. Оскільки $C^{-1}\Gamma'_h = \Gamma_h C^{-1}$ для довільного елемента $h \in H$, то з [2] (див. лему 2) випливає, що існує ізоморфізм груп

$$G_2 = G(\Gamma', \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2) \cong G(\Gamma, C^{-1}(\tilde{\alpha}_2), C^{-1}(\tilde{\beta}_2), C^{-1}(\tilde{\gamma}_2)) = G_3$$

такий, що знову переводить один в одного суміжні класи груп G_2 та G_3 за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають одному і тому ж елементу групи H. Отже, розширення $G(\Gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ та $G(\Gamma, C^{-1}(\tilde{\alpha}_2), C^{-1}(\tilde{\beta}_2), C^{-1}(\tilde{\gamma}_2))$ еквівалентні. Тобто

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) - (C^{-1}(\tilde{\alpha}_2), C^{-1}(\tilde{\beta}_2), C^{-1}(\tilde{\gamma}_2)) \in B(M^{(n)}, H, \Gamma).$$

Необхідність доведена.

Навпаки, нехай існують оборотна матриця C і автоморфізм φ групи H ($\varphi : a \to ia + jb$, $b \to ka + lb$), що $C\Gamma_h = \Gamma_{\varphi(h)}C$ для довільного $h \in H$ і для елементів $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in A(M^{(n)}, H, \Gamma)$ виконується умова (7). Припустимо, що $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ($\bar{\bar{a}}$ і $\bar{\bar{b}}$) є представниками суміжних класів групи $G_1 = G(\Gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ($G_2 = G(\Gamma, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$) за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідають елементам a і b групи H. Тоді нескладно показати, що відображення $\psi : G_1 \to G_2$, задане наступним чином

$$\psi(q\bar{a} + r\bar{b} + m) = (qi + rk)\bar{\bar{a}} + (qj + rl)\bar{\bar{b}} + C(m),$$

де $q,\ r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $m \in M^{(n)}$, є ізоморфізмом груп G_1 та G_2. Лема доведена.

До кінця роботи введемо наступні позначення: E — одинична матриця порядку $p-1$; $\tilde{\varepsilon}$ та $\langle 1\rangle$ — відповідно матриця порядку $p-1$ та $(p-1)\times 2$-матриця вигляду

$$\tilde{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \langle 1\rangle=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 — матричні $\mathbb{Z}_p$-зображення абелевої групи $H=\langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$ типу (p,p) вигляду

$$\Gamma_1 : a\to 1,\ b\to 1; \tag{8}$$

$$\Gamma_2 : a\to \tilde{\varepsilon},\ b\to E; \tag{9}$$

$$\Gamma_3 : a\to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ b\to \begin{pmatrix} E & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \tag{10}$$

$$\Gamma_4 : a\to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & 0\\ 0 & \tilde{\varepsilon}\end{pmatrix},\ b\to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & E\\ 0 & E\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Множина всіх неізоморфних черніковських p-груп, що є нерозщеплюваними розширеннями прямої суми скінченного числа екземплярів квазіциклічної p-групи $C_{p^\infty}=\langle c_0,c_1,\dots\rangle$ за допомогою абелевої групи $H = \langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$ типу (p,p) і які визначаються нерозкладними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, що містять не більше двох незвідних компонент, вичерпується наступними групами: $G_1=G(\Gamma_1,0,0,c_0)$, $G_2=G(\Gamma_2,0,0,\upsilon)$, $G_3=G(\Gamma_2,\omega,0,0)$, $G_4=G(\Gamma_4,\omega',0,0)$, $G_5=G(\Gamma_4,0,\omega',0)$, де $\upsilon=(c_0,0,0\dots,0)$, $\omega=(c_0,2c_0,3c_0,\dots,(p-1)c_0)$ — елементи групи $M^{(p-1)}$; $\omega'=(c_0,2c_0,\dots,(p-1)c_0,0,\dots,0)$ — елемент групи $M^{2(p-1)}$.*

Доведення. Нехай G — черніковська p-група, що є розширенням групи $M^{(n)}$ вигляду (1) за допомогою абелевої групи $H=\langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$ типу (p,p) і яка визначається нерозкладним матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ групи H, що містить не більше двох незвідних компонент. Тоді групу G можна записати у вигляді $G=G(\Gamma,\alpha,\beta,\gamma)$, де (α,β,γ) — деякий елемент групи $A(M^{(n)},H,\Gamma)$.

Із [8] слідує, що зображення Γ групи H узагальнено еквівалентне (див. [2] означення 1) одному із зображень (8)–(11). Тоді із [2] (лема 2) випливає, що група $G=G(\Gamma,\alpha,\beta,\gamma)$ ізоморфна групі вигляду $G(\Gamma',\alpha',\beta',\gamma')$, де $\Gamma'\in\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4\}$, причому, якщо $\Gamma''\in\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4\}$ і $\Gamma'\neq\Gamma''$, то групи $G(\Gamma',\alpha',\beta',\gamma')$ та $G(\Gamma'',\alpha'',\beta'',\gamma'')$ — не ізоморфні.

Далі, розглянемо окремо можливі випадки для зображення Γ'.

Нехай $\Gamma'=\Gamma_1$. Неважко бачити,

$$A(M^{(1)},H,\Gamma_1)/B(M^{(1)},H,\Gamma_1)=\langle (0,0,c_0)+B(M^{(1)},H,\Gamma_1)\rangle.$$

Звідси і леми 3 одразу одержуємо, що довільне нерозщеплюване розширення квазіциклічної p-групи $M^{(1)}=C_{p^\infty}$ за допомогою групи H, що визначається зображенням Γ_1 групи H, ізоморфне групі $G(\Gamma_1,0,0,c_0)$.

Нехай тепер $\Gamma' = \Gamma_2$. Нескладно обчислити, що

$$A(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2) = \big\{k\omega, pm, (\varepsilon - E)m + m') \mid m, m' \in M^{(p-1)}, \\ k \in \{0, 1, \ldots, p-1\},\ pm' = 0\big\},$$

$$B(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2) = \big\{0, pm, (\varepsilon - E)m) \mid m \in M^{(p-1)}\big\}.$$

Тому

$$A(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2)/B(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2) = \\ = \langle (0, 0, \upsilon) + B(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2)\rangle \oplus \langle (\omega, 0, 0) + B(M^{(p-1)}, H, \Gamma_2)\rangle.$$

Тоді знову таки ж за лемою 3 нерозщеплюване розширення вигляду $G(\Gamma_2, \alpha', \beta', \gamma')$ ізоморфне одній із груп $G(\Gamma_2, \omega, 0, 0)$ або $G(\Gamma_2, k\omega, 0, \upsilon)$, де $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Розглянемо автоморфізм $\varphi : a \to a+kb,\ b \to b$ групи H. Оскільки $(\Gamma_2)_h = (\Gamma_2)_{\varphi(h)}$ для довільно $h \in H$ і $k\omega = \sum_{r=1}^{p-1} \Lambda_{r,k}(\Gamma_2)_b^{rk}(\upsilon)$, то за лемою 3 одержимо, що для довільного $l \in \{1, \ldots, p-1\}$ група $G(\Gamma_2, l\omega, 0, \upsilon)$ ізоморфна групі $G(\Gamma_2, 0, 0, \upsilon)$. Неважко бачити, що група $G(\Gamma_2, \omega, 0, 0)$ не ізоморфна групі $G(\Gamma_2, 0, 0, \upsilon)$.

У випадку, коли $\Gamma' = \Gamma_3$, обчислюючи групи $A(M^{(p)}, H, \Gamma_3)$ та $B(M^{(p)}, H, \Gamma_3)$, одержимо, що

$$A(M^{(p)}, H, \Gamma_3) = B(M^{(p)}, H, \Gamma_3).$$

Це означає, що довільне розширення групи $M^{(p)}$ за допомогою групи H, яке визначається зображенням Γ_3 групи H, є розщеплюваним.

Нарешті розглянемо випадок, коли $\Gamma' = \Gamma_4$. Неважко бачити, що

$$A(M^{2(p-1)}, H, \Gamma_4)/B(M^{2(p-1)}, H, \Gamma_4) = \\ = \langle (\omega', 0, 0) + B(M^{2(p-1)}, H, \Gamma_4)\rangle \oplus \langle (0, \omega', 0) + B(M^{2(p-1)}, H, \Gamma_4)\rangle.$$

Тоді аналогічно як у попередньому випадку одержимо, що нерозщеплюване розширення вигляду $G(\Gamma_4, \alpha', \beta', \gamma')$ ізоморфне одній із груп $G(\Gamma_4, \omega', 0, 0)$ або $G(\Gamma_2, k\omega', \omega', 0)$, де $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Розглянемо автоморфізм $\varphi : a \to a,\ b \to a + (p-1)b$ групи H та матрицю

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E - \tilde{\varepsilon} & -E \end{pmatrix}.$$

Оскільки $C(\Gamma_4)_h = (\Gamma_4)_{\varphi(h)}C$ для довільно $h \in H$ і $C^{-1}(\omega') = \omega'$, то за лемою 3 група $G(\Gamma_4, \omega', \omega', 0)$ ізоморфна групі $G(\Gamma_4, \omega', 0, 0)$.

Далі, нехай $k \in \{2, 3, \ldots, p-1\}$. Покладемо

$$i \equiv (1-k)^{-1} \pmod p, \quad j \equiv 1 - i \pmod p, \quad \varphi : a \to ia + jb,\ b \to b,$$

$$\tilde{\xi}_j = E + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}^2 + \cdots + \tilde{\varepsilon}^{j-1}, \quad C = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E + (E - \tilde{\varepsilon})S \end{pmatrix},$$

де S — оборотна $\mathbb{Z}_p$-матриця порядку $p-1$, що задовольняє рівності

$$\tilde{\varepsilon}^i S + \tilde{\varepsilon}^i \tilde{\xi}_j = S\tilde{\varepsilon}.$$

Існування матриці S випливає з [9]. Оскільки φ є автоморфізмом групи H, $C(\Gamma_4)_h = (\Gamma_4)_{\varphi(h)}C$ для довільно $h \in H$ і $C^{-1}(ik\omega' + j\omega') = 0$, $C^{-1}(\omega') = \omega'$, то за лемою 3 група $G(\Gamma_4, k\omega', \omega', 0)$ ізоморфна групі $G(\Gamma_4, 0, \omega', 0)$.

На завершення доведення теореми, нескладно переконатися у тому, що групи $G(\Gamma_4, \omega', 0, 0)$ та $G(\Gamma_4, 0, \omega', 0)$ не ізоморфні.

Зауваження 1. *Для того, щоб одержати повний список неізоморфних черніковських p-груп, факторгрупа H яких за максимальною повною абелевою підгрупою є абелевою групою типу (p, p) і які визначаються нерозкладним матричними $\mathbb{Z}_p$-зображеннями групи H, що містять не більше двох незвідних компонент, потрібно до переліку груп, вказаному у теоремі* 1, *додати групи вигляду* $G(\Gamma_1, 0, 0, 0)$, $G(\Gamma_2, 0, 0, 0)$, $G(\Gamma_3, 0, 0, 0)$, $G(\Gamma_4, 0, 0, 0)$.

1. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6.– С. 742–753.
2. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.
3. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
4. *Шапочка И. В.* О p-группах Черникова, являющихся циклическими расширениями полных абелевых групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 136–139.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
6. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
7. *Гольфанд Ю. А.* Об изоморфизме между расширениями групп // Докл. АН СССР. Сер. мамем. – 1948. – Т. LX, №7. – С. 1123–1125.
8. *Дроботенко В. С.* О целочисленных представлениях примарных абелевых групп // В сб. "Алгебра и мат. логика". – К.: Киевский гос. ун-т, 1966. – С. 111–121.
9. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными кольцами. – Ужгород: Ужгородский нац. ун-т, 2003. – 119 с.