УДК 512.547.2

І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ГРУПИ КЛЕЙНА

In this paper, there was found the class of integral 2-adic matrix representations of the Klein four-group for which the generalized equivalence coincides with equivalence of matrix representations.

В даній статті вияснено, для яких цілочислових 2-адичних матричних зображень групи Клейна узагальнена еквівалентність співпадає з еквівалентністю матричних зображень.

В даній статті, використовуючи описані Л. О. Назаровою [1] нееквівалентні нерозкладні матричні цілочислові зображення групи Клейна $V = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ ($a^2 = e$, $b^2 = e$), виділено клас матричних зображень групи V, для яких узагальнена еквівалентність співпадає з еквівалентністю матричних зображень. Відзначимо, що із [2] слідує, що матричні цілочислові p-адичні зображення циклічної p-групи порядку p^r ($r \le 2$) узагальнено еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони є еквівалентними. Нагадаємо, матричні зображення $\Gamma\colon h \to \Gamma(h)$ і $\Delta\colon h \to \Delta(h)$ скінченної групи H степеня n над кільцем Z називаються узагальнено еквівалентними, якщо існує оборотна матриця $C \in GL(n, Z)$ і автоморфізм φ групи H такі, що $C^{-1}\Gamma(h)C = \Delta(\varphi(h))$ для довільного елемента $h \in H$. Очевидно, із еквівалентності матричних зображень скінченної групи H слідує їх узагальнена еквівалентність. Обернене твердження не завжди справедливе. Наприклад, зображення $\Gamma : a \to 1,\ b \to -1$ та $\Delta : a \to -1,\ b \to 1$ групи Клейна V над кільцем цілих раціональних чисел є узагальнено еквівалентними, але не є еквівалентними зображеннями.

Нехай надалі $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел. Введемо наступні позначення: E_n — одинична матриця порядку n; R_n, T_n — $n \times (n+1)$-матриці вигляду: $R_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \end{pmatrix}$, $T_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \end{pmatrix}$; U_n, V_n — матриці відповідно транспоновані до матриць T_n, R_n; $W_n = R_nU_n$; L_n — $2\times(n+1)$-матриця, K_n — $(n+1)\times 2$-матриця відповідно вигляду:

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Множина $\mathfrak{M}$ всіх нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень групи Клейна $V = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, для яких узагальнена еквівалентність співпадає з еквівалентністю матричних зображень, вичерпуються наступними зображеннями:*

$$\Upsilon_1 : a \to 1, \quad b \to 1;$$

$$\Upsilon_2^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & R_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_3^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & U_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_4: a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_5: a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_6^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_{n+1} & U_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_7^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & R_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_8: a \to \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & E_2 \\ 0 & -X \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_9: a \to \begin{pmatrix} X & L_1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & K_1' \\ 0 & -Y \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{10}: a \to \begin{pmatrix} Y & L_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} Y & K_1 \\ 0 & -X \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{11}: a \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & K_1' \\ 0 & Y & L_1' & L_1 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & Y & L_1 & L_1' \\ 0 & 0 & -E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{12}: a \to \begin{pmatrix} E_2 & 0 & K_1 & L_1 \\ 0 & -E_2 & K_1' & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_2 & 0 & K_1' & 0 \\ 0 & -E_2 & K_1 & K_1 \\ 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{13}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$
b \to \begin{pmatrix}
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\
0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n
\end{pmatrix};
$$

$$
\Upsilon_{14}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix}
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\
0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\
0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \\
0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1}
\end{pmatrix},
$$

$$
b \to \begin{pmatrix}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\
0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1}
\end{pmatrix};
$$

$$
\Upsilon_{15}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix}
E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\
0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\
0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X
\end{pmatrix},
$$

$$
b \to \begin{pmatrix}
E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & K_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X
\end{pmatrix};
$$

$$\Upsilon_{16}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Доведення теореми базується на приведеному в [1] списку всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи Клейна. Група $\operatorname{Aut} V$ автоморфізмів групи Клейна $V = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ізоморфна групі діедра 6-го порядку і породжується наступними автоморфізмами:

$$\nu : a \to b,\ b \to a; \qquad \mu : a \to b,\ b \to ab.$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що для кожного нерозкладного матричного зображення Γ групи Клейна із множини $\mathfrak{M}$ знайдуться такі оборотні матриці S і T, що

$$S^{-1}\Gamma(v)S = \Gamma(\nu(v)), \qquad T^{-1}\Gamma(v)T = \Gamma(\mu(v)),$$

для будь-якого елемента v групи V. Тоді для довільного автоморфізма $\varphi = \nu^i\mu^j$ групи V справедлива рівність

$$(T^jS^i)^{-1}\Gamma(v)T^jS^i = \Gamma(\varphi(v)), \quad v \in V.$$

Якщо ж нерозкладне матричне зображення $\Delta : v \to \Delta(v)$ групи V не належить множині $\mathfrak{M}$, то знайдеться автоморфізм φ групи V, що матричні зображення Δ та $\Delta_\varphi : v \to \Delta(\varphi(v))$ не є еквівалентними.

Як наслідок із теореми 1 одержуємо, що у випадку, коли матричні $\mathbb{Z}_2$-зображення Γ і Δ групи Клейна, що є сумою нерозкладних зображень із множини $\mathfrak{M}$, є узагальнено еквівалентним тоді і тільки тоді, коли вони є еквівалентними матричними зображеннями.

1. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140** № 5. – С. 1011–1014.
2. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 26. – С. 742–753.