УДК 515.146.3

І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ДРУГА ГРУПА КОГОМОЛОГІЙ ЧЕТВЕРНОЇ ГРУПИ КЛЕЙНА

(Присвячується пам'яті доцента В. П. Рудька)

The second cohomology groups $H^2(G, M)$ of Klein four-group G with coefficients in the indecomposable representation G-modules over a field of characteristic 2 has been found.

Знаходяться групи когомологій $H^2(G, M)$ четверної групи Клейна G із значеннями в модулях нерозкладних зображень групи G над полем характеристики 2.

Нехай A — група, M — адитивна група, що є A-модулем (тобто $\mathbb{Z}A$-модулем). 2-коциклом групи A із значеннями в модулі M називається відображення $f : A \times A \to M$, що задовольняє умови:

1) $f(x, y) = 0$, якщо x або y дорівнює одиниці e групи A;

2) $f(xy, z) = xf(y, z) - f(x, y) + f(x, yz)$ для довільних елементів x, y, $z \in A$.

Нехай $\varphi : A \to M$ — відображення таке, що $\varphi(e) = 0$. Відображення

$$f_\varphi : A \times A \to M,$$

таке, що

$$f_\varphi(x, y) = \varphi(xy) - x\varphi(y) - \varphi(x)$$

для довільних x, $y \in A$, є 2-коциклом групи A. Цей коцикл називається кограницею групи A. Множина $C^2(A, M)$ всіх 2-коциклів групи A є абелевою групу відносно операції додавання коциклів, визначеної звичайним чином. Множина $B^2(A, M)$ всіх кограниць групи A є підгрупою групи коциклів. Фактор-група

$$H^2(A, M) = C^2(A, M)/B^2(A, M)$$

називається другою групою когомологій групи A із значеннями в модулі M. Елементи групи когомологій будемо називати також класами коциклів.

Нехай $f \in C^2(A, M)$. Введемо у розгляд множину пар вигляду

$$V(M, A, f) = \{(m, a) \mid m \in M,\ a \in A\}$$

і визначимо операцію множення на цій множині за правилом

$$(m_1, a_1) \cdot (m_2, a_2) = (m_1 + a_1 m_2 + f(a_1, a_2), a_1 a_2),$$

де m_1, $m_2 \in M$, a_1, $a_2 \in A$. Неважко переконатися, що відносно цієї операції множина $V(M, A, f)$ є групою, а її підмножина M_e всіх пар вигляду (m, e), де $m \in M$, e —, нагадаємо, одиниця групи A, є нормальною підгрупою цієї групи. До того ж мають місце ізоморфізми груп

$$M_e \cong M, \qquad V(M, A, f)/M_e \cong A.$$

Отже, група $V(M, A, f)$ є розширенням групи M за допомогою групи A. Якщо 2-коцикли f_1 і f_2 лежать в одному класі коциклів, то групи $V(M, A, f_1)$ і $V(M, A, f_2)$ є ізоморфними, причому існує такий ізоморфізм цих груп, який є тотожним на спільний підгрупі M_e і індукує тотожний ізоморфізм відповідних фактор-груп. Цей ізоморфізм називається еквівалентністю розширень.

Нехай всюди надалі

$$G = \langle a,\ b \mid a^2 = e,\ b^2 = e,\ ab = ba\rangle$$

— четверна група Клейна, M — деякий G-модуль і $H^2(G, M)$ — друга група когомологій групи G із значеннями у модулі M.

Лема 1. *У будь-якому класі коциклів групи G (тобто елементі групи $H^2(G, M)$) міститъ 2-коцикл f такий, що $f(a, b) = 0$.*

Доведення. Нехай f_1 — довільний 2-коцикл із $C^2(G, M)$. Побудуємо відображення $\varphi : G \to M$ так, щоб $\varphi(e) = 0$ і

$$\varphi(ab) = a\varphi(b) + \varphi(b) - f_1(a, b).$$

Тоді, очевидно, відображення $f : G \times G \to M$ задане таким чином, що

$$f(x, y) = f_1(x, y) + \varphi(xy) - x\varphi(y) - \varphi(x),$$

де x, $y \in G$, є коциклом із $C^2(G, M)$ і $f(a, b) = 0$.

Лема 2. *Нехай $f \in C^2(G, M)$. Тоді для довільного елемента c четверної групи G*

$$(c - e)f(c, c) = 0.$$

Доведення. Маємо $c^2 = e$. Тоді $f(c^2, c) = f(c, c^2) = 0$ і

$$f(c^2, c) = cf(c, c) - f(c, c) + f(c, c^2),$$

звідки слідує доведення леми.

Лема 3. *Нехай f — такий 2-коцикл із $C^2(G, M)$, що $f(a, b) = 0$. Тоді*

1) $f(ab, a) = bf(a, a) - f(b, a)$,

2) $f(ab, b) = af(b, b)$,

3) $f(ab, ab) = f(a, a) + f(b, b) + af(b, a)$,

4) $f(b, ab) = af(b, b) + f(b, a)$,

5) $f(a, ab) = f(a, a)$.

Доведення. За означенням 2-коциклу

$$f(ba, b) = bf(a, a) - f(b, a) + f(b, a^2).$$

Оскільки $ab = ba$, $a^2 = e$, то з останньої рівності очевидним чином слідує доведення першої рівності леми. Далі

$$f(ab, b) = af(b, b) - f(a, b) + f(a, b^2),$$

звідки слідує рівність 2). Продовжуючи міркування аналогічним чином і використовуючи рівність 2) із наступної рівності

$$f(ba,b) = bf(a,b) - f(b,a) + f(b,ab),$$

одержимо доведення рівності 4). Далі

$$f(a^2,b) = af(a,b) - f(a,a) + f(a,ab),$$

звідки слідує рівність 5). Нарешті, із врахуванням рівності 4) і рівності

$$f(ab,ab) = af(b,ab) - f(a,b) + f(a,ab^2)$$

одержимо рівність 3).

Лема 4. *Нехай виконуються умови леми 3. Тоді*

1) $(a+e)f(b,a) = (b-e)f(a,a)$,

2) $(b+e)f(b,a) = (e-a)f(b,b)$.

Доведення. За означенням 2-коциклу

$$f(ab,a) = af(b,a) - f(a,b) + f(a,ab) = af(b,a) + f(a,ab) = af(b,a) + f(a,a),$$

$$f(ba,a) = bf(a,a) - f(b,a) + f(b,a^2) = bf(a,a) - f(b,a).$$

Із рівності лівих частини слідує рівність правих:

$$af(b,a) + f(a,a) = bf(a,a) - f(b,a).$$

Як наслідок одержуємо рівність 1) леми, що доводиться. Далі

$$f(a,a) = f(ab^2,a) = abf(b,a) - f(ab,b) + f(ab,ba) =$$

$$= abf(b,a) - af(b,b) + f(a,a) + f(b,b) + af(b,a).$$

Тому

$$(ab+a)f(b,a) = (a-e)f(b,b).$$

Помноживши ліву і праву частини рівності на a, ми одержимо рівність 2) леми. Лема доведена.

Для деякого фіксованого елемента g четверної групи G введемо у розгляд множини:

$$M_1(g) = \{m \mid m \in M,\ (g-e)m = 0\}, \qquad M_2(g) = (g+e)M.$$

Також введемо наступні позначення:

$$A(M) = \{m \mid m \in M,\ (a+e)m = (b+e)m = 0\},$$

$$B(M) = \{(a-e)m - (b-e)n \mid m,\ n \in M,\ (b+e)n = (a+e)m = 0\}.$$

Легко бачити, що всі ці множини є G-підмодулями модуля M і, що

$$M_2(g) \subset M_1(g), \qquad B(M) \subset A(M).$$

Нехай

$$\mathfrak{A}(M) = \{(x, y, z) \mid x \in M_1(a),\ y \in M_1(b),\ z \in M,\\ (a+e)z = (e-b)x,\ (b+e)z = (a-e)y\},$$

$$\mathfrak{B}(M) = \{((a+e)m, (b+e)n, (a-e)n - (b-e)m) \mid m,\ n \in M\}.$$

Нескладно переконатися у тому, що множини $\mathfrak{A}(M)$ та $\mathfrak{B}(M)$ є підмодулями тривіально визначеного G-модуля $M^{(3)} = M \times M \times M$, причому $\mathfrak{B}(M) \subset \mathfrak{A}(M)$.

Теорема 1. *Група $H^2(G, M)$ ізоморфна фактор-групі $\mathfrak{A}(M)/\mathfrak{B}(M)$.*

Доведення. Будемо розглядати лише такі 2-коцикли $f \in C^2(G, M)$, що $f(a, b) = 0$. Із лем 1–3 випливає, що всі значення 2-коцикла f виражаються через три значення

$$x = f(a, a), \qquad y = f(b, b), \qquad z = f(b, a),$$

які до того ж утворюють трійку (x, y, z), що є елементом із $\mathfrak{A}(M)$. Нехай f' — інший 2-коцикл того ж класу, що і f, а (x', y', z') — відповідна 2-коциклу f' трійка. Тоді $f' = f + f_\varphi$ для деякої кограниці $f_\varphi \in B^2(G, M)$ і

$$x' = x + (a+e)m, \quad m = \varphi(a), \qquad y' = y + (b+e)n, \quad n = \varphi(b),$$

$$z' = z + \varphi(ba) - b\varphi(a) - \varphi(b) = z + (a-e)n - (b-e)m.$$

Отже, $(x', y', z') - (x, y, z) \in \mathfrak{B}(M)$, що доводить теорему.

Наслідок 1. *Якщо $M_1(a) = M_2(a)$, $M_1(b) = M_2(b)$, то у кожному класі коциклів міститься 2-коцикл, що задовольняє умовам:*

$$f(a, a) = f(b, b) = f(a, b) = 0, \quad f(b, a) \in A(M).$$

При цьому $f(b, a)$ може приймати довільне значення із групи $A(M)$. 2-коцикли f_1, f_2, що задовольняють вказаним умовам, лежать в одному класі тоді і тільки тоді, коли $f_1(b, a) - f_2(b, a) \in B(M)$.

Наслідок 2. *Якщо $M_1(a) = M_2(a)$, $M_1(b) = M_2(b)$, то група $H^2(G, M)$ ізоморфна фактор-групі $A(M)/B(M)$.*

Доведення. Збережемо позначення введені у доведенні теореми 1. Із умов $M_1(a) = M_2(a)$, $M_1(b) = M_2(b)$ слідує, що трійка (x, y, z) за модулем $\mathfrak{B}(M)$ дорівнює трійці вигляду $(0, 0, z')$ для деякого $z' \in A(M)$. Дві трійки $(0, 0, z_1)$, $(0, 0, z_2)$ із $\mathfrak{A}(M)$ лежать в одному суміжному класі за підмодулем $\mathfrak{B}(M)$ тоді і тільки тоді, коли $z_1 - z_2 \in B(M)$, що доводить обидва наслідки.

Розглянемо будову другої групи когомологій $H^2(G, M)$ четверної групи G у випадку, коли M є модулем деякого нерозкладного зображення групи G над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих раціональних чисел. Зазначимо, що всі нерозкладні матричні $\mathbb{Z}$-зображення групи G знайдено Л. О. Назаровою [1]. Група G має наступне нерозкладне матричне $\mathbb{Z}$-зображення

$$\Psi^{(k)}_{u(x)} : a \to \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \Phi(u(x)) \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

де k — деяке натуральне число, E — одинична матриця порядку k, $\Phi(u(x))$ — матриця порядку k із 0 і 1, яка за модулем 2 є нерозкладною кліткою Фробеніуса, що відповідає многочлену $u(x)$ над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ з двох елементів. Відмітимо також, що символ 0, як у згаданих вище, так і приведених нижче матрицях, використовується для позначення нульових матриць відповідних розмірів. За модуль M зображення $\Psi^{(k)}_{u(x)}$ візьмемо модуль $4n$-вимірних векторів над $\mathbb{Z}$:

$$M = \mathbb{Z}^{4n} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}^n,\ j = 1, 2, 3, 4\},$$

в якому дія операторів із групи G задається множенням матриць:

$$a(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \Psi^{(k)}_{u(x)}(a) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3, -\alpha_4),$$

$$b(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \Psi^{(k)}_{u(x)}(b) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1 + \Phi(u(x))\alpha_4^T, -\alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_4).$$

Нескладні підрахунки показують, що

$$\begin{aligned} M_1(a) = \{(\alpha_1, \alpha_2, 0, 2\alpha_2) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}^n\} = \\ = M_2(a) = \{(2\alpha_1' + \alpha_3', \alpha_4', 0, 2\alpha_4') \mid \alpha_3',\ \alpha_4' \in \mathbb{Z}^n\}, \end{aligned}$$

$$M_1(b) = \{(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, 0) \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}^n\} = M_2(b).$$

Таким чином справджуються умови наслідків 1–2. Неважко показати, що

$$A(M) = \{(0, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n\}, \qquad B(M) = 2A(M).$$

Звідси, як наслідок, слідує наступний результат.

Твердження 1. *Друга група когомологій $H^2(G, \mathbb{Z}^{4n})$ четверної групи G із значеннями у модулі $\mathbb{Z}^{4n}$ нерозкладного матричного зображення $\Psi^{(k)}_{u(x)}$ ізоморфна групі $\mathbb{F}_2^n$ всіх n-вимірних векторів над полем $\mathbb{F}_2$.*

В. А. Башев [2] знайшов всі нерозкладні матричні зображення четверної групи G над полем F характеристики 2. Назвемо два точних F-зображення Γ_1 і Γ_2 степеня k групи G спряженими, якщо спряжені підгрупи $\Gamma_1(G)$ і $\Gamma_2(G)$ в групі $\mathrm{GL}(k, F)$. Результати В. А. Башева можна перефразувати у наступний спосіб.

З точністю до спряженості всі нерозкладні точні зображення четверної групи G над полем F характеристики 2 (окрім регулярного) містяться серед наступних трьох серій:

$$\Delta_k : a \to \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_k : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{k,\Phi} : a \to \begin{pmatrix} E & \Phi \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця порядку k, Φ — невироджена матриця порядку k, що є нерозкладною кліткою Фробеніуса.

Нехай Γ — матричне F-зображення степеня k четверної групи G. В якості модуля зображення Γ візьмемо k-вимірний векторний простір F^k. Якщо $g \in G$ і $x \in F^k$, то gx є k-вимірним вектором, що є результатом добутку $\Gamma(g)x^T$ матриці $\Gamma(g)$ на стовпець x^T. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — канонічний базис векторного простору F^k.

Теорема 2. *Наступна таблиця представляє зв'язок між нерозкладним матричним зображенням Γ четверної групи $G = \langle a, b\rangle$ над полем F характеристики 2, модулем M, що є модулем зображення Γ, другою групою когомологій $H^2(G, M)$ групи G із значеннями у модулі M і значеннями одного довільного 2-коцикла f (такого, що $f(a, b) = 0$) із класу коциклів:*

Γ	M	$f(a,a)$	$f(b,b)$	$f(b,a)$	$H^2(G,M)$
Δ_1	F^3	αe_3	βe_2	$\alpha e_2 + \beta e_3$	F^2
Δ_2	F^5	αe_5	αe_3	αe_4	F
Δ_k $(k > 2)$	F^{2k+1}	0	0	$\alpha_1 e_2 + \cdots + \alpha_{k-2} e_{k-1}$	F^{k-2}
Λ_k	F^{2k+1}	αe_1	βe_n	$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{k+1} e_{k+1}$	F^{k+3}
$\Theta_{k,\Phi}$	F^{2k}	0	0	$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k$	F^k

α, α_j, β — деякі елементи поля F.

Доведення. Із коментара, що передує теоремі, одразу слідує що друга графа таблиці однозначно визначається першою. Шоста графа таблиці є наслідком теореми 1 і попередніх трьох граф. Тому для доведення теореми необхідно знайти всі 2-коцикли у кожному випадку. За лемою 1 для цього досить обмежитися 2-коциклами f такими, що $f(a, b) = 0$. Враховуючи лему 3 досить вказати лише три значення 2-коцикла: $f(a, a)$, $f(b, b)$, $f(b, a)$. Розглянемо окремо випадки.

Випадок $\Gamma = \Theta_{k,\Phi}$. За модуль зображення $\Theta_{k,\Phi}$ беремо $M = F^{2k} = F^k \dotplus F^k$. Нехай $x = (x_1, x_2) \in M$, де x_1, $x_2 \in F^k$. Тоді

$$(a + e)x = (\Phi x_2^T, 0), \qquad (b + e)x = (x_2, 0).$$

Звідси слідує, що

$$M_1(a) = M_2(a) = M_1(b) = M_2(b) = \{(x, 0) \mid x \in F^k\} = A(M).$$

Окрім цього, $B(M) = 0$ і можна застосувати наслідки 1–2, що доводить теорему у випадку, який розглядається.

Випадок $\Gamma = \Lambda_k$. За модуль зображення Λ_k беремо $M = F^{2k+1} = F^{k+1} \dotplus F^k$. Нехай $(x, y) \in M$, де

$$x \in F^{k+1}, \qquad y = y_1 e_{k+2} + y_2 e_{k+3} + \cdots + y_k e_{2k+1}$$

для деяких y_1, y_2, $\ldots$, $y_k \in F$. Тоді

$(a+e)(x,y) = y_1e_2 + y_2e_3 + \cdots + y_ke_{k+1}, \quad (b+e)(x,y) = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ke_k.$

Звідси випливає, що

$$M_1(a) = M_1(b) = \{(x,0) \mid x \in F^{k+1}\},$$

$$M_2(a) = \{y_1e_2 + y_2e_3 + \cdots + y_ke_{k+1} \mid y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k \in F\},$$
$$M_2(b) = \{y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ke_k \mid y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k \in F\}.$$

Підкреслимо, що

$$M_1(a) = \alpha e_1 + M_2(a), \quad M_1(b) = \beta e_{k+1} + M_2(b)$$

для деяких елементів α, β поля F. Це означає, що перші дві компоненти трійки $(f(a,a), f(b,b), f(b,a))$ із $\mathfrak{A}(M)$ за модулем $\mathfrak{B}(M)$ є такими, як вказано у таблиці. Далі, оскільки

$$(a+e)f(b,a) = (b-e)f(a,a) = 0, \quad (b+e)f(b,a) = (e-a)f(b,b) = 0,$$

то і $f(b,a)$ є таким, як вказано у таблиці у відповідному рядку. Нескладно перевірити, що, якщо перші дві компоненти цієї трійки з $\mathfrak{B}(M)$ є нульовими, то нульовою буде і третя компонента цієї трійки. Отже, теорема доведена у цьому випадку.

Випадок $\Gamma = \Delta_k$. У цьому випадку $M = F^{2k+1} = F^k \dotplus F^{k+1}$. Аналогічно попереднім випадкам обчислюємо

$$M_2(a) = M_2(b) = \{(x,0) \mid x \in F^k\},$$

$$M_1(a) = \alpha e_{2k+1} + M_2(a), \quad M_1(b) = \beta e_{k+1} + M_2(b)$$

для деяких елементів α, β поля F. Отже, можна вважати, що

$$f(a,a) = \alpha e_{2k+1}, \qquad f(b,b) = \beta e_{k+1}.$$

Нехай, при цьому

$$f(b,a) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{k+1}),$$

де x_i, $y_j \in F$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, k+1$. Тоді

$$(a+e)f(b,a) = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0), \quad (b+e)f(b,a) = (y_2, \ldots, y_{k+1}, 0, \ldots 0).$$

Далі,

$$(e-a)f(b,b) = \beta e_1, \quad (b-e)f(a,a) = \alpha e_k.$$

Якщо $k > 2$, то

$$y_1 = \ldots = y_{k-1} = 0, \quad y_k = \alpha, \quad y_2 = \beta, \quad y_3 = \ldots = y_{k+1} = 0,$$

тобто $y_1 = \ldots = y_{k+1} = \alpha = \beta = 0$, а отже, $f(b,a) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$. Нехай m, n — такі елементи із M, що $(a+e)m = (b+e)n = 0$. Тоді

$$(a-e)n - (b-e)m = \gamma e_1 + \delta e_n$$

для деяких елементів γ, δ поля F. Взявши $\gamma = x_1$, $\delta = x_k$, одержимо

$$f(b,a) + (a-e)n - (b-e)m = x_2e_2 + \cdots + x_{k-1}e_{k-1}.$$

Це означає, що у кожному класі коциклів міститься тільки один 2-коцикл, що вказується у таблиці у випадку $k > 2$.

Нехай $k = 2$. Тоді $y_1 = 0$, $y_2 = \alpha = \beta$, $y_3 = 0$ і

$$f(b,a) + (a-e)n - (b-e)m = (0,0,0,\alpha,0).$$

Нехай $k = 1$. Тоді

$$M_1(a) = \{(x_1, 0, y_2)\,|x_1, y_2 \in F\}, \quad M_1(b) = \{(x_1, y_1, 0)\,|x_1, y_1 \in F\},$$

$$M_2(a) = M_2(b) = \{(x_1, 0, 0)\,|x_1 \in F\}.$$

Можна вважати, що

$$f(a,a) = (0,0,\alpha), \qquad f(b,b) = (0,\beta,0).$$

Якщо $f(b,a) = (z_1, z_2, z_3)$, то із рівностей

$$(a+e)f(b,a) = (z_2, 0, 0), \quad (b-e)f(a,a) = (\alpha, 0, 0),$$

$$(b+e)f(b,a) = (z_3, 0, 0), \quad (e-a)f(b,b) = (\beta, 0, 0)$$

і леми 4 слідує, що $f(b,a) = (z_1, \alpha, \beta)$. Аналогічно попереднім випадкам легко вказати елементи m, n із M, що $(a+e)m = (b+e)n = 0$, а

$$f(b,a) + (a-e)n - (b-e)m = (0, \alpha, \beta).$$

Теорема доведена.

1. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 5. – С. 1011–1014.
2. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015–1018.