МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"

Ф.Е. Гече

АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІЙ ТА СИНТЕЗ ЛОГІЧНИХ СХЕМ У НЕЙРОБАЗИСІ

Ужгород – 2010

УДК 681.14 : 517.11
ББК 32.37
М42

Г е ч е Ф. Е. **Аналіз дискретних функцій та синтез логічних схем у нейробазисі:** Монографія. – Ужгород: Ужгородський національний університет, 2010. – 209 с.

Монографія присвячена дослідженню реалізованості дискретних функцій одним нейронним елементом, методам синтезу нейронних елементів, а також синтезу логічних схем із цих елементів. Особлива увага приділяється вивченню нових властивостей нейрофункцій. На основі матриць толерантності отримано ряд необхідних і достатніх умов реалізованості функцій алгебри логіки одним нейроелементом. Розроблено метод синтезу нейромереж для розпізнавання дискретних сигналів та зображень. Наводиться метод представлення дискретних зображень у нейробазисі, що забезпечує виділення інформативних ознак зображень, необхідних для побудови розпізнавальних схем.

Розраховано на студентів, інженерів, аспірантів, викладачів і наукових співробітників кібернетичних спеціальностей.

Рецензенти:
П.М. Гудивок – доктор фізико-математичних наук, професор,
Й.Г. Головач – доктор технічних наук, професор.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного університету (протокол №9 від 23.09.2010)

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні 10-15 років можна назвати періодом стрімкого розвитку технічних засобів та інформаційних технологій, що призвело до різкого зростання об'єму інформації, складності задач і до точності аналізу даних. У зв'язку з цим спостерігається підвищений інтерес до нейромереж, які знайшли застосування у різних галузях людської діяльності — розпізнаванні образів, прогнозуванні, бізнесі, медицині, техніці [1-10]. Ефективне застосування нейромереж для розв'язування практичних задач у сферах:

- космонавтики — для побудови систем автоматичного пілотування літаків, імітації польоту, обробки аерокосмічної інформації;
- машинобудування — для проектування автоматичних систем керування;
- військової справи — для керування зброєю, виділення та розпізнавання об'єктів, обробки звукових, радіолокаційних і телевізійних зображень;
- фінансової справи — для аналізу кредитних потоків, загального фінансового аналізу;
- передачі даних — для стиснення даних, класифікації звукових та дискретних сигналів

стане можливим, якщо будуть розроблені практично придатні методи синтезу одного нейроелемента та синтезу логічних схем із них. Отже, розробка нових методів синтезу нейроелементів і нейромереж є актуальною і практично важливою задачею.

Метою монографії є систематизація та розробка нових методів перевірки реалізованості дискретних функцій одним нейроелементом, синтезу нейроелементів, встановлення нових властивостей нейрофункцій і синтезу логічних схем із нейроелементів для обробки дискретних сигналів і зображень. Основні результати монографії частково опубліковані у працях [11-42].

Монографія складається з п'яти розділів.

У першому розділі вивчаються властивості матриць толерантності і на їх основі встановлюються нові критерії реалізованості функцій алгебри логіки одним нейронним елементом (НЕ) з пороговою функцією активації. У цьому ж розділі наводиться алгоритм синтезу оптимального цілочислового НЕ.

У другому розділі розглядаються такі перетворення в спектральній області бульових функцій, які дозволяють встановити реалізованість функцій алгебри логіки комбінаційною схемою з одного НЕ та суматорів за mod 2. Показано, що існує підклас бульових нейрофункцій, елементи якого утворюють стандартний базис певного групового кільця.

У третьому розділі досліджуються нейроелементи з узагальненою пороговою функцією активації і наводяться методи їх синтезу. Розглядаються також двопорогові нейроелементи і встановлено умови реалізованості бульових функцій на таких елементах.

У четвертому розділі розроблено спектральний метод синтезу багатозначного нейроелемента над скінченним полем Галуа та синтез комбінаційних схем із них. Встановлено критерій реалізованості дискретних функцій одним багатозначним нейроелементом. Описано інваріантні операції над дискретними нейрофункціями.

У п'ятому розділі розроблено метод синтезу нейромережевих схем для розпізнавання дискретних зображень і сигналів. Досліджується ефективність функціонування побудованої схеми. У цьому ж розділі розроблено метод представлення двовимірних та багатовимірних зображень у нейробазисі.

Автор висловлює щиру подяку Коцовському В.М. за ряд цінних порад та допомогу у підготовці роботи до друку.

РОЗДІЛ 1
МАТРИЦІ ТОЛЕРАНТНОСТІ ТА БУЛЬОВІ НЕЙРОФУНКЦІЇ

У цьому розділі вводиться поняття матриць толерантності і вивчаються їх основні властивості. Встановлено критерій зображення підмножин бульових векторів матрицями толерантності. Наведені критерій і ряд необхідних і достатніх умов реалізованості бульових функцій одним нейронним елементом, розроблено метод синтезу оптимального цілочислового нейронного елемента (НЕ) з пороговою функцією активації.

1.1. Матриці толерантності та їх основні властивості

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ і $\mathbb{Z}_2^n$ — n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$. Визначимо на множині $\mathbb{Z}_2^n$ відношення толерантності τ так: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\tau(\beta_1, \dots \beta_n) \Leftrightarrow \exists i(\alpha_i = \beta_i)$. Класом толерантності відносно τ називається максимальна підмножина множини $\mathbb{Z}_2^n$, елементи якої попарно толерантні. Множину, яка складається з усіх класів толерантності відносно τ, позначимо через M_τ. Складемо найрізноманітніші матриці, рядками яких будуть n-вимірні бульові вектори, які є елементами класу толерантності $N \in M_\tau$, тобто $N \to N_\xi$ — матриця, нумерація рядків у якій визначається елементом ξ симетричної групи S_m, де $m = |N|$ — кількість елементів класу N. Нехай $S(N)$ — множина всіх матриць, побудованих із елементів класу толерантності N і $M = \bigcup\limits_{N \in M_\tau} S(N)$. Елементи множини M назвемо матрицями толерантності відношення τ. Якщо $N \in M_\tau$, то $|N| = 2^{n-1}$. Дійсно, якщо $N \in M_\tau$, то для довільного $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N$ має місце $(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n) \notin N$, де $\overline{\alpha}_i$ — інвертоване значення α_i.

Нехай Ω_n — множина всіх n-вимірних дійсних векторів $\mathbf{w}$, таких, що для всіх різних $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}_2^n$ числа $(\mathbf{x}_1, \mathbf{w})$ і $(\mathbf{x}_2, \mathbf{w})$ різні ($(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})$ — скалярний добуток векторів $\mathbf{x}_i, \mathbf{w}$).

Нехай $c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$, розташовані у порядку спадання, зважені суми $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{w})$ при фіксованому $\mathbf{w} \in \Omega_n$ для всіх наборів $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$ і $\mathbf{c}_\mathbf{w} = (c_1, c_2 \dots, c_{2^n})$. Кожній матриці толерантності $N = (\alpha_{ij})$ поставимо у відповідність матрицю $N^* = (\alpha_{sj})$ наступним чином: $s = 2^{n-1} - i + 1$ і $\alpha_{sj} = \overline{\alpha}_{ij}$. Визначимо над матрицями толерантності N і N^* операцію $\square$ так: $N \,\square\, N^* = \begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix}$.

Теорема 1.1. *Якщо* $\mathbf{w} \in \Omega_n$ *і* $Z_{\mathbf{w}}$ *матриця над* $\mathbb{Z}_2$ *розміром* $2^n \times n$*, що задовольняє умову*

$$Z_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T, \tag{1.1}$$

тоді в множині матриць толерантності M *знайдеться така матриця* $L_{\mathbf{w}}$*, що* $Z_{\mathbf{w}} = L_{\mathbf{w}} \square L_{\mathbf{w}}^*$ *(*$\cdot, T$ *— відповідно операції матричного множення та транспонування матриць).*

Доведення. З означення множини Ω_n випливає, що для кожного $\mathbf{w} \in \Omega_n$ можна побудувати матрицю $Z_{\mathbf{w}}$ розміру $2^n \times n$ на множині $\mathbb{Z}_2$, яка задовольняє умову (1.1). Матрицю, яка складається з перших 2^{n-1} рядків матриці $Z_{\mathbf{w}}$, позначимо через $L_{\mathbf{w}}$. Покажемо, що вектори $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ одночасно не можуть бути рядками матриці $L_{\mathbf{w}}$. Якщо припускати протилежне, тоді числа $c_p = (\mathbf{a}, \mathbf{w})$ і $c_q = (\overline{\mathbf{a}}, \mathbf{w})$ належать множині $\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_{\mathbf{w}})\}$, де $m(L_{\mathbf{w}})$ — сукупність бульових векторів, які утворені з усіх рядків матриці $L_{\mathbf{w}}$. Отже, $p, q \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$. Нехай $c_p > c_q$ і $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$. Тоді $c_q = (\mathbf{y}, \mathbf{w}) - c_p$ і, враховуючи (1.1), маємо:

$$q = 2^n - p + 1. \tag{1.2}$$

Отже, якщо $p \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, то $q \notin \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, а це суперечить умові $p, q \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$. Таким чином, наше припущення невірне, тобто $L_{\mathbf{w}} \in M$.

Якщо c_p пробігає множину $\{c_1, c_2, \ldots, c_{2^{n-1}}\}$, то згідно з (1.2) $c_q \in \{c_{2^{n-1}+1}, \ldots, c_{2^n}\}$. Отже, $Z_{\mathbf{w}} = L_{\mathbf{w}} \square L_{\mathbf{w}}^*$.

Нехай $\mathbf{w}$ — фіксований вектор множини Ω_n і $\rho(\mathbf{w})$ — упорядкована множина n-вимірних бульових векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_{2^n}$ таких, що $(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}) > (\mathbf{x}_j, \mathbf{w})$, якщо $i < j$. Очевидно, що ρ на множині Ω_n індукує відношення еквівалентності: $\mathbf{w} \sim \mathbf{v} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{v})$. Класи еквівалентності множини Ω_n, які породжені відношенням ρ, позначимо через Ω_n^i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Нехай $\mathbf{w}_i \in \Omega_n^i$ і відображення ψ кожному класу Ω_n^i однозначно ставить у відповідність матрицю толерантності $L_{\mathbf{w}_i}$, що задовольняє умову $(L_{\mathbf{w}_i} \square L_{\mathbf{w}_i}^*) \cdot \mathbf{w}_i^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_i}^T$. Тоді на основі теореми 1.1 відображення ψ задає бієктивне відображення $\{\Omega_n^i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ на множину $E_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_{\mathbf{w}}$. Отже, за допомогою матриць толерантності з E_n однозначно можна відновити представників $\mathbf{w}_i$ класів еквівалентності $\Omega_n^i \subset \Omega_n$.

Множина $\mathbb{Z}_2^n$ утворює абелеву групу відносно операції покомпонентного додавання за mod 2. Розглянемо ізоморфну до неї абелеву групу $G_n =$

$\{((-1)^{x_1}, \ldots, (-1)^{x_n}) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \in \mathbb{Z}_2^n\}$ відносно операції покомпонентного множення і визначимо дії групи G_n на множинах Ω_n і E_n так: якщо $\mathbf{g} = = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G_n$ і $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$, $L = (\alpha_{ij}) \in E_n$, тоді $\mathbf{gw} = (\gamma_1\omega_1, \ldots, \gamma_n\omega_n)$, а $\mathbf{g}L = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$, коли $\gamma_j = 1$ і $\beta_{ij} = \overline{\alpha}_{ij}$, коли $\gamma_j = -1$.

Результат дії елемента $\sigma \in S_n$ на $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \in \Omega_n$ і $L = (\alpha_{ij}) \in E_n$ визначимо наступним чином: $\mathbf{w}^\sigma = = (\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(n)})$, $L^\sigma = (\alpha_{i\sigma(j)})$.

Нехай $\Omega_n^- = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n \mid 0 > \omega_1 > \ldots > \omega_n\}$, $E_n^- = = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n^-} L_\mathbf{w}$ і $E'_n = \{(\mathbf{g}L)^\sigma \mid L \in E_n^-,\ \mathbf{g} \in G_n, \sigma \in S_n\}$.

Теорема 1.2. *Множина E'_n співпадає із множиною матриць толерантності E_n.*

Доведення. Нехай $\mathbf{w}$ — довільний вектор множини Ω_n і $L_\mathbf{w} = (\alpha_{ij})$ така матриця толерантності з E_n, що

$$\tilde{L}_\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T, \tag{1.3}$$

де $\tilde{L}_\mathbf{w} = L_\mathbf{w} \,\square\, L_\mathbf{w}^*$. Покажемо, що $L_\mathbf{w}$ належить множині E'_n. Нехай усі координати вектора $\mathbf{w}$ від'ємні. Тоді для $\mathbf{w}$ можна вказати такий $\sigma \in S_n$, що $\mathbf{w}^\sigma = \mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Множина E_n^- містить матрицю $N_{\mathbf{w}_1}$, таку, що $\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T$. Отже,

$$\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{w}^\sigma)^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T \tag{1.4}$$

З (1.3) і (1.4) маємо: $L_\mathbf{w} = N_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \in E'_n$.

Розглянемо випадок, коли хоча б одна координата вектора $\mathbf{w} \in \Omega_n$ додатна. Тоді для $\mathbf{w}$ знайдеться такий елемент $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in G_n$ і $\sigma \in S_n$, що $(\mathbf{gw})^\sigma = \mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Нехай $c'_r = \sum\limits_{i=1}^n (\omega_i\gamma_i)\alpha_{ri}$, $c_r = \sum\limits_{i=1}^n \omega_i(\gamma_i\alpha_{ri})$ і $\delta : c'_r \to c_r$. Відображення δ задає монотонний ізоморфізм між упорядкованими множинами $\mathbf{c}'_\mathbf{w} = (c'_1, \ldots, c'_{2^n})$ і $\mathbf{c}_\mathbf{w} = (c_1, \ldots, c_{2^n})$. Це означає, що

$$\mathbf{c}'_\mathbf{w}{}^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot ((\mathbf{gw})^\sigma)^T = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \cdot (\mathbf{gw})^T \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} (\mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T$$

і $L_\mathbf{w} = \mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1}^{\sigma^{-1}} \in E'_n$. Отже, $E_n \subset E'_n$.

Доведемо зараз обернене включення. Нехай $\mathbf{w}_1$ — довільний вектор множини Ω_n^- і $N_{\mathbf{w}_1}$ — матриця множини E_n^-, яка задовольняє умову $\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot \mathbf{w}_1^T =$

$\mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_1}$. За побудовою Ω^-_n для довільних $\mathbf{g} \in G_n,\ \sigma \in S_n$ вектор $\mathbf{w} = (\mathbf{g}\mathbf{w}_1)^\sigma$ належить множині Ω_n і

$$\mathbf{c}'^{\,T}_{\mathbf{w}} = \tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{g}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}})^T \xrightarrow{\delta} \mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1} \cdot (\mathbf{w}^{\sigma^{-1}})^T = (\mathbf{g}\tilde{N}_{\mathbf{w}_1})^\sigma \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}}.$$

Отже, $L_{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}N_{\mathbf{w}_1})^\sigma \in E_n$, тобто $E'_n \subset E_n$. Теорему доведено.

Основні властивості матриць толерантності множини E_n.

1. Якщо матриця толерантності $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, тоді $L^\sigma_{\mathbf{w}}$ також належить E_n при будь-яких $\sigma \in S_n$.

Дійсно, $(L^\sigma_{\mathbf{w}} \,\Box\, L^{*\sigma}_{\mathbf{w}}) \cdot (\mathbf{w}^\sigma)^T = (L_{\mathbf{w}} \,\Box\, L^*_{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{w}^T$.

2. Якщо матриця толерантності $L_{\mathbf{w}}$ належить множині E_n, тоді матриця $\mathbf{g}L_{\mathbf{w}} \in E_n$ для будь-якого $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G_n$.

Доведення безпосередньо випливає з наступного співвідношення:

$$\mathbf{c}'^{\,T}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{g}L_{\mathbf{w}} \,\Box\, (\mathbf{g}L_{\mathbf{w}})^*) \cdot (\mathbf{g}\mathbf{w})^T \xrightarrow{\epsilon} (L_{\mathbf{w}} \,\Box\, L^*_{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}},$$

де

$$L_{\mathbf{w}} \,\Box\, L^*_{\mathbf{w}} = (\alpha_{ri}),\ \varepsilon : \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \alpha_{ri})(\gamma_i \omega_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ri}\omega_i,\ (r = 1, \ldots, 2^n)$$

задає монотонний ізоморфізм між упорядкованими множинами $\mathbf{c}'_{\mathbf{w}} = (c'_1, \ldots, c'_{2^n}),\ \mathbf{c}_{\mathbf{w}} = (c_1, \ldots, c_{2^n})$.

Із властивостей 1 та 2 маємо:

3. Якщо $L_{\mathbf{w}}$ — довільна матриця толерантності з E_n, тоді $\mathbf{g}L^\sigma_{\mathbf{w}}$ також є матрицею толерантності з E_n при будь-яких $\mathbf{g} \in G_n$ та $\sigma \in S_n$, тобто множина E_n замкнена відносно групових перетворень G_n і S_n.

Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ і $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, тобто $(L_{\mathbf{w}} \,\Box\, L^*_{\mathbf{w}}) \times \times \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}}$. Виникає питання, чи належить матриця $L^*_{\mathbf{w}}$ множині E_n? У загальному випадку можна стверджувати, що $L^*_{\mathbf{w}}$ є матрицею толерантності, але не завжди належить E_n, тобто множина E_n не є замкненою відносно операції, за якої будуємо матрицю $L^*_{\mathbf{w}}$ з $L_{\mathbf{w}}$. Покажемо це на наступному прикладі. Нехай $n = 3$. Множина E^-_3, очевидно, складається з двох матриць:

$$E^-_3 = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо вектор $\mathbf{w} = (-1; -2; -2,5) \in \Omega_3^-$, для якого $L_{\mathbf{w}} = = L_2$ і

$$L_{\mathbf{w}}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що для $\forall \mathbf{g} \in G_3$, $\forall \sigma \in S_3$ матриця толерантності $(\mathbf{g}L_{\mathbf{w}}^*)^\sigma$ не належить E_3^-. Тоді на основі теореми 1.2 можна стверджувати, що $L_{\mathbf{w}}^* \notin E_3$. Із цих міркувань випливає, що матриця $L_{\mathbf{w}}^*$ належить множині E_n тільки в тому випадку, коли $\mathbf{g}_1 L_{\mathbf{w}}^* \in E_n^-$, де $\mathbf{g}_1 = ((-1)^{\alpha_{11}^*}, \ldots, (-1)^{\alpha_{1n}^*})$ і $(\alpha_{11}^*, \ldots, \alpha_{1n}^*)$ — перший рядок матриці $L_{\mathbf{w}}^*$. Очевидно, що $L_{\mathbf{w}}^{**} = (L_{\mathbf{w}}^*)^* = L_{\mathbf{w}}$. За допомогою простої перевірки легко переконатися, що

$$E_1^- = \{L_1 = (0)\}, \quad E_2^- = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$E_3^- = \left\{ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$E_4^- = \{L_1, L_2, \ldots, L_{14}\}$, де

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad L_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}; \qquad L_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix};$$

$$L_{13} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}; \qquad L_{14} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&0&1&0\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Критерій зображення бульових векторів матрицями толерантності

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q\}$ — довільна підмножина множини $\mathbb{Z}_2^n$ і $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$ — різниця множин $\mathbb{Z}_2^n$ і A. З елементів множини A побудуємо матрицю A_ξ наступним чином: першим рядком матриці A_ξ буде вектор $\mathbf{a}_{\xi(1)} = (\alpha_{\xi(1)1}, \dots, \alpha_{\xi(1)n})$ з A, другим рядком матриці буде вектор $\mathbf{a}_{\xi(2)} = (\alpha_{\xi(2)1}, \dots, \alpha_{\xi(2)n})$, останнім рядком A_ξ буде $\mathbf{a}_{\xi(q)} = (\alpha_{\xi(q)1}, \dots, \alpha_{\xi(q)n})$, де $\xi(i)$ — дія підстановки $\xi \in S_q$ на i.

Матрицю N, побудовану з перших r рядків матриці толерантності $L \in E_n$, називають передматрицею толерантності і позначають $N = L(r)$.

Будемо вважати, що множина $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n, якщо існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ і матриця толерантності $L \in E_n$, що справджується одна з умов:

1) $A_\xi = L(q)$, якщо $q \le 2^{n-1}$;
2) $A'_\xi = L(q')$, де $q' = 2^n - q$, якщо $q > 2^{n-1}$.

Зауваження. Якщо $A = \varnothing$, то вважаємо, що $A_\xi = L(0)$, де L — довільна матриця з E_n.

Визначимо опуклу оболонку $\operatorname{conv} A$ множини $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ наступним чином:

$$\operatorname{conv} A = \{\mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i,\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_q \geq 0;\ \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in A\}.$$

Теорема 1.3. *Множина $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$.

Доведення. Необхідність доведемо від супротивного. Припустимо, що $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' \neq \varnothing$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Розглянемо випадок, коли $q \leq 2^{n-1}$. Тоді існує такий $\xi \in S_q$ і $L = L_{\mathbf{w}} \in E_n$, що $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$. Із останнього співвідношення випливає, що для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}) > (\mathbf{b}, \mathbf{w}). \tag{1.5}$$

Нехай $\mathbf{d} \in \operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A'$. Тоді

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i;\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1;\ \lambda_1, \ldots \lambda_q \geq 0;\ \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in A, \tag{1.6}$$

і

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q'} \lambda_i' \mathbf{b}_i;\ \sum_{i=1}^{q'} \lambda_i' = 1;\ \lambda_1', \ldots \lambda_{q'}' \geq 0;\ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{q'} \in A'. \tag{1.7}$$

Нехай $\omega_{\min} = \min\{(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$ і $\omega'_{\max} =$
$= \max\{(\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) \mid j = 1, 2, \ldots, q'\}$. На основі (1.5)-(1.7) маємо:

$$(\mathbf{d}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \geq \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\right) \omega_{\min} > \omega'_{\max} =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{q'} \lambda_j'\right) \omega'_{\max} \geq \sum_{j=1}^{q'} \lambda_j' (\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) = (\mathbf{d}, \mathbf{w}).$$

Одержана нерівність $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) > (\mathbf{d}, \mathbf{w})$ показує, що наше припущення, що $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' \neq \varnothing$ при $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$ є невірним. Отже, при $q \leq 2^{n-1}$, необхідність доведено.

У випадку, коли $q > 2^{n-1}$, для A' існує такий елемент $\sigma \in S_n$ і матриця толерантності $L_{\mathbf{v}} \in E_n$, що $(A')^\sigma = L_{\mathbf{v}}(q')$. Тоді, аналогічно, як у попередньому випадку, можна показати, що $(\mathbf{d}, \mathbf{v}) > (\mathbf{d}, \mathbf{v})$, якщо $\mathbf{d} \in \operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A'$. Одержане протиріччя показує неможливість нашого припущення і в цьому випадку. Отже, необхідність доведено повністю.

Покажемо, що коли $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

За допомогою опуклих оболонок $\operatorname{conv} A$ і $\operatorname{conv} A'$ побудуємо множину

$$D = \{\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \operatorname{conv} A,\ \mathbf{b} \in \operatorname{conv} A'\},$$

яка, очевидно, опукла і не містить нульовий вектор $\mathbf{0}$, оскільки $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$. Опуклі оболонки $\operatorname{conv} A$ і $\operatorname{conv} A'$ компактні [43], отже, множина D також компактна, і тому замкнена. Тоді, на основі теореми про відокремлення [44], можна стверджувати, що для D у n-вимірному евклідовому просторі R^n існує така гіперплощина $\pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_0\}$ $(\mathbf{p} \neq \mathbf{0}), p_0 \in \mathbb{R}$, яка задовольняє умови

$$p_0 = (\mathbf{p}, \mathbf{0}) = 0 \tag{1.8}$$

і для всіх $\mathbf{d} \in D$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{d}) < p_0. \tag{1.9}$$

Враховуючи, що $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \in \operatorname{conv} A,\ \mathbf{b} \in \operatorname{conv} A')$ з останньої нерівності випливає, що

$$(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < (\mathbf{p}, \mathbf{b}), \tag{1.10}$$

для будь-яких $\mathbf{a} \in \operatorname{conv} A$ і для всіх $\mathbf{b} \in \operatorname{conv} A'$. Отже, нерівність (1.10) має місце для всіх $\mathbf{a} \in A$ і для всіх $\mathbf{b} \in A'$. Якщо $q \leq 2^{n-1}$, то вектор $\mathbf{v} = -\mathbf{p}$ задовольняє умову:

$$\text{для всіх } \mathbf{a} \in A \text{ і для всіх } \mathbf{b} \in A' \quad (\mathbf{v}, \mathbf{a}) > (\mathbf{v}, \mathbf{b}). \tag{1.11}$$

Тоді, як показано в [45], існує такий вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n$, який задовольняє (1.11). Це означає, що з елементів множини A можна побудувати таку матрицю A_ξ, що $A_\xi = L_{\mathbf{w}}(q)$. Якщо $q > 2^{n-1}$, то $\mathbf{v} = \mathbf{p}$ і аналогічно до того, як вище зазначено для A, можна показати, що з елементів A' можна побудувати матрицю A'_ξ таку, що $A'_\xi = Ł_{\mathbf{w}'}(q')$, де $\mathbf{w}' \in \Omega_n$. Отже, теорему доведено.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A \subset \mathbb{Z}_2^n$, $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ і $\mathbf{a}A = \{(\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n) \mid (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in A\}$, $\mathbf{aw} = ((-1)^{\alpha_1}\omega_1, \ldots, (-1)^{\alpha_n}\omega_n)$, де $\oplus$ — сума за модулем 2.

Через $\mathbf{a}_i A_\xi$ позначимо матрицю, рядки якої побудовані з елементів множини $\mathbf{a}_i A$, де $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ задає порядок розташування елементів з $\mathbf{a}_i A$ у матриці $\mathbf{a}_i A_\xi$.

Теорема 1.4. *Якщо в множині $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ існує такий елемент $\mathbf{a}_i$, що матриця $\mathbf{a}_i A_\xi$ містить s_i нульових стовпців і $|A| \le 2^{n-s_i-1}$, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ і матриця толерантності $V \in E^-_{n-s_i}$, що*

$$\mathbf{a}_i^\sigma A_\xi^\sigma = (V(q)\, 0_{m_i} \ldots 0_{m_i}), \tag{1.12}$$

де $m_i = n - s_i$ і 0_{m_i} — вектор стовпчик із нулів розмірності $q \times 1$.

Доведення. Дано, що матриця $\mathbf{a}_i A_\xi$ містить s_i нульових стовпців, $q = |A| \le 2^{n-s_i-1}$ і допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Тоді в E_n існує така матриця L і елемент $\sigma \in S_n$, що

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^\sigma A_\xi^\sigma \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \quad \overbrace{0_{m_i} \ldots 0_{m_i}}^{s_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Покажемо, що в множині $E^-_{m_i}$ є така матриця V, яка задовольняє умову $H = V(q)$. Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^-_n$ і

$$(L_\mathbf{w} \,\square\, L^*_\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T_\mathbf{w}. \tag{1.14}$$

Вектор $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{m_i})$, очевидно, належить множині $\Omega^-_{m_i}$. Отже, існує така матриця толерантності $V_{\mathbf{w}_1} \in E^-_{m_i}$, що

$$(V_{\mathbf{w}_1} \,\square\, V^*_{\mathbf{w}_1}) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_1}. \tag{1.15}$$

На основі (1.13)-(1.15) робимо висновок, що перші q координати векторів $\mathbf{c}_\mathbf{w}$ і $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}$ співпадають, тобто $H = V_{\mathbf{w}_1}(q)$ і $\mathbf{a}_i^\sigma A_\xi^\sigma = (V_{\mathbf{w}_1}(q)\, 0_{m_i} \ldots 0_{m_i})$. Отже, необхідність доведено.

Розглянемо множину матриць толерантності

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} V & 0_{m_i} \\ V^* & 0_{m_i} \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & 0_{m_i+1} \\ V_1^* & 0_{m_i+1} \end{pmatrix}, \ldots, \right.$$

$$\ldots, V_{s_i} = \begin{pmatrix} V_{s_i-1} & 0_{m_i+s_i-1} \\ V^*_{s_i-1} & 0_{m_i+s_i-1} \end{pmatrix} \Bigg\},$$

де $V \in E^-_{m_i}$. Матриця V_{s_i} належить E^-_n і має вигляд:

$$\begin{pmatrix} V & 0_{m_i} & \ldots & 0_{m_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Для матриці $V_{s_i} \in E^-_n$ існує вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^-_n$ такий, що

$$(V_{s_i} \,\Box\, V^*_{s_i}) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}}. \tag{1.17}$$

З (1.12), (1.16) та (1.17) випливає, що $A_\xi = \mathbf{a}_i V^{\sigma^{-1}}_{s_i}(q)$. Теорему доведено.

1.3. Необхідні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності

Для того, щоб відповісти на запитання, чи допускає множина $A \subseteq \mathbb{Z}^n_2$ зображення матрицями толерантності, треба перевірити умови теореми 1.3. Ця перевірка є досить складною. Отже, встановлення простих необхідних умов зображення множини бульових векторів матрицями толерантності є актуальною і важливою задачею.

Теорема 1.5. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}^n_2$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, тоді з того, що $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$, випливає $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \notin A$, де $\overline{\alpha}_i$ — інвертоване значення α_i.*

Доведення. Дано, що $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ допускає зображення матрицями з E_n і $q \leq 2^{n-1}$. Значить, існує така матриця толерантності $L \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$, що $A_\xi = L(q)$. Рядки матриці L є елементами певного класу толерантності відносно $\tau : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\tau(\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists i(\alpha_i = \beta_i)$. Отже, передматриця толерантності $L(q)$ не містить вектори $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, де $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — довільний рядок матриці $L(q)$.

Зауваження. Якщо $|A| > 2^{n-1}$, то множина $A' = \mathbb{Z}^n_2 \setminus A$ задовольняє умови теореми 1.5.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_2$, $K_{\mathbf{a}} = \{i \mid \alpha_i = 1\}$ і $S(K_{\mathbf{a}})$ — множина всіх підмножин множини $K_{\mathbf{a}}$.

Теорема 1.6. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, то в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_r$, що для довільного $\mathbf{a}$ з $\mathbf{a}_r A$ має місце співвідношення:*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{a}_r A \Rightarrow \bigcup_{K_\mathbf{b} \in S(K_\mathbf{a})} \{\mathbf{b}\} \subset \mathbf{a}_r A.$$

Доведення. З того, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, випливає існування таких $L \in E_n$ і $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$, які задовольняють умову

$$A_\xi = L(q). \tag{1.18}$$

Нехай $L = L_\mathbf{w}$, тобто

$$(L \,\square\, L^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T. \tag{1.19}$$

Виберемо за $\mathbf{a}_r$ перший рядок матриці L і перетворимо рівність (1.18) так: $\mathbf{a}_r A_\xi = \mathbf{a}_r L(q)$. Координати вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_r \mathbf{w}$ від'ємні, і матриця $L_{\mathbf{w}_1} = \mathbf{a}_r L$ задовольняє умову

$$(L_{\mathbf{w}_1} \,\square\, L_{\mathbf{w}_1}^*) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T. \tag{1.20}$$

Розташуємо координати вектора $\mathbf{w}_1$ у порядку спадання, тобто побудуємо вектор $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1^\sigma$, де $\sigma \in S_n$. Тоді на основі (1.20) маємо:

$$(L_{\mathbf{w}_2} \,\square\, L_{\mathbf{w}_2}^*) \cdot \mathbf{w}_2^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_2}^T, \tag{1.21}$$

де $L_{\mathbf{w}_2} = L_{\mathbf{w}_1}^\sigma$. Нехай $\mathbf{d}$ — довільний рядок матриці $\mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma = L_{\mathbf{w}_2}(q)$, крім першого. Якщо $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ такий, що $K_\mathbf{b} \subset K_\mathbf{d}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{d})$, то справджується нерівність $(\mathbf{d}, \mathbf{w}_2) < (\mathbf{b}, \mathbf{w}_2)$. З останньої нерівності та з (1.21) випливає, що порядковий номер рядка $\mathbf{d}$ у матриці $L_{\mathbf{w}_2}(q)$ більший від порядкового номера рядка $\mathbf{b}$, тобто, якщо $K_\mathbf{b} \subset K_\mathbf{d}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{d})$, то $\mathbf{d} \in \mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma \Rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{a}_r^\sigma A_\xi^\sigma$. Якщо через $\mathbf{a}$ позначимо вектор $\mathbf{b}^{\sigma^{-1}}$, то з останнього співвідношення безпосередньо випливає, що

$$\mathbf{a} \in \mathbf{a}_r A \Rightarrow \bigcup_{K_\mathbf{b} \in S(K_\mathbf{a})} \{\mathbf{b}\} \subset \mathbf{a}_r A.$$

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і $||\mathbf{a}|| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$.

Наслідок 1. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, то в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_r$, що для довільного $\mathbf{a}$ з $\mathbf{a}_r A$ та для будь-якого невід'ємного цілого числа $k < ||\mathbf{a}||$ справджується нерівність*

$$\left|\{\mathbf{b} \in \mathbf{a}_r A \mid ||b|| = k\}\right| \geq C_{||\mathbf{a}||}^k,$$

де C_n^m — біномний коефіцієнт.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subset \mathbb{Z}_2^n,\ k_i^* = \max\{||\mathbf{a}|| \mid \mathbf{a} \in \mathbf{a}_i A\}$ і $k_A^* = \min\{k_i^* \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$.

Наслідок 2. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, тоді має місце нерівність*

$$|A| \geq \sum_{i=0}^{k_A^*} C_{k_A^*}^i.$$

Зауваження. Якщо A допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| > 2^{n-1}$, то множина $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$ задовольняє умови теореми 1.6.

Нехай $B = (\beta_{kr})$ — прямокутна $m \times n$ матриця над $\mathbb{Z}_2,\ A \subseteq \subseteq \mathbb{Z}_2^n,\ k(B) = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{kr}$ і $n(A) = \{i \mid \mathbf{e}_i \in A\}$.

Теорема 1.7. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $2^j < |A| \leq 2^{j+1}$ $(j \in \in \{1, 2, \ldots, n-2\})$, тоді в A знайдеться такий елемент $\mathbf{a}_i$, що*

1. $\forall k \in \{1, \ldots, |A|\}\ k(\mathbf{a}_i A_\xi) \leq j + 1,\ \xi \in S_q,\ (q = |A|)$,
2. $|n(\mathbf{a}_i A)| \geq j + 1$.

Доведення. Дано, що множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $2^j < |A| \leq 2^{j+1}$ $(j \in \in \{1, 2, \ldots, n-2\})$. Отже, існує така матриця толерантності $H \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$, що $A_\xi = H(q)$. Якщо через $\mathbf{a}_i$ позначимо перший рядок матриці A_ξ, то з останньої рівності маємо: $\mathbf{a}_i A_\xi = H_1(q)$, де $H_1 = \mathbf{a}_i H \in E_n^-$.

Розглянемо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n^-$, координати якого задовольняють умови $\omega_1 < 0, \omega_i < \sum\limits_{j=1}^{i-1} \omega_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ і систему матриць толерантності

$$L_1 = (0_1), L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_1 \\ L_1^* & 0_1 \end{pmatrix}, ..., L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0_{n-1} \\ L_{n-1}^* & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (1.22)$$

де 0_t — нульовий стовпчик розміру $2^{t-1} \times 1$. Легко бачити, що

$$(L_{\mathbf{w}} \square L_{\mathbf{w}}^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T. \qquad (1.23)$$

Із побудови вектора $\mathbf{w}$ та (1.23) випливає, що будь-яка матриця $V \in E_n^-$ задовольняє умову: $\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ $k(V) \leq k(L_n) \leq \leq j + 1$. Тоді на основі рівності $\mathbf{a}_i A_\xi = H_1(q)$ $(H_1 \in E_n^-)$ і $2^j < q \leq 2^{j+1}$ $(j \in \{1, 2, n-2\})$ робимо висновок, що $\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ $k(\mathbf{a}_i A) \leq j + 1$.

Порядковий номер рядка $\mathbf{e}_i$ у будь-якій матриці толерантності $V \in E_n^-$ не перевищує порядкового номера рядка $\mathbf{e}_i$ у матриці L_n $(i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\})$. Отже, якщо через $L_n(q)$ і $V(q)$ позначити передматриці толерантності відповідних матриць L_n і V, то з (1.23) випливає $|n(V(q))| \geq |n(L_n(q))| = j + 1$. З умови довільності матриці толерантності $V \in E_n^-$ і $\mathbf{a}_i A_\xi = = H_1(q)$ $(H_1 \in E_n^-)$ випливає, що $|n(\mathbf{a}_i A)| \geq |n(L_n(q))| = j + 1$. Теорему доведено.

Визначимо відстань $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ між елементами $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ наступним чином:

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Очевидно, $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ є число координат, у яких відрізняються вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$.

Нехай $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — довільні елементи з $A(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$ і $O(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — множина таких орт-векторів $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s}$, що $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = = \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2} + \ldots + \mathbf{e}_{i_s}$, де $\oplus$ — покоординатна сума векторів за модулем 2, $i_r \neq i_k$, якщо $r \neq k$. Позначимо через $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ підгрупу групи $\mathbb{Z}_2^n$ ($\mathbb{Z}_2^n$ утворює групу відносно операції $\oplus$), яка породжується елементами з $O(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, тобто $H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = = \langle \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s} \mid \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s} \in O(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rangle$.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Покоординатну кон'юнкцію векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ позначимо через $\mathbf{a}\&\mathbf{b} = = (\alpha_1\&\beta_1, \ldots, \alpha_n\&\beta_n)$ і через $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b})$ позначимо суміжний клас групи $\mathbb{Z}_2^n$ за підгрупою $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, що визначається елементом $\mathbf{a}\&\mathbf{b}$, тобто $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) = \mathbf{a}\&\mathbf{b} \oplus H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Теорема 1.8. *Якщо множина* $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ $(|A| \geq 2)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n*, тоді для будь-яких двох елементів* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *з* A*, для яких* $|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'| \geq \geq 2$ $(A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A)$ *і для будь-яких двох елементів* $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ *з* $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'$ *справджується нерівність* $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Доведення. Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — довільні елементи з A $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$, $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \mathbf{h} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — довільні елементи з $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap A'$ і $\rho = \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що перші ρ координат векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ різні, а інші рівні, тобто $\alpha_i \neq \beta_i$ для $i = 1, 2, \ldots, \rho$ і $\alpha_i = \beta_i, \ i = \rho + 1, \ldots, n$. Згідно з теоремою 1.3 та з того, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, випливає:

$$\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing.$$

Отже,

$$\lambda_1 \mathbf{a} + (1 - \lambda_1)\mathbf{b} \neq \lambda_2 \mathbf{g} + (1 - \lambda_2)\mathbf{h}, \tag{1.24}$$

для всіх $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$.

Враховуючи, що точки $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$, $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ $(\mathbf{g} \neq \mathbf{h})$ є кутовими точками відповідних множин $\operatorname{conv} A, \operatorname{conv} A'$ і $A \cap A' = \varnothing$, нерівність (1.24) можна замінити нерівністю

$$\lambda_1(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} \neq \lambda_2(\mathbf{g} - \mathbf{h}) + \mathbf{h} \tag{1.25}$$

за умови, що

$$\lambda_1 \in (0, 1) \text{ та } \lambda_2 \in (0, 1). \tag{1.26}$$

Із (1.25) випливає, що існує таке число $r \in \{1, \ldots, \rho\}$, для якого має місце нерівність

$$\lambda_1(\alpha_r - \beta_r) + \beta_r \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r. \tag{1.27}$$

Покажемо, що з (1.25), (1.26) і $\alpha_r \neq \beta_r$ маємо $\gamma_r = \delta_r$, тобто $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Розглянемо наступні можливі випадки:

1. Нехай $\alpha_r = 1$. Тоді $\beta_r = 0$ і з (1.27) маємо $\lambda_1 \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r$. Звідси

$$\gamma_r - \delta_r \neq \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1 - \delta_r). \tag{1.28}$$

Ліва частина нерівності (1.28) приймає значення з множини $\{-1, 0, 1\}$, оскільки $\gamma_r, \delta_r \in \mathbb{Z}_2$.

Права частина нерівності (1.28) у зв'язку з (1.26) не може дорівнювати 0 ні при яких значеннях λ_1, λ_2. Отже, нерівність (1.27) має місце при довільних $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ тільки у тому випадку, коли $\gamma_r - \delta_r = 0$. Отже, $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Нехай $\alpha_r \neq 0$. Тоді $\beta_r = 1$ і з (1.27) випливає, що

$$-\lambda_1 + 1 \neq \lambda_2(\gamma_r - \delta_r) + \delta_r,$$

або

$$(\gamma_r - \delta_r) \neq \frac{1}{\lambda_2}(1 - \lambda_1 - \delta_r).$$

Як і в першому випадку, остання нерівність має місце для всіх $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ тільки у тому випадку, коли $\gamma_r - \delta_r = 0$. Отже, $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Теорему доведено.

Зауваження. У випадку, коли $|A| = 0$, або $|A| = 1$, множина A, очевидно, допускає зображення матрицями толерантності з E_n, якщо вважати, що порожня матриця (матриця без жодного рядка) є передматрицею довільної матриці толерантності з E_n.

Нехай B — прямокутна $m \times n$ матриця над $\mathbb{Z}_2$ і $s(i; B)$ — кількість одиниць i-го стовпчика матриці B.

Теорема 1.9. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $q = |A| \leq 2^{n-1}$, тоді існують такі елементи $\mathbf{a}_t \in A$, $\xi \in S_q$ та $\sigma \in S_n$, що для всіх $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ має місце нерівність*

$$s(i-1; \mathbf{a}_t^\sigma A_\xi^\sigma) \geq s(i; \mathbf{a}_t^\sigma A_\xi^\sigma), \tag{1.29}$$

де $\mathbf{a}_t^\sigma A_\xi^\sigma$ є передматрицею деякої матриці толерантності з E_n^-.

Доведення. Дано, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує така матриця толерантності $L \in E_n$ і такий елемент $\xi \in S_q$, що

$$A_\xi = L(q). \tag{1.30}$$

Позначимо перший рядок матриці A_ξ через $\mathbf{a}_t$ і за допомогою цього елемента перетворимо (1.30) так:

$$\mathbf{a}_t A_\xi = \mathbf{a}_t L(q). \tag{1.31}$$

Матриця $L_{\mathbf{w}} = \mathbf{a}_t L$ визначає вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n^-$, усі координати якого від'ємні, оскільки перша координата вектора $\mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T = = (L_{\mathbf{w}} \square L_{\mathbf{w}}^*) \cdot \mathbf{w}^T$ дорівнює 0. Елемент $\sigma \in S_n$ виберемо так, щоб координати вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}^\sigma$ були розташовані у порядку спадання. Тоді матриця $L_{\mathbf{w}_1} = (\mathbf{a}_t L)^\sigma = \mathbf{a}_t^\sigma L^\sigma$ задовольняє умову $\left(L_{\mathbf{w}_1} \square L_{\mathbf{w}_1}^*\right) \cdot \mathbf{w}_1^T = c_{\mathbf{w}_1}^T$, тобто $L_{\mathbf{w}_1} \in E_n^-$. Застосовуючи перетворення $\sigma \in S_n$ до (1.31) маємо:

$$\mathbf{a}_t^\sigma A_\xi^\sigma = \mathbf{a}_t^\sigma L^\sigma(q) = L_{\mathbf{w}_1}(q). \tag{1.32}$$

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-2}, 0, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ є рядком перед- матриці толерантності $L_{\mathbf{w}_1}(q)$. Тоді $\mathbf{b} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-2}, 1,\ 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ також буде рядком матриці $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ і його порядковий номер у матриці $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ буде менший від порядкового номера $\mathbf{a}$, оскільки $\mathbf{w}_1 \in \Omega_n^-$. Це означає, що для будь-якого $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, для будь-якого $m \in \{1, 2, \ldots, q\}$ виконується нерівність:

$$s\left(i-1; L_{\mathbf{w}_1}(m)\right) \geq s\left(i; L_{\mathbf{w}_1}(m)\right).$$

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $|A| > 2^{n-1}$, то теорема має місце для $A' = \mathbb{Z}_2^n \setminus A$.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ і $\{L_1, \ldots, L_n\}$ — множина матриць толерантності, елементи якої побудовані за рекурентним співвідношенням (1.22). Через $p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)$ позначимо матрицю, рядками якої є елементи максимальної підмножини множини $(\mathbf{a}_i A)^{\sigma_i}$, що задовольняють умову

$$(L_{j_i} \underbrace{0_{j_i} \ldots 0_{j_i}}_{n-j_i}) \square (L_{j_i}^*(q_0^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+1)}) \square \ldots \square (L_{j_i+r_i}^*(q_{r_i}^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r_i+1)}),$$

де $q_0^i \geq q_1^i \geq \ldots \geq q_{r_i}^i$. Отже,

$$p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = p_0\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) \square p_1\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) \square \ldots \square p_{r_i+1}\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right),$$

де $p_0\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L_{j_i} \underbrace{0_{j_i} \ldots 0_{j_i}}_{n-j_i}), p_1\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L_{j_i}^*(q_0^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+1)}),$
$\ldots, p_{r_i+1}\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right) = (L_{j_i+r_i}^*(q_{r_i}^i) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r_i+1)})$, і елемент $\sigma_i \in S_n$ визначається за теоремою 1.9. Нехай $|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)|$ — кількість рядків матриці $p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)$ і $|p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)| = \max\{|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)| \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$. Якщо множина $\{|p\left(\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\right)| \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$ містить декілька максимальних елементів,

то через $|p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)|$ позначимо один із них. Пороговий оператор p із мітками $\mathbf{a}_m$ і σ_m відносно множини A визначимо так: $p\,(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$, тобто

$$p(A) = p_0(A) \,\Box\, p_1(A) \,\Box\, \ldots \,\Box\, p_{t_0}(A), \tag{1.33}$$

де $p_s\,(A) = p_s\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right),\ s = 0, 1, \ldots, r_m{+}1\ (t_0 = r_m{+}1)$. Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю (1.33), назвемо p-підмножиною множини A з мітками $\mathbf{a}_m$ та σ_m і позначимо через $A^{(1)}$. Індекс j_0 p-підмножини $A^{(1)}$ визначимо так: $j_0 = \log_2|p_0(A)| + 1$, де $|p_0(A)|$ — кількість рядків матриці $p_0(A)$.

Побудуємо наступну систему множин:

$$\begin{aligned}
&A^{(1)}_{j_0} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0-1}, 1, \alpha_{j_0+1}, \ldots, \alpha_n) \mid \mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},\\
&A^{(1)}_{j_0+1} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0}, 1, \alpha_{j_0+2}, \ldots, \alpha_n) \mid \mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A^{(1)}_{j_0+t_0-1} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0+t_0-2}, 1, \alpha_{j_0+t_0}, \ldots, \alpha_n) \mid\\
&\mathbf{a} \in (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}\},
\end{aligned}$$

елементи якої будемо називати одноіндексними множинами p-розкладу множини A. До кожної з цих множин застосовуємо пороговий оператор p відповідно з мітками

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{j_0} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0)}{1}, 0, \ldots, 0),\ \sigma_m^{(1)},\\
&\mathbf{e}_{j_0+1} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0+1)}{1}, 0, \ldots, 0),\ \sigma_m^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{e}_{j_0+t_0-1} = (0, \ldots, 0, \underset{(j_0+t_0-1)}{1}, 0, \ldots, 0),\ \sigma_m^{(1)},
\end{aligned}$$

де $\sigma_m^{(1)}$ задовольняє умови:

1) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, j_0 - 1, j_0 + t_0, j_0 + t_0 + 1, \ldots, n\}$ $\sigma_m^{(1)}(j) = = \sigma_m(j)$;

2) якщо $i, j \in \{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + t_0 - 1\}$ $(i \neq j)$ і $\sigma_m^{(1)}(i) = = \sigma_m(j)$, $\sigma_m^{(1)}(j) = \sigma_m(i)$, то це можливо тільки в тому випадку, коли сума одиниць у стовпчиках i та j матриці $(\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}_\xi$ $(\xi \in S_q)$ співпадають, тобто $s(i; (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}_\xi) = s(j; (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}_\xi)$;

3) якщо $i, j \in \{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + t_0 - 1\}$ і $s(i; (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}_\xi) \neq \neq s(j; (\mathbf{a}_m A)^{\sigma_m}_\xi)$, то $\sigma_m^{(1)}(i) = \sigma_m(i), \sigma_m^{(1)}(j) = \sigma_m(j)$.

Нехай

$$
\begin{aligned}
&p\left(A^{(1)}_{j_0}\right) = p_0\left(A^{(1)}_{j_0}\right) \square\, p_1\left(A^{(1)}_{j_0}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0}}\left(A^{(1)}_{j_0}\right),\\
&p\left(A^{(1)}_{j_0+1}\right) = p_0\left(A^{(1)}_{j_0+1}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+1}}\left(A^{(1)}_{t_{j_0+1}}\right),
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p\left(A^{(1)}_{j_0+t_0-1}\right) = p_0\left(A^{(1)}_{j_0+t_0-1}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A^{(1)}_{t_{j_0+t_0-1}}\right)$$

і

$$p^2(A) = p_0(A) \,\square \left(\mathop{\square}_{i_0=j_0}^{j_0+t_0-1} p\left(A^{(1)}_{i_0}\right)\right). \tag{1.35}$$

Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю $p^2(A)$, позначимо через $A^{(2)}$. Якщо врахувати, що $p_1(A) = \mathbf{e}_{j_0} p_0\left(A^{(1)}_{j_0}\right), p_2(A) = \mathbf{e}_{j_0+1} p_0\left(A^{(1)}_{j_0+1}\right), \ldots$ $\ldots, p_{t_0}(A) = \mathbf{e}_{j_0+t_0-1} p_0\left(A^{(1)}_{j_0+t_0-1}\right)$, то на основі (1.33)-(1.35) робимо висновок, що $A^{(1)} \subseteq A^{(2)}$.

Для кожного $i_0 \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\}$ побудуємо систему множин

$$
\begin{aligned}
&A^{(2)}_{i_0, i_1(i_0)} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_1(i_0)-1}, 1, \alpha_{i_1(i_0)+1}, \ldots, \alpha_n) \mid \\
&\mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A^{(1)}_{i_0}\right)^{\sigma^{(1)}_m}\},\\
&A^{(2)}_{i_0, i_1(i_0)+1} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_1(i_0)}, 1, \alpha_{i_1(i_0)+2}, \ldots, \alpha_n) \mid \\
&\mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A^{(1)}_{i_0}\right)^{\sigma^{(1)}_m}\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A^{(2)}_{i_0, i_1(i_0)+t_{i_0}-1} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_1(i_0)+t_{i_0}-2}, 1, \ldots, \alpha_n) \mid \\
&\mathbf{a} \in \left(\mathbf{e}_{i_0} A^{(1)}_{i_0}\right)^{\sigma^{(1)}_m}\},
\end{aligned}
$$

елементи якої будемо називати двоіндексними множинами p-розкладу множини A, і до кожної двоіндексної множини застосуємо пороговий оператор

p відповідно з мітками

$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)} = (0,\ldots,0,\underset{i_1(i_0)}{1},0,\ldots,0),\ \sigma_m^{(2)},$$
$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)+1} = (0,\ldots,0,\underset{i_1(i_0)+1}{1},0,\ldots,0),\ \sigma_m^{(2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{e}_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} = (0,\ldots,0,\underset{i_1(i_0)+t_{i_0}-1}{1},0,\ldots,0),\ \sigma_m^{(2)},$$

де $\sigma_m^{(2)}$ задовольняє умови:

1) $\forall j \in \{1,2,\ldots,i1(i_0)-1, i_1(i_0)+t_{i_0}, i_1(i_0)+t_{i_0}+1,\ldots,n\}$ і $\sigma_m^{(2)}(j) = \sigma_m^{(1)}(j)$;

2) якщо $i,j \in \{i_1(i_0), i_1(i_0)+1,\ldots,i_1(i_0)+t_{i_0}-1\}$ $(i \neq j)$ і $\sigma_m^{(2)}(i) = \sigma_m^{(1)}(j)$, $\sigma_m^{(2)}(j) = \sigma_m^{(1)}(i)$, то це можливо тільки в тому випадку, коли сума одиниць у стовпчиках i та j матриці $\left(\mathbf{e}_{i_0}A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}$ $(\xi \in S_q)$ співпадають, тобто $s\left(i;\left(\mathbf{e}_{i_0}A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right) = s\left(j;\left(\mathbf{e}_{i_0}A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right)$ і p-розклад множини $A_{i_0}^{(1)}$ буде інваріантним відносно такої перестановки $(i_0 \in \{j_0, j_0+1,\ldots,j_0+t_0-1\})$;

3) Якщо $i,j \in \{i_1(i_0)+1,\ldots,i_1(i_0)+t_{i_0}-1\}$ і $s\left(i;\left(\mathbf{e}_{i_0}A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right) \neq s\left(j;\left(\mathbf{e}_{i_0}A_{i_0}^{(1)}\right)_{\xi}^{\sigma_m^{(1)}}\right)$, то $\sigma_m^{(2)}(i) = \sigma_m^{(1)}(i)$, $\sigma_m^{(2)}(j) = \sigma_m^{(1)}(j)$.

Нехай

$$\begin{aligned}
& p\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)}\right) = p_0\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)}\right)\Box\ldots\Box\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)}}\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)}\right),\\
& \quad p\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+1}\right) = p_0\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+1}\right)\Box\ldots\\
& \quad \ldots\Box\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)+1}}\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+1}\right),\\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \quad p\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}\right) = p_0\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}\right)\Box\ldots\\
& \quad \ldots\Box\, p_{t_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}}\left(A^{(2)}_{i_0,i_1(i_0)+t_{i_0}-1}\right)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

і

$$p^3(A) = p_0(A) \,\square \left(\mathop{\bigsquare}_{i_0=j_0}^{j_0+t_0-1} \left(p_0 \left(A^{(1)}_{i_0} \right) \square \right.\right.$$

$$\left.\left. \square \left(\mathop{\bigsquare}_{i_1=i_1(i_0)}^{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} p \left(A^{(2)}_{i_0,i_1} \right) \right) \right) \right). \tag{1.37}$$

Максимальну підмножину множини A, з елементів якої можна побудувати матрицю (1.37), позначимо $A^{(3)}$. Якщо враховувати, що $p_1 \left(A^{(1)}_{i_0} \right) = \mathbf{e}_{i_1(i_0)} p_0 \left(A^{(2)}_{i_1(i_0)} \right), \ldots, p_{t_{i_0}} \left(A^{(1)}_{i_0} \right) = = \mathbf{e}_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} p_0 \left(A^{(2)}_{i_1(i_0)+t_{i_0}-1} \right)$, то на основі (1.34)-(1.37) можна стверджувати, що $A^{(2)} \subseteq A^{(3)}$. Аналогічно до того, як побудовано $A^{(3)}$ з $A^{(2)}$, можна побудувати $A^{(4)}$ з $A^{(3)}$ і т.д.

Елементи неспадної послідовності множин $A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \subseteq A^{(3)} \subseteq \ldots$ відповідно будемо називати p-підмножинами першого, другого, третього, $\ldots$ порядку множини A.

Теорема 1.10. *Якщо множина $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n і $|A| \leq 2^{n-1}$, тоді в A існує такий елемент $\mathbf{a}$, таке число $k \in \{1, 2, \ldots, j_0 - 1\}$ $(2 \leq \leq j_0 \leq n)$ і такий елемент $\sigma \in S_n$, що $A = A^{(k)}$.*

Доведення. Дано, що $|A| \leq 2^{n-1}$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує такий елемент $\xi \in \in S_q$ $(q = |A|)$ і матриця $L_1 \in E_n$, що

$$A_\xi = L_1(q). \tag{1.38}$$

Нехай $L_1 = L_{\mathbf{w}_1}$, де $\mathbf{w}_1 \in \Omega_n$. Тоді

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_1}. \tag{1.39}$$

Виберемо елементи $\mathbf{a} \in A$ і $\sigma \in S_n$ таким чином, щоб $\mathbf{w} = = (\mathbf{a}\mathbf{w}_1)^\sigma \in \Omega_n^-$, і за допомогою них перетворимо рівність (1.38):

$$\mathbf{a}^\sigma A_\xi^\sigma = \mathbf{a}^\sigma L_1^\sigma(q).$$

Вводимо позначення $A_1 = \mathbf{a}^\sigma A_\xi^\sigma$, $L = \mathbf{a}^\sigma L_1^\sigma$. Тоді на основі (1.39) вектор $\mathbf{w} = (\mathbf{a}\mathbf{w}_1)^\sigma \in \Omega_n^-$ і матриця A_1 задовольняє умову

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T. \tag{1.40}$$

Припустимо, що з елементів множини $A^{(1)}$ не можна побудувати матрицю A_1, тобто $A \neq A^{(1)}$ і

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(j_0-1)}. \tag{1.41}$$

Це означає, що справджується нерівність

$$A_1 \neq (L_{j_0} \underbrace{0\ldots 0}_{n-j_0}) \,\square\, (L_{j_0}^*(q_0)\, 0\ldots 0) \,\square\, \ldots$$

$$\ldots \,\square\, (L_{j_0+t_0-1}^*(q_{t_0-1})\, 0\ldots 0). \tag{1.42}$$

З (1.41) та (1.42) випливає, що має місце одна з умов:

1) існують такі числа $i, j \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\}$, що $i << j$, $s(i; A_1) > s(j; A_1)$ і $q_{i-j_0} < q_{j-j_0}$;

2) існує таке число $i \in \{j_0, j_0+1, \ldots, j_0+t_0-1\}$ і такий рядок $\mathbf{a}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ матриці A_1, що не належить множині рядків матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+1) \underbrace{0\ldots 0}_{n-i})$, але є рядком матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+ +r) \underbrace{0\ldots 0}_{n-r})$, де $r \in \{2, 3, \ldots, 2^{i-1}\}$;

3) існує таке число $i \in \{j_0+t_0, j_0+t_0+1, \ldots, n\}$ і такий рядок $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ матриці A_1, що є довільним рядком матриці $(L_i^* \underbrace{0\ldots 0}_{n-i})$, крім першого.

Нехай має місце випадок 1. З того, що вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n^-$, маємо $\omega_i > \omega_j$. Отже, вектори $\mathbf{a}'$ та $\mathbf{b}'$ з однаковими порядковими номерами у відповідних матрицях $(L_i^* \underbrace{0\ldots 0}_{n-i})$, $(L_j^* \underbrace{0\ldots 0}_{n-j})$ задовольняють нерівність

$$(\mathbf{a}', \mathbf{w}) > (\mathbf{b}', \mathbf{w}). \tag{1.43}$$

Із побудови матриці $(L_r^* \underbrace{0\ldots0}_{n-r})$ $(r\in\{1,2,\ldots,n\})$ випливає: якщо порядковий номер рядка $\mathbf{a}_1$ в матриці $(L_r^* \underbrace{0\ldots0}_{n-r})$ менший від порядкового номера рядка $\mathbf{a}_2$, то

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{w})>(\mathbf{a}_2,\mathbf{w}). \tag{1.44}$$

Враховуючи умови (1.41)-(1.44), ми робимо висновок, що матриця A_1 не може задовольняти рівність (1.40). Одержане протиріччя показує, що випадок 1 не може мати місце. Нехай має місце випадок 2. Тоді в множині рядків матриці A_1 можна вказати такий вектор $\mathbf{a}'$ з порядковим номером $n(\mathbf{a}')$ в матриці $(L_i^*(q_{i-j_0}+r) \underbrace{0\ldots0}_{n-i})$ $(r>2)$, що $(\mathbf{a}',\mathbf{w})>(\mathbf{b}',\mathbf{w})$, де $\mathbf{b}'$ не входить у множину рядків матриці A_1 і $n(\mathbf{b}')=q_{i-j_0}+1<n(\mathbf{a}')$. Нерівність $(\mathbf{a}',\mathbf{w})>(\mathbf{b}',\mathbf{w})$ при умові $n(\mathbf{a}')>n(\mathbf{b}')$ суперечить побудові матриці $(L_i^* \underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, а це означає, що випадок 2 не може мати місце, якщо виконуються умови (1.40)-(1.42).

Припустимо, що має місце випадок 3. Якщо через $\mathbf{a}'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,0,\ldots,0)$ позначити рядок матриці A_1, що є рядком матриці $(L_i^* \underbrace{0\ldots0}_{n-i})$, крім першого, то хоча б одна координата $\alpha_r\neq0$ $(r\in\{1,2,\ldots,i-1\})$ і $(\mathbf{a}',\mathbf{w})>(\mathbf{e}_i,\mathbf{w})$, де $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)$. З останньої нерівності безпосередньо випливає $\alpha_1\omega_1+\ldots+\alpha_{i-1}\omega_{i-1}>0$, що суперечить умові $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega_n^-$. Отже, якщо виконуються умови (1.40) і (1.41), то нерівність (1.42) не може мати місце, а це означає, що $A=A^{(1)}$.

Розглянемо випадок, коли множина $A^{(1)}$ є власною підмножиною множини $A^{(2)}$ і множини $A^{(2)},A^{(3)},\ldots,A^{(j_0-1)}$ співпадають, тобто

$$A^{(1)}\subset A^{(2)}=A^{(3)}=\ldots=A^{(j_0-1)}, \tag{1.45}$$

але з елементів множини $A^{(2)}$ не можна побудувати матрицю A_1, що задовольняє (1.40). З елементів множини $A^{(2)}$ за допомогою порогового оператора p із відповідними мітками можна побудувати матрицю:

$$\begin{gathered}p^2(A)=p_0(A)\,\square\,\left(p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\square\,p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\square\ldots\square\,p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\right)\square\\ \square\left(p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\square\,p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\square\ldots\square\,p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right)\right)\,\square\,\ldots\\ \ldots\square\left(p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\ldots\square\,p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)\right).\end{gathered}$$

Якщо припускати, що $A_1 \neq p^2(A)$, то на основі (1.45) можна стверджувати, що серед блоків:

$$\begin{aligned}
&p_1^2(A) = p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right),\\
&p_2^2(A) = p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{t_0}^2(A) = p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right)
\end{aligned}$$

матриці $p^2(A)$ існує хоча б один блок, для якого має місце один з попередніх випадків відносно відповідних параметрів цього блока. Це означає, що нерівність $A_1 \neq p^2(A)$ не справджується при (1.45), тобто $A = A^{(2)}$.

У випадку, коли

$$A^{(1)} \subset \ldots \subset A^{(k-1)} \subset A^{(k)} = A^{(k+1)} = \ldots = A^{(j_0-1)}, \tag{1.46}$$

шляхом аналогічних міркувань можна показати, що нерівність $A_1 \neq p^k(A)$ не може мати місце при умові (1.46). Отже, $A = = A^{(k)}$. Теорему доведено.

Зауваження. Слід зазначити, що в (1.46) включення "$\subset$" — власна підмножина частково може бути замінено на "$=$", тобто (1.46) може бути переписано так:

$$\begin{gathered}
A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(k_1)} \subset A^{(k_1+1)} = \ldots = A^{(k_2)} \subset\\
\subset A^{(k_2+1)} \subset \ldots \subset A^{(k)} = A^{(k+1)} = \ldots = A^{(j_0-1)},
\end{gathered}$$

і, очевидно, це не впливає на одержаний результат.

1.4. Достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності

У цьому параграфі розглянемо достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності з E_n, що можуть бути успішно використані при синтезі логічних пристроїв розпізнавання дискретних сигналів, при представленні дискретних зображень у нейробазисі та при синтезі комбінаційних схем із нейроелементів.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q\} \subset \mathbb{Z}_2^n$ $(q \leq 2^{n-1})$ і $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ — система матриць толерантності, елементи якої побудовані за рекурентним співвідношенням (1.22).

Застосовуємо пороговий оператор p з мітками $\mathbf{a}_m$ і σ_m ($\mathbf{a}_m \in \in A$) відносно множини A, тобто $p(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$ і

$$p(A) = p_0(A) \,\square\, p_1(A) \,\square \ldots \square\, p_{t_0}(A), \tag{1.47}$$

де

$$\begin{aligned}
&p_0(A) = p_0\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L_{j_m}\, 0_{j_m} \ldots 0_{j_m}),\\
&p_1(A) = p_1\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L^*_{j_m}(q_0^m)\ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-j_m}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{t_0}(A) = p_{t_0}\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right) = (L^*_{j_m+t_0-1}(q_{t_0-1}^m)\ \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_m+t_0-1)}\ )
\end{aligned}$$

і $q_0^m \geq q_1^m \geq \ldots \geq q_{t_0-1}^m > 0$. Відносно цього порогового оператора знаходимо p-підмножину $A^{(1)}$ множини A.

Теорема 1.11. *Якщо $A = A^{(1)}$, то множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.*

Доведення. Дано, що $A = A^{(1)}$. Це означає, що існують такі елементи $\mathbf{a}_m \in A$ і $\sigma_m \in S_n$, відносно яких з елементів множини $\mathbf{a}^{\sigma_m} A^{\sigma_m}$ можна побудувати матрицю $p(A)$ (1.47). Покажемо, що існує такий n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, який задовольняє умову

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m},\ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}). \tag{1.48}$$

Матриця $p(A) = p\left(\mathbf{a}_m^{\sigma_m} A^{\sigma_m}\right)$ допускає зображення (1.47), тобто, t_0 — найменше таке додатне ціле число, що $q_{t_0}^m \neq 0$ і $q_{t_0+1}^m = \ldots = q_{n-j_m}^m = 0$, де j_m — індекс p-підмножини $A^{(1)}$. Позначимо через $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{t_0-1}$ останні рядки відповідних матриць $p_1(A), \ldots, p_{t_0}(A)$, коли $t_0 \geq 2$ і побудуємо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_n)$ наступним чином:

1) $\omega_1 = -1,\ \omega_2 = \omega_1 - 1, \ldots, \omega_{j_m} = \sum\limits_{i=1}^{j_m-1} \omega_i - 1;$

2) координати ω_{j_m+s} послідовно знаходимо з рівностей:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{z}_s, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m}, \ldots, \omega_{j_m+s}, 0, \ldots, 0)) =\\
&(\mathbf{z}_{s-1}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m+s-1}, 0, \ldots, 0)),\ s = 1, \ldots, t\ (t = t_0 - 1);
\end{aligned}$$

3) $\omega_{j_{m+1}} = \ldots = \omega_n = (\mathbf{z}_t, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m} \ldots, \omega_{j_m+t}, 0, \ldots, 0)) - 1.$

Побудований таким чином вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ задовольняє умову (1.48). Тоді для вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_m \mathbf{w}^{\sigma_m^{-1}}$ маємо:

$$\forall \mathbf{x} \in A, \ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus A \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_1). \tag{1.49}$$

З останньої нерівності та з [45] безпосередньо випливає існування такого вектора $\mathbf{v} \in \Omega_n$, який також задовольняє (1.49). Отже, з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)$, де q — кількість елементів множини A і в цьому випадку ($t_0 \geq 2$) теорему доведено. Якщо $t_0 = 0$ або $t_0 = 1$, то з властивостей матриць толерантності множини E_n випливає, що A допускає зображення матрицями толерантності з E_n. Отже, теорему доведено повністю.

Теорема 1.12. *Якщо кількість елементів множини бульових векторів $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ менша від числа 12, то A допускає зображення матрицями толерантності з E_n тоді і тільки тоді, коли $A = A^{(1)}$.*

Доведення. Дано, що $|A| < 12$ і A допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує така матриця $L_{\mathbf{w}} \in E_n$, перші $q = |A|$ рядки якої можуть бути побудовані з елементів A. Через $\mathbf{a}_m$ позначимо елемент з A, що є першим рядком матриці $L_{\mathbf{w}}$, і σ_m — такий елемент групи S_n, що $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{a}_m \mathbf{w})^{\sigma_m} \in \Omega_n^-$. Тоді матриця $L_{\mathbf{w}_1}(q)$ допускає одне із зображень:

1) якщо $q = 1$, то

$$L_{\mathbf{w}_1}(1) = (L_1 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}); \tag{1.50}$$

2) якщо $1 < q < 12$, то

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_2 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-2}) \,\square\, \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n_2} (L_{2+i}^*(q_i) \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(2+i)}) \right), \tag{1.51}$$

де $1 = q_0 = q_1 = \ldots = q_{n_2}, \ n_2 \leq 9$,

або

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_3 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-3}) \,\square\, \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n_3} (L_{3+i}^*(q_i) \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(3+i)}) \right), \tag{1.52}$$

де $3 \geq q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n_3} > 0$ і n_3 визначається з нерівності $q_0 + q_1 + \ldots + q_{n_3} \leq 7$, або

$$L_{\mathbf{w}_1}(q) = (L_4 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-4}) \,\square\, \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n_4} (L_{4+i}^*(q_i) \ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(4+i)}) \right), \tag{1.53}$$

де $3 \geq q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n_4} > 0$ і n_4 визначається з нерівності $q_0 + q_1 + \ldots + q_{n_4} \leq 3$.

На основі (1.50)-(1.53) можна стверджувати, що всі елементи множини A входять у підмножину $A^{(1)}$, тобто $A = A^{(1)}$.

Достатність випливає з теореми 1.11.

Теорема 1.13. *Якщо $A = A^{(2)}, |A| \leq 2^{n-1}$ і блоки*

$$
\begin{aligned}
&p_1^2(A) = p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right),\\
&p_2^2(A) = p_0\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+1}}\left(A_{j_0+1}^{(1)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{t_0}^2(A) = p_0\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left(A_{j_0+t_0-1}^{(1)}\right),
\end{aligned}
$$

матриці

$$p^2(A) = p_0(A) \square\, p_1^2(A) \square \ldots \square\, p_{t_0}^2(A)$$

задовольняють умови:

1) $\left|p_0\left(A_{j_0+i}^{(1)}\right)\right| = \left|p_0\left(A_{j_0+i+1}^{(1)}\right)\right|,\ i = 0, 1, \ldots, t_0 - 2;$

2) *при кожному фіксованому* $i \in \{0, 1, \ldots, t_0 - 2\}$ $t_{j_0+i} = t_{j_0+i+1}$ *і для кожного* $k \in \{1, 2, \ldots, t_{j_0+i+1}\}$

$$\left|p_k\left(A_{j_0+i}^{(1)}\right)\right| - \left|p_k\left(A_{j_0+i+1}^{(1)}\right)\right| = q_i \geq 0,$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. Дано, що $A = A^{(2)}$ і $|A| \leq 2^{n-1}$, тобто існують такі елементи $\mathbf{a} \in A$ і $\sigma \in S_n$, відносно яких з елементів множини $\mathbf{a}^\sigma A^\sigma$ можна побудувати $p^2(A) = p_0(A) \square\, p_1^{(2)}(A) \square \ldots \square\, p_{t_0}^{(2)}(A)$. Покажемо, що коли блоки $p_1^{(2)}(A), p_2^{(2)}(A), \ldots, p_{t_0}^{(2)}(A)$ матриці задовольняють умови 1, 2, то існує такий n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, для якого має місце нерівність

$$\forall \mathbf{x} \in a^\sigma A^\sigma, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus a^\sigma A^\sigma \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}). \tag{1.54}$$

Нехай $j_1 = \log_2 \left|p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)\right| + 1\ \ (j_1 < j_0)$ і

$$\omega_1 = -1, \omega_2 = \omega_1 - 1, \ldots, \omega_{j_1} = \sum_{i=1}^{j_1-1} \omega_i - 1.$$

Позначимо через $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{t_{j_0}-1}$ останні рядки відповідних матриць $p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right), \ldots, p_{t_{j_0}}\left(A_{j_0}^{(1)}\right)$, коли $t_0 \geq 2$ і координати ω_{j_1+s} послідовно знаходимо з рівностей:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{z}_s, (\omega_1, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_1+s}, 0, \ldots, 0)) = \\ &= (\mathbf{z}_{s-1}, (\omega_1, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_1+s-1}, 0, \ldots, 0)),\ s = 1, 2, \ldots, t_{j_0} - 1.\end{aligned}$$

Параметри j_0, j_1 та $t_{j_0} - 1$ пов'язані з одним із співвідношень:
a) $j_0 - (j_1 + t_{j_0} - 1) > 1$;
b) $j_0 - (j_1 + t_{j_0} - 1) = 1$.

У першому випадку координати $\omega_{j_1+t_{j_0}}, \omega_{j_1+t_{j_0}+1}, \ldots, \omega_{j_0-1}$ вектора $\mathbf{w}$ знаходимо наступним чином:

$$\omega_{j_1+t_{j_0}} = \ldots = \omega_{j_0-1} = (\mathbf{z}_t, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_1+t}, 0, \ldots, 0)) - 1,$$

де $t = t_{j_0} - 1$.

У другому випадку координати $\omega_1, \ldots, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_0-1}$ вектора $\mathbf{w}$ уже визначені. Координату ω_{j_0} визначимо за формулою: $\omega_{j_0} = \sum\limits_{i=1}^{j_0-1} \omega_i - 1$. Тоді з умови 2 для координат ω_{j_0+i} маємо: $\omega_{j_0+i} = \omega_{j_0+i-1} - q_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, t_0-1)$. Координати $\omega_{j_0+t_0}, \omega_{j_0+t_0+1} \ldots, \omega_n$ знаходимо за формулою:

$$\omega_{j_0+t_0} = \ldots = \omega_n = (\mathbf{z}_0, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_1}, 0, \ldots, 0)) + \omega_{j_0} - 1.$$

Тоді вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ задовольняє умову (1.54) і для вектора $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ маємо:

$$\forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus A \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_1). \tag{1.55}$$

Із останньої нерівності та з [45] випливає існування такого вектора $\mathbf{v} \in \Omega_n$, який також задовольняє (1.55). Отже, з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)$ $(q = |A|)$ і в цьому випадку теорему доведено. Якщо $t_{j_0} = 0$, або $t_{j_0} = 1$, то $A^{(2)} = A^{(1)}$ і вектор $\mathbf{w}$ будується згідно з теоремою (1.11). Отже, теорему доведено.

Теорема 1.14. *Якщо* $A = A^{(m)}$, $|A| \leq 2^{n-1}$ $(m \geq 2)$ *і*

$$\begin{aligned}
&p(A) = p_0(A) \,\square\, p_1(A),\ j_0 = \log_2 |p_0(A)| + 1;\\
&p\left(A_{j_0}^{(1)}\right) = p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_0}^{(1)}\right),\ j_1 = \log_2 |p_0\left(A_{j_0}^{(1)}\right)| + 1;\\
&p\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right) = p_0\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right),\ j_2 = \log_2 |p_0\left(A_{j_1,j_0}^{(2)}\right)| + 1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right) = p_0\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right) \square\, p_1\left(A_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}^{(m-2)}\right),
\end{aligned}$$

$$j_{m-2} = \log_2 |p_0 \left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0} \right) | + 1; \tag{1.56}$$

$$p \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right) = p_0 \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right) \square \ldots \square\, p_{t_m} \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right),$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. З того, що $A = A^{(m)}$ і матриці $p(A)$, $p\left(A^{(1)}_{j_0}\right), \ldots, p\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}\right)$ задовольняють умову (1.56), випливає: в множині A та в групі S_n відповідно існують такі елементи $\mathbf{a}$, σ, що з елементів множини $\mathbf{a}^\sigma A^\sigma$ можна побудувати матрицю:

$$\begin{aligned} &p^m(A) = p_0\,(A) \square\, p_0 \left(A^{(1)}_{j_0} \right) \square\, p_0 \left(A^{(2)}_{j_1,j_0} \right) \square \ldots \\ &\square p_0 \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right) \square \ldots \square\, p_{t_m} \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Нехай $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{t_m}$ — останні рядки відповідних блоків:

$$p_1 \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right), \ldots, p_{t_m} \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right)$$

і $j_{m-1} = \log_2 \left| p_0 \left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0} \right) \right| + 1$. Побудуємо n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, що задовольняє умову:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{a}^\sigma A^\sigma \text{ і } \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}^\sigma A^\sigma \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}). \tag{1.58}$$

Перші j_{m-1} координати вектора $\mathbf{w}$ визначимо так:

$$\omega_1 = -1,\ \omega_2 = \omega_1 - 1, \ldots, \omega_{j_{m-1}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-1}-1} - 1.$$

Координати $\omega_{j_{m-1}+1}, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}$ послідовно знаходимо з рівностей:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{z}_i, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+i-1}, 0, \ldots, 0)) = \\ &\qquad = (\mathbf{z}_{i+1}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+i}, 0, \ldots, 0)), \end{aligned}$$

де $i = 1, 2, \ldots, t_m - 1$. Індекси j_{m-2}, j_{m-1} відповідних p-підмножин $A^{(m-1)}, A^{(m)}$ задовольняють одну з умов:

1) $j_{m-2} = j_{m-1} + t_m$,

2) $j_{m-2} > j_{m-1} + t_m$.

У першому випадку координату $\omega_{j_{m-2}}$ вектора $\mathbf{w}$ знаходимо за формулою $\omega_{j_{m-2}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-1}+t_m-1} - 1$. У другому випадку спочатку визначимо

$$\begin{aligned}&\omega_{j_{m-1}+t_m} = \omega_{j_{m-1}+t_m+1} = \ldots = \omega_{j_{m-2}-1} = \\ &= (\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) - 1,\end{aligned}$$

а потім $\omega_{j_{m-2}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-2}-1} - 1$.

Нехай k послідовно пробігає множину $\{3, 4, \ldots, m\}$, і для кожного фіксованого значення k розглянемо різницю $j_{m-k} - - j_{m-(k-1)}$:

1) якщо $j_{m-k} - j_{m-(k-1)} = 1$, тоді $\omega_{j_{m-k}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_m-(k-1)} - - 1$;
2) якщо $j_{m-k} - j_{m-(k-1)} > 1$, тоді

$$\begin{aligned}&\omega_{j_{m-(k-1)}+1} = \omega_{j_{m-(k-1)}+2} = \ldots = \omega_{j_{m-k}-1} = \\ &= (\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{k-1} \omega_{j_{m-i}} - 1\end{aligned}$$

і $\omega_{j_{m-k}} = \omega_1 + \ldots + \omega_{j_{m-k}-1} - 1$.

Останні координати $\omega_{j_0+1} = \ldots = \omega_n$ вектора $\mathbf{w}$ визначимо з рівності

$$\omega_n = (\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_{m-1}+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{m} \omega_{j_{m-i}} - 1. \tag{1.59}$$

З побудови вектора $\mathbf{w}$ безпосередньо випливає, що для довільного рядка $\mathbf{x}$ матриці $p^m(A)$ справджується нерівність

$$(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \geq \left((\mathbf{z}_{t_m}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_m+t_m-1}, 0, \ldots, 0)) + \sum_{i=2}^{m} \omega_{j_{m-i}} \right) = \omega_0,$$

а для будь-якого n-вимірного бульового вектора $\mathbf{y}$, що не входить у множину рядків матриці $p^m(A)$, має місце нерівність $(\mathbf{y}, \mathbf{g}) < \omega_0$. Отже, для $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}\mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ маємо:

$$\forall \mathbf{x} \in A,\ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus A \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_1). \tag{1.60}$$

Тоді, як показано в [45], існує такий вектор $\mathbf{v} \in \Omega_n^-$, що задовольняє (1.60), а це означає, що з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_{\mathbf{v}}(q)$ $(q = |A|)$. Теорему доведено.

Теорема 1.15. *Якщо* $A = A^{(m)}$ $(m \geq 2)$ *і*

$$\begin{aligned}
&p(A) = p_0(A) \,\square \ldots \square\, p_{t_0}(A),\ j_0 = \log_2 |p_0(A)| + 1,\ (t_0 \geq 2),\\
&\forall i \in \{1, 2, \ldots, t_0 - 1\}\ \left|p\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right)\right| = \left|p\left(A^{(1)}_{j_0+i-1}\right)\right|,\\
&p\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right) \square\, p_1\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right), j_1 = \log_2 \left|p_0\left(A^{(1)}_{j_0+i}\right)\right| + 1,\\
&\forall i \in \{1, 2, \ldots, t_0 - 1\}\ \left|p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right)\right| = \left|p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i-1}\right)\right|,\\
&p\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right) \square\, p_1\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right),\\
&j_2 = \log_2 \left|p_0\left(A^{(2)}_{j_1,j_0+i}\right)\right| + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\forall i \in \{1, 2, \ldots, t_0 - 1\}\ \left|p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,1,j_0+i}\right)\right| =\\
&\quad = \left|p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i-1}\right)\right|, \qquad (1.61)\\
&p\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right) \square\, p_1\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right),\\
&j_{m-2} = \log_2 \left|p_0\left(A^{(m-2)}_{j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+i}\right)\right| + 1,\\
&\forall i \in \{1, 2, \ldots, t_0 - 1\}\ p\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right) = p_0\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right) \square\\
&\ldots \square\, p_{t_m}\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i}\right),\\
&\left|p_k\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,1,j_0+i}\right)\right| = \left|p_k\left(A^{(m-1)}_{j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+i-1}\right)\right|, k \in \{0, 1, \ldots, t_m\},
\end{aligned}$$

тоді множина A *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n.

Теорема доводиться аналогічно до теореми 1.14. Різниця тільки в тому, що у даному випадку $\omega_{j_0+1} = \omega_{j_0+2} = \ldots = \ldots = \omega_{j_0+t_0-1} = \omega_{j_0}$, і за формулою (1.59) визначаються координати $\omega_{j_0+t_0}, \ldots, \omega_n$ вектора $\mathbf{w}$.

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{j+s}, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор множини $\mathbb{Z}_2^n, s \in \{0, 1, \ldots, n - j\}$ і $j \geq 2$. На множині координат $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ для фіксованих s та j визначимо функцію ε_j^k $(k \in \{0, \ldots, s\})$ наступним чином:

$$\varepsilon_j^k(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо } i \leq j - 1;\\ \alpha_i(j - r_k), & \text{якщо } i = j + k;\\ \alpha_i j, & \text{якщо } i > j + s; \end{cases} \tag{1.62}$$

де $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$. Через функції ε_j^k $(k = 0, \ldots, s)$ при фіксованих $s \in \{0, \ldots, n - j\}$ та j задаємо відображення $\varepsilon_j^s : \mathbb{Z}_2^n \to Z_{j+1}^n$ $(Z_{j+1} =$

$\{0,1,\ldots,j\},\ 2 \le j \le n)$ наступним чином:

$$\varepsilon_j^s(\mathbf{a}) = (\varepsilon_j^s(\alpha_1),\ldots,\varepsilon_j^s(\alpha_{j-1}),\varepsilon_j^0(\alpha_j),\varepsilon_j^1(\alpha_{j+1}),\ldots,\\ \varepsilon_j^s(\alpha_{j+s}),\varepsilon_j^s(\alpha_{j+s+1}),\ldots,\varepsilon_j^s(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал v_j^s на множині $\mathbb{Z}_2^n$ за формулою:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n \quad v_j^s(\mathbf{a}) = \sum_{i\in I_s(j)} \varepsilon_j^s(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^i(\alpha_{j+i}), \tag{1.63}$$

де $I_s(j) = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j, j+1,\ldots,j+s\}$. За допомогою функціонала v_j^s для кожного $k \in \{0,1,\ldots,s\}$ формуємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(r_k,s)}$ так:

$$F_{j+k}^{(r_k,s)} = \{\mathbf{a} \in m(L_{j+k}^*\,0\ldots0) \mid v_j^s(\mathbf{a}) \le j-1\},$$

де $m(L_{j+k}^*\,0\ldots0)$ — множина бульових векторів, що побудована з рядків матриці $\big(L_{j+k}^*\,0\ldots0\big)$, а $r_0, r_1,\ldots,r_s \in \{1,\ldots,j-1\}$.

Теорема 1.16. *Якщо в множині $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ ($|A| \le 2^{n-1}$), групі S_n відповідно існують такі елементи $\mathbf{a},\sigma$ і такі цілі числа $r_0 \ge r_1 \ge \ldots \ge r_s > 0$ ($r_0 \le j-1$), що*

$$\mathbf{a}^\sigma A^\sigma = m(L_j\,\underbrace{0\ldots0}_{n-j}) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)}\right), \tag{1.64}$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. Задаємо n-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$ наступним чином: $\omega_1 = \ldots = \omega_{j-1} = -1,\ \omega_j = r_0 - j, \omega_{j+1} = = r_1 - j,\ldots,\omega_{j+s} = r_s - j, \omega_{j+s+1} = \ldots = \omega_n = -j$. За побудовою вектора $\mathbf{w}$ маємо:

$$\min\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_j\,0\ldots0)\} = 1-j,\\ \forall k \in \{0,1,\ldots,s\}\ \min\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in F_{j+k}^{(r_k,k)}\} = 1-j >\\ > \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_{j+k}^*\,0\ldots0) \setminus F_{j+k}^{(r_k,k)}\} = -j,\\ \forall t \in \{s+1,\ldots,n\}\ \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_t^*\,0\ldots0)\} = -j$$

Тоді з (1.64) безпосередньо випливає:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{a}^\sigma A^\sigma, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}^\sigma A^\sigma\ (\mathbf{x},\mathbf{w}) > (\mathbf{y},\mathbf{w}). \tag{1.65}$$

Отже, існує такий вектор $\mathbf{v} \in \Omega_n^-$ [45], який також задовольняє умову (1.65). Це означає, що існує такий елемент $\xi \in S_q$ ($q = |A|$), що $\mathbf{a}^\sigma (A_\xi)^\sigma = L_\mathbf{v}(q)$, де $L_\mathbf{v} \in E_n^-$. Тоді з елементів множини A можна побудувати передматрицю толерантності $L_1(q)$ $\left(L_1 = \mathbf{a} L_\mathbf{v}^{\sigma^{-1}}\right)$, отже, теорему доведено.

Розглянемо узагальнення функцій ε_j^k і функціоналу v_j^s. Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{j+s}, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, $s \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$ ($j \geq 2$). Для фіксованих $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ і $t \in \{1, 2, j-1\}$ будуємо множину векторів $u_j(t)$:

$$\mathbf{u}_j(t) = \{(u_1, \ldots, u_t) \mid u_1 + ... + u_t = j-1,\ u_1, \ldots, u_t \in \{1, 2, \ldots, j-t\}\}$$

і через неї визначимо $U_j = \bigcup\limits_{t=1}^{j-1} \mathbf{u}_j(t)$. Нехай $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{l_\mathbf{u}}) \in U_j$, $l_\mathbf{u} \geq 2$ ($l_\mathbf{u}$ — розмірність вектора $\mathbf{u}$) і $\forall k \in \{0, 1, \ldots, s\}$

$$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},k)}(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо } i \leq u_1, \\ \alpha_i 2^{r-1}, & \text{якщо } \sum\limits_{p=1}^{r-1} u_p < i \leq \sum\limits_{p=1}^{r} u_p, \\ \alpha_i \left(\sum\limits_{p=1}^{l_\mathbf{u}} u_p 2^{p-1} - r_k + 1 \right), & \text{якщо } i = j+k, \\ \alpha_i \left(\sum\limits_{p=1}^{l_\mathbf{u}} u_p 2^{p-1} + 1 \right), & \text{якщо } i > j+s, \end{cases}$$

де $r \in \{2, 3, \ldots, l_\mathbf{u}\}$. Якщо $l_\mathbf{u} = 1$, то $\varepsilon_j^{(\mathbf{u},k)} = \varepsilon_j^k$. Для фіксованих $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $s \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$ і $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{l_u}) \in U_j$ задаємо відображення $\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)} : \mathbb{Z}_2^n \to Z_{h+1}^n$ $\left(h = \sum\limits_{p=1}^{l_\mathbf{u}} u_p 2^{p-1} + 1\right)$ так:

$$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) = (\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_1), \ldots, \varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j-1}), \varepsilon_j^{(\mathbf{u},0)}(\alpha_j), \varepsilon_j^{(\mathbf{u},1)}(\alpha_{j+1}), \ldots,$$
$$\varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j+s}), \varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_{j+s+1}), \ldots, \varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал $v_j^{(\mathbf{u},s)}$ на множині $\mathbb{Z}_2^n$ за допомогою наступної формули:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n\ v_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) = \sum_{i \in I_s(j)} \varepsilon_j^{(\mathbf{u},s)}(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^{(\mathbf{u},i)}(\alpha_{j+i}),$$

де $I_s(j) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1, \ldots, j+s\}$.

Через функціонал $v_j^{(\mathbf{u},s)}$ задаємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,s)}$:

$$F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,s)} = \left\{ \mathbf{a} \in m(L_{j+k}^{*}\, 0 \ldots 0) \mid v_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) \leq \sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} \right\},$$

де $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \{1, \ldots, \sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1}\},\ k \in \{0, 1, \ldots, s\}$

Теорема 1.17. *Якщо в множині $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ ($|A| \leq 2^{n-1}$), групі S_n і в множині векторів U_j відповідно існують такі елементи $\mathbf{a}, \sigma, \mathbf{u}$ і такі цілі числа $r_0 \geq r_1 \geq \ldots r_s > 0$ ($r_0 \leq \sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1}$), що*

$$\mathbf{a}^{\sigma} A^{\sigma} = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}_{n-j}) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+s}^{(\mathbf{u},r_i,s)} \right), \tag{1.66}$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. Дано, що відносно елементів $\mathbf{a} \in A, \sigma \in S_n$ і $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{l_{\mathbf{u}}})$ справджується рівність (1.66). Покажемо, що можна побудувати вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, який задовольняє умову

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{a}^{\sigma} A^{\sigma},\ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \mathbf{a}^{\sigma} A^{\sigma}\ (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}). \tag{1.67}$$

Визначимо координати ω_i вектора $\mathbf{w}$ наступним чином: $\omega_1 = \ldots = \omega_{u_1} = -1, \omega_{u_1+1} = \ldots = \omega_{u_1+u_2} = -2, \omega_{u_1+u_2+1} = \ldots = \omega_{u_1+u_2+u_3} = -2^2, \ldots, \omega_{u_1+u_2+\ldots+u_{l_{\mathbf{u}}-1}+1} = \ldots = \omega_{u_1+u_2+\ldots+u_{l_{\mathbf{u}}}} = -2^{l_{\mathbf{u}}-1}, \omega_j = r_0 - \left(\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} + 1 \right), \omega_{j+1} = r_1 - \left(\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} + 1 \right), \ldots, \omega_{j+s} = r_s - \left(\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} + 1 \right), \omega_{j+s+1} = \ldots = \omega_n = -\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} - 1$. Із побудови вектора $\mathbf{w}$ випливає $\min\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_j\, 0 \ldots 0)\} = = -\sum\limits_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1}$,

$$\forall k \in \{0,\ldots,s\}\ \min\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,k)}\} = -\sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} >$$
$$-\sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} - 1 = \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_{j+k}^{*}\, 0 \ldots 0) \setminus F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,k)}\}\},$$
$$\forall t \in \{s+1,\ldots,n\}\ \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in m(L_t^{*}\, 0 \ldots 0)\} =$$
$$= -\sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1} - 1.$$

Тоді з (1.66) безпосередньо випливає (1.67) і аналогічно до того, як у теоремі 1.16, можна показати існування такої матриці толерантності $L_1 \in E_n$, перші q рядки ($q = |A|$) якої можуть бути побудовані з елементів множини A, тобто існує такий елемент $\xi \in S_q$, що $A_\xi = L_1(q)$. Отже, множина A допускає зображення матрицею толерантності $L_1 \in E_n$. Теорему доведено.

1.5. Реалізація функцій алгебри логіки одним нейронним елементом

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ і $\mathbb{Z}_2^n$ — n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$. Для булевої функції $f\,(x_1,\ldots,x_n)$ $(f:\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2)$ визначимо множини $f^{-1}(1), f^{-1}(0)$:

$$f^{-1}(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n \mid f(\mathbf{x}) = 1\},\ \ f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n \mid f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

За означенням, нейронний елемент (НЕ) з пороговою функцією активації з вектором структури $[\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n);\omega_0]$ ($\mathbf{w}$ — n-вимірний дійсний вектор, який називається ваговим, ω_0 — дійсне число (поріг)) реалізує булеву функцію $f\,(x_1,\ldots,x_n)$, якщо для кожного $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$ виконується умова

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{w}) < \omega_0.$$

Бульова функція $f\,(x_1,\ldots,x_n)$, що реалізується одним нейронним елементом із пороговою функцією активації, називається нейрофункцією (пороговою).

Відомо [45], що коли бульова функція реалізується одним НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \notin \Omega_n$ і порогом ω_0, то існує НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w}' \in \Omega_n$ і порогом ω', що також реалізує функцію $f\,(x_1,\ldots,x_n)$.

Звідси випливає, що всі нейрофункції від n змінних можуть бути реалізовані на НЕ з ваговими векторами з Ω_n. Далі будемо розглядати тільки НЕ з пороговою функцією активації та ваговим вектором $\mathbf{w} \in \Omega_n$.

Нехай $\mathbf{w}$ — фіксований вектор із Ω_n. Позначимо через $Q(\mathbf{w})$ клас усіх нейрофункцій із ваговим вектором $\mathbf{w}$, а через $\rho(\mathbf{w})$ — упорядковану множину бульових векторів $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{2^n})$, таких, що $(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}) > (\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{w})$. Очевидно, кількість елементів $|Q(\mathbf{w})|$ класу $Q(\mathbf{w})$ дорівнює числу $2^n + 1$.

Вектори $\mathbf{w}$ і $\mathbf{w}' \in \Omega_n$ називаються еквівалентними, якщо $\rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w}')$.

Теорема 1.18. *Нехай $[\mathbf{w}; \omega_0]$ — вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{w} \in \Omega_n$ і вектори $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ еквівалентні. Тоді знайдеться таке число ω_0', що НЕ з вектором структури $[\mathbf{w}'; \omega_0']$ також реалізує функцію $f(\mathbf{x})$.*

Доведення. Нехай $\max\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(0)\} = (\mathbf{x}_m, \mathbf{w})$. Тоді з рівності $\rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w}')$ випливає, що

$$(\mathbf{x}_m, \mathbf{w}') = \max\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}') \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(0)\}.$$

Отже, якщо число ω_0' вибрати з інтервалу

$$\left(\max\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}') \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(0)\}, \min\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}') \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(1)\}\right),$$

то $\mathbf{x} \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{w}') < \omega_0'$, тобто НЕ з вектором структури $[\mathbf{w}'; \omega_0']$ також реалізує функцію f. Отже, теорему доведено.

Із теореми випливає, що $\rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w}') \Rightarrow Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}')$. Отже, ρ на множині Ω_n також індукує відношення еквівалентності. Класи еквівалентності множини Ω_n, які породжені відношенням ρ, позначимо через Ω_n^i, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Теорема 1.19. *Якщо $\mathbf{w}_i$ — представник класу Ω_n^i, то множина всіх нейрофункцій π_n співпадає з $\bigcup\limits_{i=1}^{t} Q(\mathbf{w}_i)$.*

Дійсно, $\pi_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n} Q(\mathbf{w}) = \bigcup\limits_{i=1}^{t} Q(\mathbf{w}_i)$, оскільки для еквівалентних векторів $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \Omega_n \quad Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}')$ і $\Omega_n = \bigcup\limits_{i=1}^{t} \Omega_n^i$.

Нехай L — матриця толерантності з $E_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_{\mathbf{w}}$ і $m(\tilde{L}(i))$ множина n-вимірних бульових векторів, що побудована з перших i рядків матриці

$\tilde{L} = L \square L^*$. Позначимо через $\varphi_L^i(x_1, \ldots, x_n)$ характеристичну функцію множини $m(\tilde{L}(i))$, тобто $\varphi_L^i(\mathbf{a}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{a} \in m(\tilde{L}(i))$. Якщо покласти $\varphi_L^0(\mathbf{a}) = 0$ для довільного $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$, тоді

$$\pi_n = \bigcup_{i=1}^{t} Q(\mathbf{w}_i) = \bigcup_{L \in E_n} \bigcup_{i=0}^{2^n} \varphi_L^i(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.68}$$

Під ядром $K(f)$ бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ будемо розуміти множину $f^{-1}(1)$, якщо $\left|f^{-1}(1)\right| \le \left|f^{-1}(0)\right|$, і $f^{-1}(0)$ у протилежному випадку.

Запишемо елементи ядра $K(f)$ функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ у довільному порядку в рядки матриці (α_{ij}), зберігаючи для одержаної матриці позначення $K(f)$, тобто $K(f) = (\alpha_{ij})$. Нехай $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$ і $K_\xi^\sigma(f) = (\alpha_{\xi(i)\sigma(j)})$, де $\xi(i), \sigma(j)$ — дії відповідних підстановок ξ та σ на числа i, j.

Теорема 1.20. *Бульова функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли її ядро $K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n.*

Доведення. Дано, що бульова функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом із ваговим вектором $\mathbf{w} \in \Omega_n$. Це означає, що $f\,(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^q_{L_\mathbf{w}}(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$ і $\overline{f\,(x_1, \ldots, x_n)} = \varphi^q_{L_{\mathbf{w}_1}}(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $K(f) =$
$= f^{-1}(0)$, де $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{w}$ і $\overline{f}$ — інвертована функція для f. Отже, існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$, що $K_\xi(f) = L_\mathbf{w}(q)$ або $K_\xi(f) = L_{\mathbf{w}_1}(q)$. Необхідність доведено.

Дано, що $K_\xi(f) = L_\mathbf{w}(q)$, де $L_\mathbf{w} \in E_n$ і $\xi \in S_q$. Тоді з (1.68) випливає: $f \in \pi_n$ або $\overline{f} \in \pi_n$. Якщо $f \in \pi_n$, то функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w}$. У випадку, коли $\overline{f} \in \pi_n$ на нейронному елементі реалізується функція $\overline{f\,(x_1, \ldots, x_n)}$. Але функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ і $\overline{f\,(x_1, \ldots, x_n)}$, як відомо [46], або одночасно реалізуються, або одночасно не реалізуються одним нейронним елементом. Отже, теорему доведено.

Нехай $K(f) = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ — ядро бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$. Кожному $\mathbf{a}_i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ поставимо у відповідність елемент $\mathbf{g}_i = \left((-1)^{\alpha_1^i}, \ldots, (-1)^{\alpha_n^i}\right)$ і побудуємо множину $T(f) = \{K(f)_i = \mathbf{g}_i K(f) \mid i =, 1, 2, \ldots, q\}$, яку назвемо множиною зведених ядер бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 1.21. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли хоча б одне її зведене ядро $K(f)_i \in T(f)$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n^-.*

Доведення. Якщо функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом, то згідно з теоремою 1.20 її ядро $K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n, тобто існує такий елемент $\xi \in S_q$ ($q = |K(f)|$) і матриця толерантності $H \in E_n$, що $K_\xi(f) = H(q)$. На основі теореми 1.2, будь-яку матрицю $H \in E_n$ можна записати у вигляді $H = (\mathbf{g}L)^\sigma$, де $\mathbf{g} \in G_n,\ \sigma \in S_n$ і $L \in E_n^-$. Звідси $L = \mathbf{g}^{-1}H^{\sigma^{-1}} = \mathbf{g}H^{\sigma^{-1}}$. Тоді з того, що $K_\xi(f) = H(q)$, безпосередньо маємо $\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = L(q)$. Перший рядок довільної матриці толерантності L з E_n^- є нульовим. Отже, ядро $K(f)$ містить такий вектор $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, що

$$\mathbf{g}^\sigma = \left((-1)^{\alpha_1^i}, \ldots, (-1)^{\alpha_n^i}\right)$$

і $\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (\mathbf{g}^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{g}_i K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i = L(q)$, тобто зведене ядро $K(f)_i$ допускає зображення матрицею толерантності $L \in E_n^-$.

Нехай зведене ядро $K(f)$ функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ допускає зображення матрицею $L_\mathbf{w} \in E_n^-$. Тоді нейронний елемент із ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{g}_i\mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ і порогом $\omega_0 \in (c_q, c_{q+1})$, де $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1} = (L_{\mathbf{w}_1} \,\square\, L_{\mathbf{w}_1}^*) \cdot \mathbf{w}_1^T$ реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$ або $\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$ залежно від того чи $K(f) = f^{-1}(1)$ або $K(f) = f^{-1}(0)$. Отже, функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом. Теорему доведено.

Нехай $K(f) = \{\mathbf{a}_1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, \mathbf{a}_q = (\alpha_1^q, \ldots, \alpha_n^q)\}$. Зведене ядро $K(f)_i$ відносно елемента $\mathbf{a}_i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i) \in K(f)$ будуємо так:

$$K(f)_i = \mathbf{a}_i K(f) = \{(\alpha_1^i \oplus \alpha_1, \ldots, \alpha_n^i \oplus \alpha_n) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K(f)\},$$

де $\oplus$ — сума за модулем 2. Проілюструємо теорему 1.21 на прикладах.

Приклад 1.1. Чи реалізується бульова функція $f(x_1, \ldots \ldots, x_4)$ одним нейронним елементом, якщо
$f^{-1}(1) = \{(0,1,1,1),(1,1,1,1),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(1,0,1,1)\}$? Послідовно побудуємо зведені ядра $K(f)_i$ ($i = 1,2,3,4,5$) функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ і відносно кожного з них з'ясовуємо, чи задовольняє воно умови теореми. Як тільки знайдемо зведене ядро, що задовольняє умову теореми 1.21,

зробимо висновок, що функція реалізується одним нейронним елементом. Побудуємо:

$$K(f)_1 = (0,1,1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ і ξ — одиничний елемент групи S_5, то $K_\xi^\sigma(f)_1 = L_7(5)$ $(L_7 \in E_4^-)$. Отже, функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ є нейрофункцією і реалізується на нейронному елементі з ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{w}^{\sigma^{-1}}$ $(\mathbf{a}_1 = (0,1,1,1))$, де $\mathbf{w} = (-1; -2; -2; 5; -6)$ знаходимо з умови $(L_7 \square L_7^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T$. Тоді НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = (-1; 2; 6; 2, 5)$ і порогом $\omega_0 \in (c_5, c_6)$ (c_i — i-а координата вектора $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T = ((\mathbf{a}_1 L_7^{\sigma-1}) \square (\mathbf{a}_1 L_7^{\sigma-1})^*) \cdot \mathbf{w}_1^T$) реалізує функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Приклад 1.2. Нехай $K(f) = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,\ 1,1,1)\}$ — ядро бульової функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Знаходимо множину зведених ядер $T(f) = \{K(f)_1, K(f)_2, K(f)_3\}$ і з елементів кожного зведеного ядра будуємо матрицю, розташувавши їх довільним чином у рядки матриці, для якої зберігаємо позначення $K(f)_i$. Таким чином:

$$T(f) = \left\{ K(f)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, K(f)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. K(f)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

З елементів $K(f)_i$ множини $T(f)$ шляхом перестановки рядків та стовпчиків не можна побудувати передматрицю толерантності жодної матриці толерантності L з E_4^-. Отже, функція f не реалізується одним нейронним елементом.

Якщо за підмножину $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ вибрати ядро бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, то з теорем 1.20, 1.21 та з результатів підрозділів 1.2–1.4 безпосередньо випливають наступні теореми:

Теорема 1.22. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{conv}(K(f)) \cap \mathrm{conv}(\mathbb{Z}_2^n \setminus K(f)) = \varnothing$.

Теорема 1.23. *Якщо зведене ядро $K(f)_i \in T(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ містить s_i нульових стовпців і $|K(f)| \leq 2^{n-s_i-1}$, то функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$ і матриця толерантності $V \in E^-_{n-s_i}$, що $K^\sigma_\xi(f)_i = (V(q)\ \underbrace{0_{m_i} \ldots 0_{m_i}}_{s_i})$, де $m_i = n - s_i$ і 0_{m_i} — вектор-стовпчик розмірності $q \times 1$.*

Теорема 1.24. *Якщо бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом, тоді $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K(f) \Rightarrow \overline{\mathbf{a}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \notin K(f)$, де $\overline{\alpha}_i$ — інвертоване значення α_i.*

Нехай $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і $K_\mathbf{a} = \{i \mid \alpha_i = 1\}$, $S(K_\mathbf{a})$ — множина усіх підмножин множини $K_\mathbf{a}$ і $\|\mathbf{a}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Теорема 1.25. *Якщо бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом, то в множині зведених ядер $T(f)$ знайдеться таке ядро $K(f)_r$, що для довільного $\mathbf{a} \in K(f)_r$ має місце:*

$$\mathbf{a} \in K(f)_r \Rightarrow \bigcup_{K_\mathbf{b} \in S(K_\mathbf{a})} \{\mathbf{b}\} \subset K(f)_r.$$

Наслідок 1. *Якщо бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним НЕ, то в множині зведених ядер знайдеться таке ядро $K(f)_r$, що для довільного $\mathbf{a}$ з $K(f)_r$ та для будь-якого невід'ємного цілого числа $k < ||\mathbf{a}||$ справджується нерівність*

$$\Big|\{\mathbf{b} \in K(f)_r \mid ||b|| = k\}\Big| \geq C^k_{||\mathbf{a}||},$$

де C^m_n — біномний коефіцієнт.

Нехай $T(f) = \{K(f)_1, \ldots, K(f)_q\}$ — множина зведених ядер бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, $k^*_i = \max\{||\mathbf{a}|| \mid \mathbf{a} \in \mathbf{a}_i A\}$ і $k^* = \min\{k^*_i \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$.

Наслідок 2. *Якщо бульова функція $f(x_1, \dots, x_n)$ з ядром $K(f)$ реалізується одним нейронним елементом, тоді*

$$|K(f)| \geq \sum_{i=0}^{k^*} C_{k^*}^i.$$

Приклад 1.3. Чи реалізується бульова функція з ядром $K(f) = \{(1,1,0,0,0,0),(0,1,1,0,0,0),(0,0,1,1,0,0),(0,0,0,1,1,0),(0,0,0,0,1,1)\}$ одним нейронним елементом? Побудуємо множину зведених ядер:
$T(f) = \{K(f)_1, \dots, K(f)_5\}$:
$K(f)_1 = \{(0,0,0,0,0,0),(1,0,1,0,0,0),(1,1,1,1,0,0),$
$(1,1,0,1,1,0),(1,1,0,0,1,1)\}$;
$K(f)_2 = \{(1,0,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,1,0,0),$
$(0,1,1,1,1,0),(0,1,1,0,1,1)\}$;
$K(f)_3 = \{(1,1,1,1,0,0),(0,1,0,1,0,0),(0,0,0,0,0,0),$
$(0,0,1,0,1,0),(0,0,1,1,1,1)\}$;
$K(f)_4 = \{(1,1,0,1,1,0),(0,1,1,1,1,0),(0,0,1,0,1,0),$
$(0,0,0,0,0,0),(0,0,0,1,0,1)\}$;
$K(f)_5 = \{(1,1,0,0,1,1),(0,1,1,0,1,1),(0,0,1,1,1,1),$
$(0,0,0,1,0,1),(0,0,0,0,0,0)\}$.
Жодне зведене ядро $K(f)_i$ $(i = 1, \dots, 5)$ не задовольняє умови теореми 1.25. Отже, функція f з ядром $K(f)$ не може бути реалізована одним нейронним елементом.

Нехай $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ і $n(A) = \{i \mid \mathbf{e}_i \in A\}$.

Теорема 1.26. *Якщо бульова функція $f(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом і її ядро $K(f)$ задовольняє нерівність $2^j < |K(f)| \leq 2^{j+1}$ $(j \in \{1, 2, \dots, n-2\})$, тоді в множині зведених ядер $T(f)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$, для якого справджуються нерівності:*

1) *для будь-якого $\mathbf{a} \in K(f)_i$ $||\mathbf{a}|| \leq j + 1$;*
2) $|n(K(f)_i)| \geq j + 1$.

Приклад 1.4. Нехай $f^{-1}(0) = \{(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0),(0,1,1,1,0,0,0,0,0,0)\}$. Чи реалізується бульова функція $f(x_1, \dots, x_{10})$ одним НЕ? Ядро $K(f)$ задовольняє нерівність

$2 < |K(f)| \leq 2^2$. Побудуємо множину зведених ядер $T(f)$: $K(f)_1 = f^{-1}(0)$, $K(f)_2 = \{(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), 1,0,0,$ $0,0,0,0,0,0,0\}, K(f)_3 = \{(0,1,1,1,0,0,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0,0,$ $0,0,0), (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)\}$. За допомогою простої перевірки легко переконатися в тому, що жодне ядро не задовольняє умови теореми, тобто функція $f(x_1,\ldots,x_{10})$ не реалізується одним НЕ.

Нехай $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$. Відстань $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$, групу $H(\mathbf{a},\mathbf{b})$ та суміжний клас $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b})$ визначимо згідно з підрозділом 1.3.

Теорема 1.27. *Якщо бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується одним нейронним елементом, тоді для будь-яких двох елементів $\mathbf{a},\mathbf{b} \in K(f)$, для яких $|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap (\mathbb{Z}_2^n \setminus K(f))| \geq 2$, і для довільних елементів $\mathbf{g}$, $\mathbf{h} \in H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap (\mathbb{Z}_2^n \setminus K(f))$ справджується нерівність $\rho(\mathbf{g},\mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a},\mathbf{b})$.*

Нехай $A \subset \mathbb{Z}_2^n$, $\mathbf{a} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n) \in A$, $s(i;\mathbf{a}) = \alpha_i$ і $s(i;A) = \sum\limits_{\mathbf{a}\in A} s(i;\mathbf{a})$.

Теорема 1.28. *Якщо бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується одним нейронним елементом, тоді в множині зведених ядер $T(f)$ знайдеться таке ядро $K(f)_t$ і такий елемент $\sigma \in S_n$, що для всіх $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ справджується нерівність*

$$s(i-1;K^\sigma(f)_t) \geq s(i;K^\sigma(f)_t),$$

де $K^\sigma(f)_t$ допускає зображення матрицями з E_n^-.

Нехай $A = \{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_q\}$ $(q \leq 2^{n-1})$ — довільна підмножина множини $\mathbb{Z}_2^n$ і $p(A), p^2(A), \ldots$ — матриці, які побудовані з елементів A відповідно до правил, описаних у підрозділі 1.3.

Теорема 1.29. *Якщо бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ з ядром $K(f)$ $(q = |K(f)|)$ реалізується одним нейронним елементом, тоді в множині зведених ядер $T(f)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$, такі підстановки $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ і таке число $k \in \{1,2,\ldots,j_0-1\}$ $(2 \leq j_0 \leq n)$, що $K_\xi^\sigma(f)_i = p^k(K(f)_i)$.*

Приклад 1.5. Розглянемо бульову функцію $f(x_1,\ldots,x_8)$ з ядром $K(f) = \{\mathbf{a}_1 = (0,0,1,0,1,1,0,1), \mathbf{a}_2 = (0,1,1,0,1,1,0,1),$ $\mathbf{a}_3 = (1,0,1,0,1,1,0,1), \mathbf{a}_4 = (0,0,1,1,1,1,0,1), \mathbf{a}_5 = (0,0,0,0,$ $1,1,0,1)\}$. Побудуємо множину зведених ядер $T(f) = \{K(f)_1,$ $\ldots, K(f)_5\}$. Якщо за $\xi \in S_5$ вибрати підстановку $\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{1\ 3\ 2\ 5\ 4}$, то матриця

$K_\xi(f)_1$ має наступний вигляд:

$$K_\xi(f)_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad (1.69)$$

тобто $K_\xi(f)_1 = (L_{14}(5)\,0\,0\,0\,0)$, де $L_{14} \in E_4^-$. Тоді, згідно з теоремою 1.22, функція $f(x_1, \ldots, x_8)$ реалізується одним нейронним елементом. Із (1.69) випливає: $K_\xi(f)_1 = (L_2\,0\,0\,0\,0\,0\,0)\square$
$\square(L_2^*(1)\,0\,0\,0\,0\,0\,0) \square (L_3^*(1)\,0\,0\,0\,0\,0) \square (L_4^*(1)\,0\,0\,0\,0) = p(K(f)_1)$.

Теорема 1.30. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$ і такі елементи $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$, що $K_\xi^\sigma(f)_i = p(K(f)_i)$, тоді $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.*

Приклад 1.6. Нехай $n = 10$, $\mathbf{a}_i = (0,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$,
$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10 \\ 2&1&4&3&6&5&8&7&10&9 \end{smallmatrix}\right)$, $p(K(f)_i) = (L_5\,0\,0\,0\,0\,0) \square (L_5^*(7)\,0\,0\,0\,0\,0)\square$
$\square(L_6^*(5)\,0\,0\,0\,0) \square (L_7^*(4)\,0\,0\,0) \square (L_8^*(1)\,0\,0)$ і $K_\xi^\sigma(f)_i = p(K(f)_i)$. Знаходимо вектор структури нейронного елемента, що реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$. Згідно з теоремою 1.11 будуємо 10-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})$:

$$\omega_1 = -1, \omega_2 = \omega_1 - 1 = -2, \ldots, \omega_5 = -\omega_1 - \ldots - \omega_4 - 1 = -16;$$

останні рядки матриць $(L_5^*(7)\,0\,0\,0\,0\,0), (L_6^*(5)\,0\,0\,0\,0), (L_7^*(4)\,0\,0\,0)$,
$(L_8^*(1)\,0\,0)$ відповідно позначимо через

$$\begin{gathered} \mathbf{z}_0 = (0,1,1,0,1,0,0,0,0,0), \\ \mathbf{z}_1 = (0,0,1,0,0,1,0,0,0,0), \\ \mathbf{z}_2 = (1,1,0,0,0,0,1,0,0,0), \\ \mathbf{z}_3 = (0,0,0,0,0,0,0,1,0,0) \end{gathered}$$

і з наступних рівнянь:

$$\begin{gathered} (\mathbf{z}_0, (\omega_1, \ldots, \omega_5, 0,0,0,0,0)) = (\mathbf{z}_1, (\omega_1, \ldots, \omega_5, \omega_6, 0,0,0,0)), \\ (\mathbf{z}_1, (\omega_1, \ldots, \omega_6, 0,0,0,0)) = (\mathbf{z}_2, (\omega_1, \ldots, \omega_6, \omega_7, 0,0,0)), \\ (\mathbf{z}_2, (\omega_1, \ldots, \omega_7, 0,0,0)) = (\mathbf{z}_3, (\omega_1, \ldots, \omega_7, \omega_8, 0,0)), \end{gathered}$$

послідовно знаходимо: $\omega_6 = -18, \omega_7 = -19, \omega_8 = -22$, потім: $\omega_9 = \omega_{10} = (\mathbf{z}_3, (\omega_1, \ldots, \omega_8, 0, 0)) - 1 = -23$. За допомогою елементів

$\mathbf{a}_i, \sigma$ $(\sigma^{-1} = \sigma)$ з вектора $\mathbf{w} = (-1, -2, -4, -8, -16, -18, -19, -22, -23, -23)$ одержуємо вектор $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (-2, 1, -8, 4, -18, 16, -22, 19, -23, 23)$ і покладемо, що $\omega_0 = (\mathbf{w}_1, \mathbf{a}_i \mathbf{z}_3^{\sigma^{-1}}) = 41$.

Якщо $K(f) = f^{-1}(1)$, тоді нейронний елемент із вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (-2, 1, -8, 4, -18, 16, -22, 19, -23, 23); 41]$ реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, у протилежному випадку $(K(f) = = f^{-1}(0))$ функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується на НЕ із ваговим вектором $\mathbf{w}_2 = -\mathbf{w}_1 = (2, -1, 8, -4, 18, -16, 22, -19, 23, -23)$ і порогом $\omega_0' = -\omega_0 + 1 = -40$.

Теорема 1.31. *Якщо ядро $K(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняє нерівність $|K(f)| < 12$, то функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли в множині зведених ядер $T(f)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$ і такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$, що $K_\xi^\sigma(f)_i = p(K(f)_i)$*

Теорема 1.32. *Якщо для кожного зведеного ядра $K(f)_i$, де $i = 1, 2, \ldots, q$ $(q = |K(f)|)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ блок $p_0(K(f)_i)$ матриці*

$$p(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \,\square\, p_1(K(f)_i) \,\square\, \ldots \,\square\, p_{t_0}(K(f)_i)$$

задовольняє нерівність $|p_0(K(f)_i)| \leq 2$, то функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли в множині зведених ядер знайдеться таке ядро $K(f)_{i_0}$ і такі елементи $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$, що $K_\xi^\sigma(f)_{i_0} = p(K(f)_{i_0})$.

Нехай $K(f)_i \in T(f)$ і

$$\begin{aligned} p(K(f)_i) &= p_0(K(f)_i) \,\square\, p_1(K(f)_i) \,\square\, \ldots \,\square\, p_{t_0}(K(f)_i), \\ p^2(K(f)_i) &= p_0(K(f)_i) \,\square\, p_1^2(K(f)_i) \,\square\, \ldots \,\square\, p_{t_0}^2(K(f)_i), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} p_1^2(K(f)_i) &= p_0\left(K(f)_{i,j_0}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0}}\left(K(f)_{i,j_0}^{(1)}\right), \\ p_2^2(K(f)_i) &= p_0\left(K(f)_{i,j_0+1}^{(1)}\right) \square \ldots \square\, p_{t_{j_0+1}}\left(K(f)_{i,j_0+1}^{(1)}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{t_0}^2(K(f)_i) &= p_0\left((K(f)_{i,j_0+t_0-1}^{(1)})\right) \square \ldots \\ &\ldots \square\, p_{t_{j_0+t_0-1}}\left((K(f)_{i,j_0+t_0-1}^{(1)})\right), \end{aligned} \tag{1.70}$$

$j_0 = \log_2 |p_0(K(f)_i)| + 1$, $K(f)^{(1)}_{i,r} = \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, 1, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \,|\, \mathbf{a} \in K^{\sigma}(f)_i\}$, σ вибирається так, щоб $j_0 \to \max$.

Теорема 1.33. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$ і такі елементи $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q (q = |K(f)|)$, що $K^{\sigma}_{\xi}(f)_i = p^2(K(f)_i)$ і блоки $p^2_1(K(f)_i), \ldots, p^2_{t_0}(K(f)_i)$ матриці $p^2(K(f)_i)$ задовольняють умови*

$$\left|p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}\right)\right| = \left|p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r+1}\right)\right|, \; r = 0, 1, \ldots, t_0 - 2; \qquad (1.71)$$

при кожному фіксованому $r \in \{0, 1, \ldots, t_0 - 2\}$ $t_{j_0+r} = t_{j_0+r+1}$ і для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, t_{j_0+r-1}\}$

$$\left|p_k\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}\right)\right| - \left|p_k\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r+1}\right)\right| = q_r \geq 0, \qquad (1.72)$$

тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Приклад 1.7. Нехай $n = 10$, $\mathbf{a}_i = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$K^{\sigma}(f)_i = p^2(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \,\square\, p^2_1(K(f)_i) \,\square\, p^2_2(K(f)_i)$, де $p_0(K(f)_i) = (L_7\, 0\, 0\, 0), p^2_1(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right) \square\, p_1\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right) \square$
$\square\, p_2\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right) \square\, p_3\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right) = (L_4\, 0\, 0\, 1\, 0\, 0\, 0) \,\square\, (L^*_4(4)\, 0\, 0\, 1\, 0\, 0\, 0) \,\square$
$\square\, (L^*_5(2)\; 0\; 1\; 0\; 0\; 0) \,\square\, (L^*_6(2)\; 1\; 0\; 0\; 0)$, $p^2_2(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,8}\right) \square$
$\square p_1\left(K(f)^{(1)}_{i,8}\right) \square\, p_2\left(K(f)^{(1)}_{i,8}\right) \square\, p_3\left(K(f)^{(1)}_{i,8}\right) = (L_4\; 0\; 0\; 0\; 1\; 0\; 0) \,\square$
$\square (L^*_4(3)\, 0\, 0\, 0\, 1\, 0\, 0) \,\square\, (L^*_5(1)\, 0\, 0\, 1\, 0\, 0) \,\square\, (L^*_6(1)\, 0\, 1\, 0\, 0)$.

Знаходимо вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{10})$. Згідно з теоремою 1.13 побудуємо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})$: $j_1 = \log_2\left|p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right)\right| + 1 = 4$, тоді $\omega_1 = -1, \omega_2 = -2, \omega_3 = -4$, $\omega_4 = -8$. Вектори $\mathbf{z}_0 = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{z}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ побудовані з останніх рядків відповідних матриць $p_1\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right), p_2\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right), p_3\left(K(f)^{(1)}_{i,7}\right)$. Координати ω_5, ω_6 вектора $\mathbf{w}$ послідовно знаходимо з рівностей:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{z}_s, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_1}, \omega_{j_1+1}, \ldots, \omega_{j_1+s} 0, \ldots, 0)) = \\ &= (\mathbf{z}_{s-1}, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_1}, \omega_{j_1+1}, \ldots, \omega_{j_1+s-1} 0, \ldots, 0)), \; s = 1, 2.\end{aligned}$$

У даному випадку $\omega_5 = -10, \omega_6 = -10$. Параметри $j_0 = 7,\ j_1 = = 4,\ t_7 = 3$ задовольняють умову $j_0 - (j_1 + t_{j_0} - 1) = 1$. Тоді $\omega_7 = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_6 - 1 = -36$. Параметр $t_0 = 2$, і згідно з формулою (теорема 1.13) $\omega_{j_0+i} = \omega_{j_0+i-1} - q_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, t_0 - 1)$ визначимо $\omega_8 = \omega_7 - 1 = -37$. Останні координати вектора $\mathbf{w}$ знаходимо з наступного співвідношення:

$$\omega_9 = \omega_{10} = (\mathbf{z}_0, (\omega_1, \ldots, \omega_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)) + \omega_7 - 1 = -48.$$

Побудований вектор $\mathbf{w} = (-1, -2, -4, -8, -10, -10, -36, -37, -48, -48)$ задовольняє умову

$$\forall \mathbf{x} \in K^{\sigma}(f)_i, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^n \setminus K^{\sigma}(f)_i \quad (\mathbf{x}, \mathbf{w}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}).$$

Отже, бульова функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується на нейронному елементі з ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (10, 36, 37, 48, -1, -2, -4, -8, -10)$ і порогом $\omega' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{a}_i \mathbf{z}_0^{\sigma^{-1}}) = 132$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$. У протилежному випадку $\big(K(f) = f^{-1}(0)\big)$ функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується на НЕ з вектором структури $[-\mathbf{w}_1; \omega'']$, де $\omega'' = -131$.

Зауваження. Нехай s_0 — найменше таке натуральне число $(s_0 < t_0)$, що блоки $p^2_{s_0}(K(f)_i), p^2_{s_0+1}(K(f)_i), \ldots, p^2_{t_0}(K(f)_i)$ матриці $p^2(K(f)_i)$ задовольняють умови

$$\begin{array}{l}
p^2_{s_0}(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+s_0-1}\right), \\
p^2_{s_0+1}(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+s_0}\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p^2_{t_0}(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0+t_0-1}\right).
\end{array}$$

Якщо блоки $p^2_1(K(f)_i), \ldots, p^2_{s_0-1}(K(f)_i)$ матриці $p^2(K(f)_i)$ задовольняють умови теореми 1.33 і $K^{\sigma}_{\xi}(f)_i = p^2(K(f)_i)$, тоді функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом. Дійсно, перші $j_0 + s_0 - 1$ та останні координати вектора $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ із номерами $j_0 + t_{j_0}, j_0 + t_{j_0} + 1, \ldots, n$ знаходимо згідно з теоремою 1.13, а координати $\omega_{j_0+s_0}, \ldots, \omega_{j_0+t_0-1}$ визначимо зі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\omega_{j_0+s_0} = \ldots = \omega_{j_0+t_0-1} = (\mathbf{z}_0, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_0}, 0, \ldots, 0)) - \\
- (\mathbf{x}_0, (\omega_1, \ldots, \omega_{j_0}, 0, \ldots, 0)),
\end{aligned}$$

де $\mathbf{z}_0, \mathbf{x}_0$ — відповідно останні рядки блоків $p_1\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0}\right)$, $p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,j_0}\right)$ матриці $p_1^2(K(f)_i)$.

Якщо в прикладі 1.7 покласти, що

$$p_2^2(K(f)_i) = p_0\left(K(f)^{(1)}_{i,8}\right) = (L_4 000100),$$

то вектор $\mathbf{w} = (-1, -2, -4, -8, -10, -10, -36, -40, -48, -48)$ і функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується на НЕ з вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (10, 36, 40, 48, 48, -1, -2, -8, -10); 135]$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$, а в протилежному випадку на нейронному елементі з вектором структури $[\mathbf{w}_2 = (-10, -36, -40, -48, -48, 1, 2, 4, 8, 10); -134]$.

Теорема 1.34. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ булевої функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$ та такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$, що $K^\sigma_\xi(f)_i = p^m(K(f)_i)$ $(m \geq 2)$ і*

$$\begin{aligned}
&p(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \,\square\, p_1(K(f)_i),\ j_0 = \log_2 |p_0(K(f)_i)| + 1;\\
&p(K(f)^{(1)}_{i,j_0}) = p_0(K(f)^{(1)}_{i,j_0}) \,\square\, p_1(K(f)^{(1)}_{i,j_0}),\\
&j_1 = \log_2 |p_0(K(f)^{(1)}_{i,j_0})| + 1;\\
&p(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0}) = p_0(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0}) \,\square\, p_1(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0}),\\
&j_2 = \log_2 |p_0(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0})| + 1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}) = p_0(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}) \,\square\\
&\square\, p_1(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0}),\\
&j_{m-2} = \log_2 |p_0(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0})| + 1;\\
&p(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}) = p_0(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}) \,\square\\
&\square\, p_1(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0}),
\end{aligned}$$

тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Приклад 1.8. Нехай $n = 10$, $\mathbf{a}_i = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $K^\sigma_\xi(f)_i = p^3(K(f)_i)$ і $p(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \,\square\, p_1(K(f)_i) = (L_8\ 0\ 0) \,\square\, (L_8^*(46)\ 0\ 0)$, $p(K(f)^{(1)}_{i,8}) = p_0(K(f)^{(1)}_{i,8}) \,\square\, p_1(K(f)^{(1)}_{i,8}) = (L_6\ 0\ 1\ 0\ 0) \,\square\, (L_6^*(14)\ 0\ 1\ 0\ 0)$,

$p(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) = p_0(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) \square p_1(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) \square p_2(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) = (L_4\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \square (L^*_4(6)\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \square (L^*_5(4)\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$. Будуємо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{10})$ згідно з теоремою 1.14. Перші чотири координати вектора визначимо так: $\omega_1 = -1, \omega_2 = \omega_1 - 1 = -2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 - 1 = -4, \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = -8$. Нехай $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ — останні рядки відповідних блоків $p_1(K(f)^{(2)}_{i,6,8})$, $p_2(K(f)^{(2)}_{i,6,8})$. Координату ω_5 знаходимо з рівності $(\mathbf{z}_1, (\omega_1, \ldots, \omega_4, 0, \ldots, 0)) = (\mathbf{z}_2, (\omega_1, \omega_5, 0, \ldots, 0)$, тобто $\omega_5 = -10$. У даному випадку $j_2 = 4, j_1 = 6, t_3 = 2$ і має місце рівність $j_1 = j_2 + t_3$. Отже, $\omega_6 = \omega_1 + \ldots + \omega_5 - 1 = -26$. Параметри j_0, j_1 відповідно приймають значення 8 та 6 і задовольняють нерівність $j_0 - j_1 > 1$. Тоді $\omega_7 = (\mathbf{z}_2, (\omega_1, \ldots, \omega_5, 0, \ldots, 0)) + \omega_6 - 1 = -40$ і $\omega_8 = \omega_1 + \ldots + \omega_7 - 1 = -92$. Останні координати ω_9, ω_{10} визначимо зі співвідношення:

$$\omega_9 = \omega_{10} = (\mathbf{z}_2, (\omega_1, \ldots, \omega_5, 0, \ldots, 0)) + \omega_6 + \omega_8 - 1 = -184.$$

Якщо $K(f) = f^{-1}(1)$, тоді НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (184, 184, -4, -8, -10, -26, -40, -92, 1, 2)$ і порогом $\omega_0 = (\mathbf{a}_i \mathbf{z}_2^{\sigma^{-1}}, \mathbf{w}_1) = 240$ реалізує функцію f, а у протилежному випадку функція реалізується на нейронному елементі з вектором структури $[\mathbf{w}_2 = (-184, -184, 4, 4, 8, 10, 26, 40, 92, -1, -2); \omega'_0 = -239]$.

Теорема 1.35. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ булькової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$ і такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ $(q = |K(f)|)$, що $K^\sigma_\xi(f)_i =$*

$= p^m(K(f)_i)$ $(m \geq 2)$ i $\forall r \in \{1, 2, \ldots, t_0 - 1\}$ $(t_0 \geq 2)$

$$\begin{aligned}
&p(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \square \ldots \square p_{t_0}(K(f)_i), j_0 = \log_2 |p_0(K(f)_i)| + \\
&+ 1, \ \left| p(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}) \right| = \left| p(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r-1}) \right|, \\
&p((K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}) = p_0(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}) \square p_1(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}), \\
&j_1 = \log_2 \left| p_0(K(f)^{(1)}_{i,j_0+r}) \right| + 1, \\
&\left| p(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r}) \right| = \left| p(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r-1}) \right|, \\
&p(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r}) = p_0(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r}) \square p_1(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r}), \\
&j_2 = \log_2 \left| p_0(K(f)^{(2)}_{i,j_1,j_0+r}) \right| + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left| p(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,1,j_0+r}) \right| = \left| p(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+r-1}) \right|, \\
&p(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+r}) = p_0(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+r}) \square \\
&\square\, p_1(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+r}), \\
&j_{m-2} = \log_2 \left| p_0(K(f)^{(m-2)}_{i,j_{m-3},\ldots,j_1,j_0+r}) \right| + 1, \\
&p(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+r}) = p_0(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+r}) \square \\
&\ldots \square\, p_{t_m}(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+r}) \\
&\forall k \in \{0, 1, \ldots, t_m\}, \left| p_k(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,1,j_0+r}) \right| = \\
&= \left| p_k(K(f)^{(m-1)}_{i,j_{m-2},\ldots,j_1,j_0+r-1}) \right|,
\end{aligned}$$

тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Приклад 1.9. Нехай $n = 10$, $\mathbf{a}_i = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $K^{\sigma}_{\xi}(f)_i = p^3(K(f)_i)$ і $p(K(f)_i) = p_0(K(f)_i) \square p_1(K(f)_i) \square p_2(K(f)_i) = (L_8\ 0\ 0) \square L^*_8(46)\ 0\ 0) \square (L^*_9(46)\ 0)$, $p(K(f)^{(1)}_{i,8}) = p_0(K(f)^{(1)}_{i,8}) \square p_1(K(f)^{(1)}_{i,8}) = (L_6\ 0\ 1\ 0\ 0) \square (L^*_6(14)\ 0\ 1\ 0\ 0)$, $p(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) = p_0(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) \square \square p_1(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) \square p_2(K(f)^{(2)}_{i,6,8}) = (L_4 010100) \square (L^*_4(6)010100) \square (L^*_5(4)10100)$. Згідно з теоремою 1.15 перші 8 координат вектора $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ визначаються так, як у прикладі 1.8, $\omega_9 = \omega_8 = -92$ і $\omega_{10} = -184$. Отже, $\mathbf{w} = (-1, -2, -4, -8, -10, -26, -40, -92, -92, -184)$ і функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується на одному НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (92, 184, -4, -8, -10, -26, -40, -92, 1, 2)$ та порогом $\omega_0 = (\mathbf{a}_i\mathbf{z}_2^{\sigma^{-1}}, \mathbf{w}_1) = 148$ ($\mathbf{z}_2$ — останній рядок блоку $p_2(K(f)^{(2)}_{i,6,8})$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$, а в протилежному випадку на НЕ з вектором структури [$\mathbf{w}_2 = (-92, -184, 4, 8, 10, 26, 40, 92, -1, -2); \omega_0' = -147$].

Теорема 1.36. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$, такий елемент $\sigma \in S_n$ і такі числа $r_0 \geq r_1 \ldots \geq r_s > 0$ ($s \in \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$, $2 \leq j \leq n$, $r_0 \leq j-1$), що*

$$K^\sigma(f)_i = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}_{n-j}) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)} \right),$$

тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Приклад 1.10. Нехай $n = 10$, $\mathbf{a}_i = (0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $j = 5$, $r_0 = r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1$, $r_4 = r_5 = 0$. У цьому випадку $s = 3$, оскільки $r_3 > 0$ і $r_4 = 0$.
Для довільного $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}) \in \mathbb{Z}_2^{10}$ визначимо $\varepsilon_5^3(\mathbf{a})$:
$\varepsilon_5^3(\mathbf{a}) = (\varepsilon_5^3(\alpha_1), \varepsilon_5^3(\alpha_2), \varepsilon_5^3(\alpha_3), \varepsilon_5^3(\alpha_4), \varepsilon_5^0(\alpha_5), \varepsilon_5^1(\alpha_6), \varepsilon_5^2(\alpha_7), \varepsilon_5^3(\alpha_8), \varepsilon_5^3(\alpha_9), \varepsilon_5^3(\alpha_{10})) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 2\alpha_5, 2\alpha_6, 3\alpha_7, 4\alpha_8, 5\alpha_9, 5\alpha_{10})$. Послідовно побудуємо множини $F_5^{(3,3)}, F_6^{(3,3)}, F_7^{(2,3)}, F_8^{(1,3)}$ за правилом:

$$F_{j+k}^{(r_k,s)} = \left\{ \mathbf{a} \in m(L^*_{j+k}\, 0 \ldots 0) \mid v_j^s(\mathbf{a}) \leq j-1 \right\},$$

де $m(L^*_{j+k}\ \ 0 \ldots 0)$ — множина бульових векторів, побудованих із рядків матриці L^*_{j+k}; $F_5^{(3,3)} = \{(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0), (1,0,0, 0,1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,1,0,0,0,0,0), (1,1,0,0,1,0,0,0,0,0),$
$(0,0,1,0,1,0,0,0,0,0), (1,0,1,0,1,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,1,0,0,0, 0,0), (0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0)\}$; $F_6^{(3,3)} = \{(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0),$
$(1,0,0,0,1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0,1,0,0, 0,0), (0,0,1,0,0,1,0,0,0,0)(1,0,1,0,0,1,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,1, 0,0,0,0), (0,0,1,1,0,1,0,0,0,0)(0,0,0,0,1,1,0,0,0,0)\}$; $F_7^{(2,3)} = = \{(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0,0,1,0,0,0), (0,1,0,0,0,0, 1,0,0,0), (0,0,1,0,0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0,1,0,0,0)\}$; $F_8^{(1,3)} = = \{(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)\}$ і покладемо $K^\sigma(f)_i = m(L_5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \cup F_5^{(3,3)} \cup F_6^{(3,3)} \cup F_7^{(2,3)} \cup F_8^{(1,3)}$. Тоді згідно з теоремою 1.16 $\omega_1 =$

$= \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = -1, \omega_5 = 3 - 5 = -2, \omega_6 = -2, \omega_7 = -3, \omega_8 = = -4, \omega_9 = \omega_{10} - 5$.

Нейронний елемент із ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = = (0,0,0,0,0,1,1,1,1,1) \cdot (-5,-5,-4,-3,-2,-2,-1,-1,-1, -1) = (-5,-5,-4,-3,-2,2,1,1,1,1)$ і порогом $\omega_0 = (\mathbf{a}_i \mathbf{x}^{\sigma^{-1}}, \mathbf{w}_1) = 2$, де $\mathbf{x} = (\mathbf{z}, 0,0,0,0,0)$, $\mathbf{z}$ — останній рядок матриці толерантності L_5^*, реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{10})$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$. У протилежному випадку ($K(f) = f^{-1}(0)$) функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується НЕ з вектором структури $[\mathbf{w}_2 = (5,5,4,3,2,-2,-1,-1,-1,-1); \omega_0' = -1]$.

Теорема 1.37. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знайдеться таке ядро $K(f)_i$, такий елемент $\sigma \in S_n$, вектор $\mathbf{u} \in U_j$ $(2 \le j \le n)$ і такі цілі числа $r_0 \ge r_1 \ge \ldots \ge r_s > 0$ $(r_0 \le \sum_{p=1}^{l_{\mathbf{u}}} u_p 2^{p-1})$, що*

$$K^\sigma(f)_i = m(L_j\, 0 \ldots 0) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(\mathbf{u}, r_i, s)} \right),$$

тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Приклад 1.11. Нехай параметри $n, \mathbf{a}_i, \sigma, j, r_0, \ldots, r_5$ приймають такі самі значення, як у прикладі 1.10 і $\mathbf{u} = (2,1,1) \in \in U_5$. Для довільного вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}) \in \mathbb{Z}_2^{10}$ визначимо $\varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}$: $\varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\mathbf{a}) = (\varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_1), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_2), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_3), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_4), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},0)}(\alpha_5), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},1)}(\alpha_6), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},2)}(\alpha_7), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_8), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_9), \varepsilon_5^{(\mathbf{u},3)}(\alpha_{10})) = = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_3, 4\alpha_4, 6\alpha_5, 6\alpha_6, 7\alpha_7, 8\alpha_8, 9\alpha_9, 9\alpha_{10})$. Послідовно побудуємо $F_5^{(\mathbf{u},3,3)}, F_6^{(\mathbf{u},3,3)}, F_7^{(\mathbf{u},2,3)}, F_8^{(\mathbf{u},1,3)}$ за правилом $F_{j+k}^{(\mathbf{u},r_k,s)} = = \left\{ \mathbf{a} \in m(L_{j+k}^*\, 0 \ldots 0) \mid v_j^{(\mathbf{u},s)}(\mathbf{a}) \le 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 \right\}$,
$F_5^{(\mathbf{u},3,3)} = \{(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0), (1,0,0,0,1,0,0,0,0,0), (0,1,0, 0,1,0,0,0,0,0), (1,1,0,0,1,0,0,0,0,0), (0,0,1,0,1,0,0,0,0,0)\}$;
$F_6^{(\mathbf{u},3,3)} = \{(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0), (1,0,0,0,1,0,0,0,0,0), (0,1,0, 0,0,1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,1,0,0,0,0)\}$;
$F_7^{(\mathbf{u},2,3)} = \{(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0,0,1,0,0,0), (0,1,0, 0,0,0,1,0,0,0)\}$; $F_8^{(\mathbf{u},1,3)} = \{(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)\}$.
Згідно з теоремою 1.17 $\omega_1 = \omega_2 = -1, \omega_3 = -2, \omega_4 = -4, \omega_5 = \omega_6 = -6, \omega_7 = -7, \omega_8 = -8, \omega_9 = \omega_{10} = -9$. Ней-

ронний елемент із ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_i\mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (-9, -9, -8, -7, -6, 6, 4, 2, 1, 1)$ і порогом $\omega_0 = (\mathbf{a}_i\mathbf{x}^{\sigma^{-1}}, \mathbf{w}_1) = 6$ ($\mathbf{x} = (\mathbf{z}, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{z}$ — останній рядок матриці толерантності L_5) реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{10})$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$, у протилежному випадку функція $f(x_1, \ldots, x_{10})$ реалізується на нейронному елементі з вектором структури $[\mathbf{w}_2 = = (9, 9, 8, 7, 6, -6, -4, -2, -1, -1); -5]$.

Отримані в цьому параграфі результати можуть бути узагальнені на частково визначені бульові функції, які часто виникають при розв'язуванні різних прикладних задач: кодування інформації, класифікація і розпізнавання дискретних сигналів та зображень і т.д.

Нехай $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — частково визначена бульова функція. Позначимо через $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(*)$ множини n-вимірних бульових векторів, на яких функція $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ відповідно приймає значення 0, 1 і "не визначено". Ядро $K(f)$ частково визначеної бульової функції визначається аналогічно тому, як для повністю визначеної функції, тобто $K(f) = f^{-1}(1)$, якщо $\left|f^{-1}(1)\right| \leq \left|f^{-1}(0)\right|$ і $K(f) = f^{-1}(0)$ у протилежному випадку.

Частково визначена бульова функція $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ називається нейрофункцією, якщо існує такий n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ і таке число ω_0 — поріг, що

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(0) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{w}) < \omega_0,$$

і

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(1) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{w}) \geq \omega_0.$$

Нехай $K(f) = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ — ядро частково визначеної бульової функції. Визначимо розширене ядро $K(f, s)$ цієї функції наступним чином: $K(f, s) = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$, де $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ — довільні елементи з $f^{-1}(*)$ і $q + s \leq 2^{n-1}$. Множина розширених зведених ядер визначається так:

$$T(f, s) = \{K(f, s)_i = \mathbf{a}_i K(f, s) \mid i = 1, 2, \ldots, q\}.$$

Тоді для частково визначених бульових функцій відносно розширеного ядра $K(f, s)$ і множини розширених зведених ядер $T(f, s)$ мають місце теореми 1.20–1.37. Очевидно, що $K(f, 0) = K(f)$.

Зауваження. Розширене ядро $K(f, s)$ $(s \geq 1)$ будуємо для частково визначених бульових функцій тільки в тому випадку, коли з елементів

$K(f)$ неможливо побудувати матрицю, яка була б передматрицею деякої матриці толерантності $L \in E_n$. Елементи $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s \in f^{-1}(*)$ включаємо у розширене ядро $K(f,s)$ цілеспрямовано так, щоб $K(f,s)$ задовольняло одну із достатніх умов зображення його матрицями толерантності з E_n.

Приклад 1.12. Задано частково визначену бульову функцію $f(x_1, \ldots, x_{10})$ наступним чином:
$f^{-1}(1) = \{(1,0,0,0,1,0,0,0,0,1),(0,1,0,0,1,0,0,0,0,1),(0,0,1, 0,1,0,0,0,0,1)\}$, $f^{-1}(0) = \{(1,1,1,0,1,0,1,0,1,1),(0,1,1,0,1,0, 0,1,1,1),(1,0,0,0,0,1,0,0,1,0),(0,0,0,0,1,0,0,1,0,1),(1,1,1,1, 1,0,1,1,0,1)\}$, $f^{-1}(*) = Z_2^{10} \setminus \big(f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0)\big)$. За означенням $K(f) = f^{-1}(1)$. Перенумерувавши елементи ядра $K(f) = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0,1,0,0,0,0,1), \mathbf{a}_2 = (0,1,0,0,1,0,0,0, 0,1), \mathbf{a}_3 = (0,0,1,0,1,0,0,0,0,1)\}$, побудуємо множину зведених ядер $T(f)$:

$$T(f) = \left\{ K(f)_1 = \begin{pmatrix} 0000000000 \\ 1100000000 \\ 1010000000 \end{pmatrix}, K(f)_2 = \begin{pmatrix} 1100000000 \\ 0000000000 \\ 0110000000 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. K(f)_3 = \begin{pmatrix} 1010000000 \\ 0110000000 \\ 0000000000 \end{pmatrix} \right\}.$$

Як бачимо, жодне зведене ядро не задовольняє умови теореми 1.25. Отже, ядро $K(f)$ не допускає зображення матрицями толерантності з E_{10}.

Виникає питання, чи є частково визначена бульова функція f нейрофункцією, і якщо так, то як знайти вектор структури НЕ, що реалізує її? Якщо можна побудувати таке розширене зведене ядро $K(f,s)_r$ ($r \in \{1,2,3\}$), яке допускає зображення матрицями толерантності з E_{10}, то функція f буде нейрофункцією.

Розглянемо зведене ядро $K(f)_1$, найпростішу достатню умову (теорема 1.30) і перевіримо, чи містить множина $\mathbf{a}_1 f^{-1}(*)$ такі елементи $\mathbf{b}_i$, за допомогою яких можна розширити ядро $K(f)_1$ так, щоб розширене ядро задовольняло умови цієї теореми. У цьому випадку бачимо, що множина $\mathbf{a}_1 f^{-1}(*)$ містить такі елементи $\mathbf{b}_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0), \mathbf{b}_2 = (0,1, 0,0,0,0,0,0,0,0)$ і $\mathbf{b}_3 = (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$, що розширене зведене ядро $K(f,3)_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \}$ задовольняє умови теореми 1.30, оскільки

$$K_\xi^\sigma(f,3)_1 = (L_3\, 0000000) \,\square\, (L_3^*(2)\, 0000000),$$

де σ — тотожна підстановка, а $\xi = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{1\,4\,6\,2\,3\,5}$. За розкладом $K^{\sigma}_{\xi}(f,3)_1$, аналогічно до того, як у прикладі 1.6, знаходимо вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10})$:

$$\omega_1 = -1,\, \omega_2 = -2,\, \omega_3 = -4,\, \omega_4 = \omega_5 = \ldots = \omega_{10} = -6.$$

На основі вектора $\mathbf{w}$ побудуємо ваговий вектор:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{w}^{\sigma^{-1}} = (1, -2, -4, -6, 6, -6, -6, -6, -6, 6)$$

і поріг $\omega_0 = \left(\mathbf{w}_1, \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{\sigma^{-1}}\right)$, де $\mathbf{z}$ — останній рядок матриці $K^{\sigma}_{\xi}(f,3)_1$, нейронного елемента, що реалізує частково визначену бульову функцію $f(x_1, \ldots, x_{10})$.

Зауваження 1. Якщо відносно вибраної достатньої умови для $K(f)_1$ не можна побудувати розширене зведене ядро, яке б задовольняло цю умову, то будуємо розширене ядро для $K(f)_2$ і т.д.

Зауваження 2. При знаходженні елементів $\mathbf{b}_i$, за допомогою яких ми будуємо розширене зведене ядро, досить мати інформацію про одну з множин $f^{-1}(0)$ або $f^{-1}(*)$, якщо $K(f) = f^{-1}(1)$. Дійсно, якщо $|f^{-1}(*)| \leq |f^{-1}(0)|$, то відповідні елементи $\mathbf{b}_i$ беруться з $\mathbf{a}_r f^{-1}(*)$, а в протилежному випадку за $\mathbf{b}_i$ можна брати будь-який елемент, що не належить множині $\mathbf{a}_r f^{-1}(0)$. Очевидно, коли $K(f) = f^{-1}(0)$, то при знаходженні $\mathbf{b}_i$ ми використовуємо або множину $f^{-1}(1)$, або $f^{-1}(*)$ в залежності від їх потужності.

1.6. Синтез цілочислових нейронних елементів із додатковими обмеженнями на їх вектори структур

Із точки зору технічної реалізації нейронного елемента із пороговою функцією активації важливо мати метод, який забезпечує синтез нейронних елементів із цілочисловими векторами структур. Нейронні елементи з цілочисловими векторами структур є більш надійними [46].

У цьому підрозділі розглядається синтез цілочислових нейронних елементів із пороговою функцією активації за умови, що на координати ω_i вектора структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ можуть бути накладені деякі додаткові обмеження: $\omega_j > 0, \omega_k < 0, |\omega_r| > |\omega_s| + |\omega_t|, \sum\limits_{i=0}^{n} |\omega_i| \to \min$ ($|\omega_i|$ — модуль числа ω_i) і т.д.

Далі розглянемо бульові функції як в алфавіті $\{0, 1\}$, так і в алфавіті $\{-1, 1\}$. Перехід від алфавіту $\{0, 1\}$ до алфавіту $\{-1, 1\}$ здійснюємо наступним чином: $y_i = 2x_i - 1$ ($x_i \in \{0, 1\}$), $g_f(y_1, \ldots, y_n) = 2f(x_1, \ldots, x_n) - 1$ ($f(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}$).

Координати b_i характеристичного вектора $\mathbf{b}_f = (b_1, \ldots, \ldots, b_n; b_0)$ [46] бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ знаходимо за допомогою наступних формул:

$$b_i = \sum_{\gamma \in G_n} g_f(\gamma) y_i(\gamma),$$
$$b_0 = \sum_{\gamma \in G_n} g_f(\gamma),$$

де $G_n = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \ldots, n\}$.

За допомогою інваріантних операцій [46] від характеристичного вектора $\mathbf{b}_f$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ переходимо до канонічного характеристичного вектора $\mathbf{b}_f^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*; b_0^*)$, де $b_1^* \geq b_2^* \geq \ldots \geq b_n^* > b_0^* \geq 0$. Із координат вектора $\mathbf{b}_f^*$ побудуємо вектори $\delta_1, \ldots, \delta_r$ так:

$$\begin{array}{ll}
\delta_1 = (b_1^*, \ldots, b_{n_1}^*), & b_1^* = \ldots = b_{n_1}^*, b_{n_1+1}^* \neq b_{n_1}^*, \\
\delta_2 = (b_{n_1+1}^*, \ldots, b_{n_2}^*), & b_{n_1+1}^* = \ldots = b_{n_2}^*, b_{n_2+1}^* \neq b_{n_2}^*, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_r = (b_{n_{r-1}+1}^*, \ldots, b_{n_r}^*), & b_{n_{r-1}+1}^* = \ldots = b_{n_r}^* = b_0^* \quad .
\end{array}$$

Отже, $\mathbf{b}_f^* = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$. Відомо [47], що координати b_i характеристичного вектора $\mathbf{b}_f$ і координати ω_i вектора структури $\mathbf{w}_f$ нейронного елемента, що реалізує функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняють наступні умови:

1) $\operatorname{Rsign} \omega_i = \operatorname{Rsign} b_i$ для всіх $b_i \neq 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$;
2) якщо $b_i = 0$, то, можливо, $\omega_i = 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}$;
3) якщо $b_i > b_j$, то $\omega_i > \omega_j,\ i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

де функція Rsign() визначена на множині дійсних чисел, крім нуля, так:

$$\operatorname{Rsign} z = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z > 0, \\ -1, & \text{якщо } z < 0. \end{cases}$$

На основі умов 1-3 можна стверджувати, що вектор структури $\mathbf{w}_f$ нейронного елемента, що реалізує функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ із характеристичним вектором $\mathbf{b}_f$ із точністю до інваріантних операцій, має вигляд:

$$\mathbf{w}(\xi_1, \ldots, \xi_r) = (\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_1}_{n_1}, \underbrace{\xi_2, \ldots, \xi_2}_{n_2 - n_1}, \ldots, \underbrace{\xi_r, \ldots, \xi_r}_{n_r - n_{r-1}}),$$

де ξ_i — невід'ємні цілі числа $(i = 1, 2, \ldots, r)$, що задовольняють нерівність $\xi_i > \xi_{i+1}$.

Цілочисловий алгоритм синтезу НЕ

Крок 1. Для заданої бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ знаходимо характеристичний вектор $\mathbf{b}_f$ і за допомогою інваріантних операцій [46] від $\mathbf{b}_f$ переходимо до канонічного характеристичного вектора $\mathbf{b}_f^* = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$, де $\delta_1 = (b_1^*, \ldots, b_{n_1}^*), \ldots,$
$\delta_r = (b_{n_{r-1}+1}^*, \ldots, b_{n_r}^*)$. Вводимо позначення:

$$\mathbf{w}(\xi_1, \ldots, \xi_r) = (\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_1}_{n_1}, \underbrace{\xi_2, \ldots, \xi_2}_{n_2 - n_1}, \ldots, \underbrace{\xi_r, \ldots, \xi_r}_{n_r - n_{r-1}}),$$

і переходимо до наступного кроку.

Крок 2. $\xi_1 = 0$, і вводимо натуральне число q, що визначається з технічних умов реалізації НЕ.

Крок 3. $j = 1,\ \xi_2 = 0, \ldots, \xi_r = 0$.

Крок 4. Якщо $\xi_1 < q$, тоді $\xi_j = \xi_j + 1,\ \mathbf{w}^* = \mathbf{w}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ і переходимо до кроку 5, а в протилежному випадку робимо висновок, що функція

$f(x_1, \ldots, x_n)$ не реалізується одним цілочисловим НЕ при заданих обмеженнях на максимальні координати вектора $\mathbf{w}^*$.

Крок 5. Якщо вектори $\mathbf{w}^*, \mathbf{b}_f^*$ задовольняють умови [46]:

$$(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}_f^*) = \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}^*(\mathbf{g})|, \qquad \forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathrm{w}^*(\mathbf{g}) \neq 0,$$

де $\mathrm{w}^*(\mathbf{g}) = \omega_1^* \gamma_1 + \ldots + \omega_n^* \gamma_n + \omega_{n+1}^*, \quad \mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, тоді переходимо до кроку 15, а в протилежному випадку до кроку 6.

Крок 6. Якщо $j < r$, то переходимо до кроку 7, а в протилежному випадку до кроку 9.

Крок 7. Якщо $\xi_j - \xi_{j+1} > 1$, то переходимо до кроку 14, а в протилежному випадку до кроку 8.

Крок 8. Якщо $j = 1$, то переходимо до кроку 4, а в протилежному випадку до кроку 9.

Крок 9. $t = 0$.

Крок 10. $t = t + 1$.

Крок 11. Якщо $j - t \geq 1$, то переходимо до кроку 12, а в протилежному випадку до кроку 3.

Крок 12. Якщо $\xi_{j-t} - \xi_{j-t+1} > 1$, то переходимо до кроку 13, а в протилежному випадку до кроку 10.

Крок 13. $\xi_{j-t+1} = \xi_{j-t+1} + 1$, $\xi_{j-t+2} = 0$, $\xi_{j-t+3} = 0, \ldots, \xi_r = 0$, $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $j = j - t + 1$ і переходимо до кроку 5.

Крок 14. $j = j + 1$ і переходимо до кроку 4.

Крок 15. За допомогою інваріантних операцій, що перетворюють вектор $\mathbf{b}_f^*$ у $\mathbf{b}_f$, перетворюємо $\mathbf{w}^*$ у $\mathbf{w}$. Перші n координат $n+1$-вимірного вектора $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ утворюють цілочисловий ваговий вектор $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ НЕ, що реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, а поріг ω_0 нейронного елемента знаходимо так: $\omega_0 = \max\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1) \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(0)\} + 1$.

Зауваження. В алгоритмі допускається рівність елементів ξ_i і ξ_{i+1}, коли вони приймають значення 0.

Покажемо, що побудований, згідно з алгоритмом, цілочисловий вектор структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ НЕ в алфавіті $\{-1, 1\}$ $(g_f(\mathbf{a}) = \mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{a}))$ задовольняє наступні умови:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\omega_i| \to \min, \tag{1.73}$$

$$\max\{|\omega_i| \mid i = 1, \ldots, n+1\} \to \min\,. \tag{1.74}$$

Припустимо, що побудований цілочисловий вектор структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ НЕ не задовольняє умову (1.73) при (1.74). Це означає, що існує такий цілочисловий вектор структури $\mathbf{w}' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_n, \omega'_{n+1})$ НЕ, який реалізує функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ і задовольняє нерівність

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\omega'_i| < \sum_{i=1}^{n+1} |\omega_i|.$$

Із останньої нерівності випливає, що існує хоча б одне таке значення $i = i_0$, для якого $|\omega'_{i_0}| < |\omega_{i_0}|$. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $|\omega'_j| = |\omega_j|$, якщо $j \neq i_0$ і $|\omega'_{i_0}| < |\omega_{i_0}|$. Згідно з алгоритмом на деякому кроці будується вектор $\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, 0, \ldots, 0)$, а потім послідовно вектори

$$\begin{array}{l}
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, 1, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, 2, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, 2, 1, 0 \ldots, 0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, \omega'_{i_0}, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, \omega'_{i_0}, 1, 0, \ldots, 0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, \omega_{i_0}, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{w}(\omega_1, \ldots, \omega_{i_0-1}, \omega_{i_0}, 1, 0, \ldots, 0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Як бачимо, вектор $\mathbf{w}' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_n, \omega'_{n+1})$ буде побудований раніше, ніж вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$, але вектор $\mathbf{w}'$ не може бути вектором структури НЕ в алфавіті $\{-1, 1\}$, що реалізує бульову функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$, оскільки вектор $\mathbf{w}$ є першим таким вектором, що задовольняє умови:

$$(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*_f) = \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}^*(\mathbf{g})|, \qquad \forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathrm{w}^*(\mathbf{g}) \neq 0.$$

Цілочисловий вектор структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ нейронного елемента, що реалізує бульову функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ в алфавіті $\{-1, 1\}$ і задовольняє умови (1.73), (1.74), будемо називати її оптимальним цілочисловим вектором структури і позначимо $\mathbf{w}^*_f$.

Зауваження. Якщо $\mathbf{w}^*_f = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$ — оптимальний цілочисловий вектор структури НЕ, що реалізує функцію f в алфавіті $\{-1, 1\}$, то оптимальним цілочисловим вектором структури НЕ, що реалізує цю функцію в алфавіті $\{0,1\}$ буде вектор $\mathbf{v}_f^* = (\omega_1,\dots,\omega_n,\omega_0)$, де $w_0 = \max\{(\mathbf{x},\mathbf{w}_1)|x\in f^{-1}(0)\}+1$ і $\mathbf{w}_1=(\omega_1,\dots,\omega_n)$.

Приклад. За допомогою алгоритму з'ясуємо, чи реалізується бульова функція $f(x_1,\dots,x_n)$ одним НЕ, де $f^{-1}(1) = \{(0,1,0,0,1,0,0,0,1,1),(1,1,0,0,1,0,0,0,1,1),(0,0,0,0,1,0,0,0,1,1),(1,0,0,0,1,0,0,0,1,1),(0,1,1,0,1,0,0,0,1,1),(1,1,1,0,1,0,0,0,1,1),(0,0,1,0,1,0,0,0,1,1),(1,0,1,0,1,0,0,0,1,1),(0,1,0,1,1,0,0,0,1,1),(1,1,0,1,1,0,0,0,1,1),(0,0,0,1,1,0,0,0,1,1),(0,1,0,0,0,0,0,0,1,1),(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1),(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1),(0,1,0,0,1,1,0,0,1,1),(1,1,0,0,1,1,0,0,1,1),(0,1,0,0,1,0,1,0,1,1),(1,1,0,0,1,0,1,0,1,1),(0,1,0,0,1,0,0,1,1,1),(0,1,0,0,1,0,0,0,0,1)\}$ і якщо так, то знайдемо її $\mathbf{w}_f^*$.

Згідно з алгоритмом встановлено, що бульова функція реалізується на нейронному елементі з оптимальним ваговим вектором $\mathbf{w}_f^* = (-1,2,-3,-4,4,-5,-5,-6,6,7)$ і порогом $\omega_0 = 13$.

Легко бачити, що за допомогою побудованого алгоритму можна розв'язувати наступні задачі синтезу цілочислового НЕ, що реалізує задану бульову функцію $f(x_1,\dots,x_n)$:

1) на максимальну за модулем координату цілочислового вагового вектора накладається умова $\max\{|\omega_i| \mid i=1,2,\dots,n\} \le q$, де q — додатне ціле число;

2) на максимальну за модулем координату та на деякі інші координати цілочислового вагового вектора накладаються додаткові обмеження:

а)
$$\max\{|\omega_i| \mid i=1,2,\dots,n\} \le q,$$
$$|\omega_j| \le |\omega_r| + |\omega_k|,$$
де q — задане натуральне число;

б)
$$\max\{|\omega_i| \mid i=1,2,\dots,n\} \le q,$$
$$|\omega_j| \ge |\omega_r| + |\omega_k|,$$
де q — задане натуральне число;

в)
$$\max\{|\omega_i| \mid i=1,2,\dots,n\} \le q,$$
$$|\omega_j| = a,\ |\omega_r| = b, |\omega_k| = c,$$

де a, b, c — натуральні числа $(a, b, c \leq q)$;

г)

$$\max\{|\omega_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \leq q,$$
$$|\omega_j| \geq |\omega_r| + |\omega_k|, \quad |\omega_s| = a,$$

де a, q — натуральні числа $(a \leq q)$.

Наступна теорема містить відповідь на питання: чи можна побудувати НЕ, що реалізує бульову функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, ваговий вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ якого задовольняє умови $\omega_{i_1} > 0, \ldots, \omega_{i_r} > 0$, а інші координати — від'ємні?

Теорема 1.38. *Якщо ядро* $K(f) = f^{-1}(1)$ *бульової функції* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *містить елемент* $\mathbf{a} = (0, \ldots, \ldots, \underset{i_1}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{i_r}{1}, 0, \ldots, 0)$ *і зведене ядро* $\mathbf{a}K(f)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n^-*, тоді можна побудувати НЕ, що реалізує функцію* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *з ваговим вектором* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}, \ldots, \omega_n)$*, який задовольняє умови:*

$$\forall j \in \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_j > 0;\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_k < 0.$$

Доведення. Нехай $q = |K(f)|$ і $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тоді у зв'язку з тим, що $\mathbf{a}K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності з E_n^-, маємо: $(\mathbf{a}K(f))_\xi^\sigma = L_\mathbf{v}(q)$, де $\sigma \in S_n,\ \xi \in S_q$,

$$(L_\mathbf{v} \,\square\, L_\mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^T = \mathbf{c}_\mathbf{v}^T \tag{1.75}$$

і всі координати вектора $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — від'ємні. Побудуємо n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ наступним чином: $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mathbf{v}^{\sigma^{-1}} = ((-1)^{\alpha_1} v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, (-1)^{\alpha_n} v_{\sigma^{-1}(n)})$. Якщо до матриці $L_\mathbf{v}$ послідовно застосувати перетворення, які задаються елементами σ^{-1} і $\mathbf{a}$, то (1.75) можна записати так:

$$(L_\mathbf{w} \,\square\, L_\mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T, \tag{1.76}$$

де $L_\mathbf{w} = \mathbf{a}L_\mathbf{v}^{\sigma^{-1}}$. З (1.76) та з того, що $\mathbf{a} \in f^{-1}(1)$, випливає, що бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}, \ldots, \omega_n)$, координати якого задовольняють умови:

$$\forall j \in \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_j = (-1)^{\alpha_j} v_{\sigma^{-1}(j)} = -v_{\sigma^{-1}(j)} > 0,$$
$$\forall j \in \{1, 2 \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_j = (-1)^{\alpha_j} v_{\sigma^{-1}(j)} = v_{\sigma^{-1}(j)} < 0.$$

Отже, теорему доведено.

Наслідок. *Якщо ядро* $K(f) = f^{-1}(0)$ *бульової функції* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *містить елемент* $\mathbf{a} = (0, \ldots, \underset{i_1}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{i_r}{1}, 0, \ldots, 0)$ *і зведене ядро* $\mathbf{a}K(f)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_n^-*, тоді можна побудувати НЕ, що реалізує функцію* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *з ваговим вектором* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}, \ldots, \omega_n)$*, який задовольняє умови:*

$$\forall j \in \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_j < 0;\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_k > 0.$$

Дійсно, якщо в цьому випадку покласти $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$, тоді функція $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняє умови теореми 1.38, тобто вона реалізується на одному НЕ з таким ваговим вектором $\mathbf{w}_1 = (\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_{i_1}^{(1)}, \ldots, \ldots, \omega_{i_r}^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)})$, що

$$\forall j \in \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_j^{(1)} > 0;\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}\ \omega_k^{(1)} < 0,$$

але тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним НЕ з ваговим вектором $\mathbf{w} = -\mathbf{w}_1$.

Приклад. Нехай функція $f(x_1, x_2, x_3)$ приймає значення 1 на наборах: $(0,1,1), (1,1,1), (0,0,1), (1,0,1)$. Чи можна реалізувати цю функцію одним НЕ, ваговий вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ якого задовольняє умови: $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0, \omega_3 > 0$?

Ядро $K(f) = f^{-1}(1)$ містить елемент $\mathbf{a} = (0,1,1)$. Побудуємо зведене ядро $\mathbf{a}K(f) = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$ і запишемо його елементи у рядки матриці:

$$\mathbf{a}K(f)_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\xi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_4$. Матриця $\mathbf{a}K(f)_\xi \in E_3^-$. Отже, функція $f(x_1, x_2, x_3)$ може бути реалізована на одному НЕ, ваговий вектор якого задовольняє умови задачі. За матрицею $L_1 = \mathbf{a}K(f)_\xi \in E_3^-$ побудуємо вектор $\mathbf{v} = (-1, -2, -4)$, що задовольняє умову

$$(L_1 \square L_1^*) \cdot \mathbf{v}^T = \mathbf{c}_\mathbf{v}^T.$$

Згідно з теоремою 1.38 функція $f(x_1, x_2, x_3)$ реалізується на нейронному елементі з вектором структури $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mathbf{v}^{\sigma^{-1}} = (-1, 2, 4)$ (σ — тотожна підстановка). Поріг ω_0 визначається з рівності $\omega_0 = \max\{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{x} \in f^{-1}(0)\} + 1 = 3$, і НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = [(-1, 2, 4); 3]$ реалізує задану функцію $f(x_1, x_2, x_3)$.

РОЗДІЛ 2
АЛГЕБРАЇЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЙРОФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗУ КОМБІНАЦІЙНИХ СХЕМ ІЗ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА СУМАТОРІВ ЗА МОДУЛЕМ 2

У цьому розділі розроблені методи синтезу комбінаційних схем із одного нейронного елемента та суматорів за mod 2. Встановлені ті основні перетворення у спектральній області бульових функцій, за допомогою яких на мові характеристичних векторів можна встановити реалізованість бульових функцій комбінаційною схемою з одного нейронного елемента та суматорів за mod 2. Показано, що стандартний базис певного групового кільця складається з бульових нейрофункцій.

2.1. Синтез комбінаційних схем з одного нейронного елемента та суматорів за модулем 2

У першому розділі показано, що бульова функція $f(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом із пороговою функцією активації, якщо в множині її зведених ядер $T(f)$ хоча б для одного зведеного ядра $K(f)_i$ можна вказати такі елементи σ, ξ відповідних симетричних груп S_n, S_q ($q = |K(f)|$) і таку матрицю толерантності $L \in E_n^-$, що $K_\xi^\sigma(f)_i = L(q)$. Природно виникає питання: чи можна розширити клас функцій алгебри логіки, які реалізуються одним НЕ, якщо над ними виконати деякі перетворення? У цьому підрозділі в якості такого перетворення застосовується логічна операція $\oplus$ — сума за mod 2. Також досліджується питання: які перетворення у спектральній області бульових функцій відповідають логічним операціям, що перетворюють функції алгебри логіки у нейрофункції?

Нехай $K(f)$ — ядро бульової функції $f(x_1, \dots, x_n)$, елементи якого записані у рядки матриці $K_\xi(f)$ ($\xi \in S_q$). Вектор-стовпчик матриці $K_\xi(f)$ з номером i позначимо через $\mathbf{i}_i$ і визначимо дію операторів $\underset{j}{A}, \underset{j}{B}$ ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) над ядром $K(f)$ наступним чином:

1. $\underset{j}{A}(K(f), (i_1, \dots, i_t))$ — означає, що j-ий вектор-стовпчик ядра $K(f)$ заміниться вектором-стовпчиком $\mathbf{i}_j \oplus \mathbf{i}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{i}_{i_t}$, де $j, i_1, \dots, i_t \in \{1, 2 \dots, n\}$

і $\oplus$ — покоординатне додавання бульових векторів за $\mod 2$. Оператору $\underset{j}{A}(K(f),(i_1,\ldots,i_t))$ присвоїмо індекс $r=2^{n-i_1}+2^{n-i_2}+\ldots+2^{n-i_t}$ і множину всіх різних рядків одержаної матриці позначимо через $\underset{(r,j)}{A}(K(f))$.

Функцію, ядро якої будується з елементів множини $\underset{(r,j)}{A}(K(f))$, позначимо через $\underset{(r,j)}{A}(f)$.

Очевидно, що коли $K(f)=f^{-1}(i)$, то ядром функції $\underset{r,j}{A}(f)$ будуть бульові набори, на яких функція $\underset{(r,j)}{A}(f)$ приймає значення i, де $i\in\{0,1\}$. Покладемо, що $\underset{(r,0)}{A}(K(f))=K(f)$ і $\underset{(r,0)}{A}(f)=f$.

2. $\underset{j}{B}(K(f))$ — означає, що ядро $K(f)$ бульової функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ заміниться ядром $K(f')$ функції $f'(x_1,\ldots,x_n) = x_j\oplus f(x_1,\ldots,x_n)$ і $\underset{0}{B}(K(f))=K(f)$ $(j\in\{1,2\ldots,n\})$.

Визначимо композиції $\underset{i}{B}\circ\underset{(r,j)}{A}$, $\underset{(r_1,j_1)}{A}\circ\underset{(r_2,j_2)}{A}$ операторів $\underset{i}{B}$, $\underset{(r,j)}{A}$ так:

$$(\underset{i}{B}\circ\underset{(r,j)}{A})K(f)=\underset{i}{B}(\underset{(r,j)}{A}(K(f))),$$
$$(\underset{(r_1,j_1)}{A}\circ\underset{(r_2,j_2)}{A})K(f)=\underset{(r_1,j_1)}{A}(\underset{(r_2,j_2)}{A}(K(f)))=\underset{(r_1,r_2;j_1,j_2)}{A}(K(f)),$$

де $i,j_1,j_2\in\{0,1,\ldots,n\}$ і $j_1\neq j_2$.

Теорема 2.1. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ хоча б для одного зведеного ядра $K(f)_i$ можна вказати такі оператори $\underset{s}{B}$, $\underset{(r,j)}{A}$, елементи $\sigma\in S_n,\xi\in S_q$ $(q=|K(f)|)$ і таку матрицю толерантності $L\in E_n^-$, що*

$$\left(\underset{s}{B}\circ\underset{(r,j)}{A}\right)K_\xi^\sigma(f)_i=L(q), \tag{2.1}$$

то бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується комбінаційною схемою, що складається з одного нейронного елемента та суматорів за $\mod 2$.

Доведення. Розглянемо наступні можливі випадки:

1) $\underset{s}{B}=\underset{0}{B}$ і $\underset{(r,j)}{A}=\underset{(r,0)}{A}$;

2) $\underset{s}{B} = \underset{0}{B}$ і $\underset{(r,j)}{A} \neq \underset{(r,0)}{A}$;

3) $\underset{s}{B} \neq \underset{0}{B}$ і $\underset{(r,j)}{A} = \underset{(r,0)}{A}$;

4) $\underset{s}{B} \neq \underset{0}{B}$ і $\underset{(r,j)}{A} \neq \underset{(r,0)}{A}$.

У випадку 1 маємо:

$$\left(\underset{s}{B} \circ \underset{(r,j)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i = \underset{0}{B}(\underset{(r,0)}{A}(K_\xi^\sigma(f)_i)) = \underset{0}{B}(K_\xi^\sigma(f)_i) = K_\xi^\sigma(f)_i.$$

Отже, $K_\xi^\sigma(f)_i = L(q)$ $(L \in E_n^-)$ і функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним нейронним елементом.

Якщо $r = 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t}$, то в другому випадку з (2.1) випливає:

$$L(q) = (\underset{0}{B} \circ \underset{(r,j)}{A}) K_\xi^\sigma(f)_i = \underset{(r,j)}{A}(K_\xi^\sigma(f)_i).$$

Тоді, згідно з оператором $\underset{(r,j)}{A}$, функція $f(x_1,\ldots,x_{j-1}, x'_j, x_{j+1},\ldots,$ $\ldots, x_n)$ $(x'_j = x_j \oplus x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_t})$ реалізується одним НЕ. Отже, для реалізації функції $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ необхідно мати один НЕ, що реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ і один суматор за mod 2, який розташований між вхідними змінними $x_1, \ldots, x_n$ та нейронним елементом. Схематично це можна зобразити так:

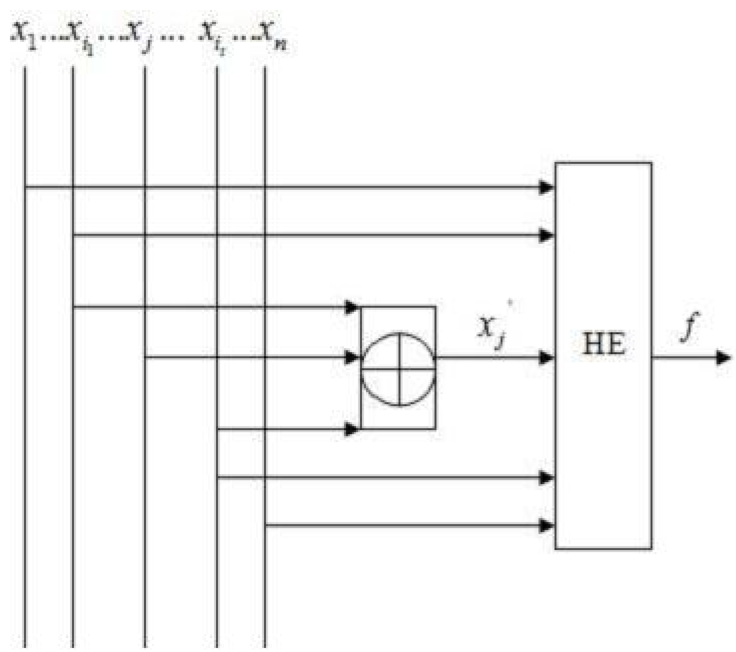

Рис. 2.1. Реалізація функції $f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ у випадку 2

Нехай $\underset{s}{B} \neq \underset{0}{B}$ і $\underset{(r,j)}{A} = \underset{(r,0)}{A}$. Тоді з (2.1) маємо: $L(q) = (\underset{s}{B} \circ \underset{(r,0)}{A}) = \underset{s}{B}(K_\xi^\sigma(f)_i)$. Отже, функція $f'(x_1,\ldots,x_n) = x_s \oplus \oplus f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується одним НЕ. Звідси $f(x_1,\ldots,x_n) = x_s \oplus f'(x_1,\ldots,x_n)$. Схематично це зображається так:

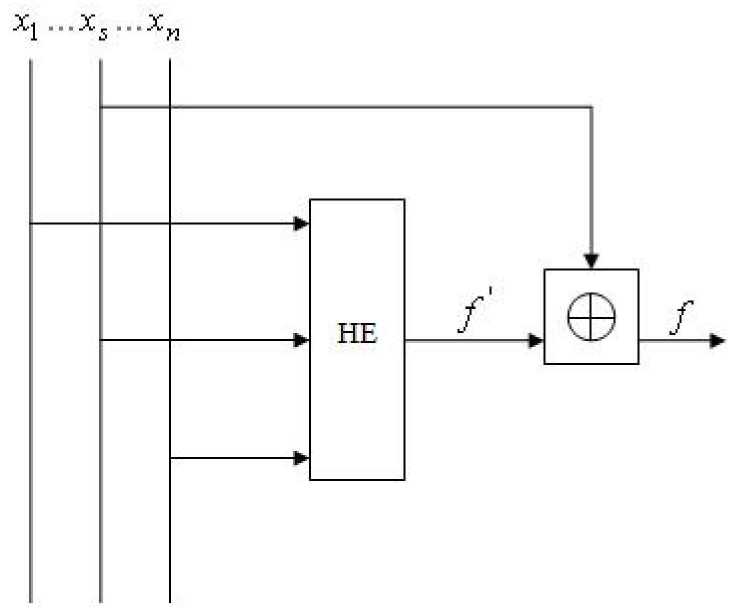

Рис. 2.2. Реалізація функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ у випадку 3

У четвертому випадку $L(q) = \underset{s}{B}(\underset{(r,j)}{A}(K_\xi^\sigma(f)_i))$, а це означає, що функція $f = x_s \oplus \underset{(r,j)}{A}(f)$ реалізується комбінаційною схемою, зображеною на рис. 2.3. Отже, теорему доведено.

Наслідок. *Якщо в множині зведених ядер $T(f)$ бульової функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ хоча б для одного ядра $K(f)_i$ можна вказати такі оператори $\underset{s}{B}$, $\underset{(r_1,\ldots,r_t,j_1,\ldots,j_t)}{A}$, елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ і таку матрицю толерантності $L \in E_n^-$, що*

$$\left(\underset{s}{B} \circ \underset{(r_1,\ldots,r_t;j_1,\ldots,j_t)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i = L(q),$$

то бульова функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ реалізується комбінаційною схемою, що складається з одного нейронного елемента та суматорів за mod 2.

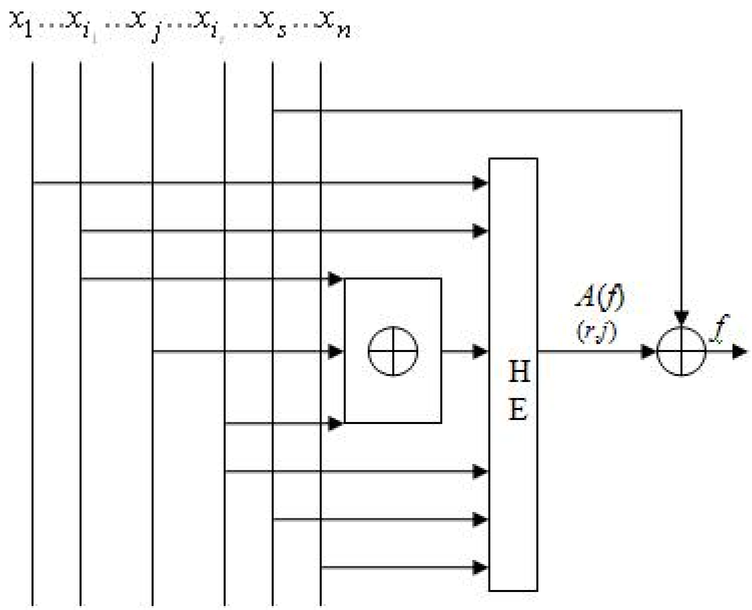

Рис. 2.3. Реалізація функції $f(x_1, \dots, x_n)$ у випадку 4

Розглянемо наступний приклад. Чи реалізується бульова функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ядро якої визначається так: $K(f) = f^{-1}(1) = \{\mathbf{a}_1 = (0,1,1,0), \mathbf{a}_2 = (1,1,1,0), \mathbf{a}_3 = (0,0,1,0), \mathbf{a}_4 = (1,0,1,0), \mathbf{a}_5 = (0,1,0,0), \mathbf{a}_6 = (0,1,0,1)\}$ на одному НЕ, або комбінаційною схемою, що складається з одного НЕ та суматорів за mod 2? На основі теореми 1.24 робимо висновок, що бульова функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не реалізується одним НЕ, оскільки $\mathbf{a}_6 = \overline{\mathbf{a}}_4$. Побудуємо множину зведених ядер $T(f)$ і за ξ виберемо одиничний елемент групи S_6.

$$T(f) = \left\{ K_\xi(f)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, .., K_\xi(f)_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Простою перевіркою легко переконатися в тому, що $L_6(6) = \underset{(1,3)}{A}(K_\xi(f)_1)$, де $L_6 \in E_4^-$. За матрицею L_6 побудуємо вектор $\mathbf{w} = (-1; -2; -4; -4,5)$, що задовольняє умову $(L_6 \square L_6^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$. Знаходимо вектор $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}_1\mathbf{w} = (-1; 2; 4; -4,5)$ і число $\omega_0 = (\mathbf{a}_z, \mathbf{w}_1) = 1,5$, де $\mathbf{a}_z$ — останній рядок матриці $\underset{(1,3)}{A}(K_\xi(f))$. Тоді за теоремою 2.1 бульова функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ реалізується на наступній комбінаційній схемі:

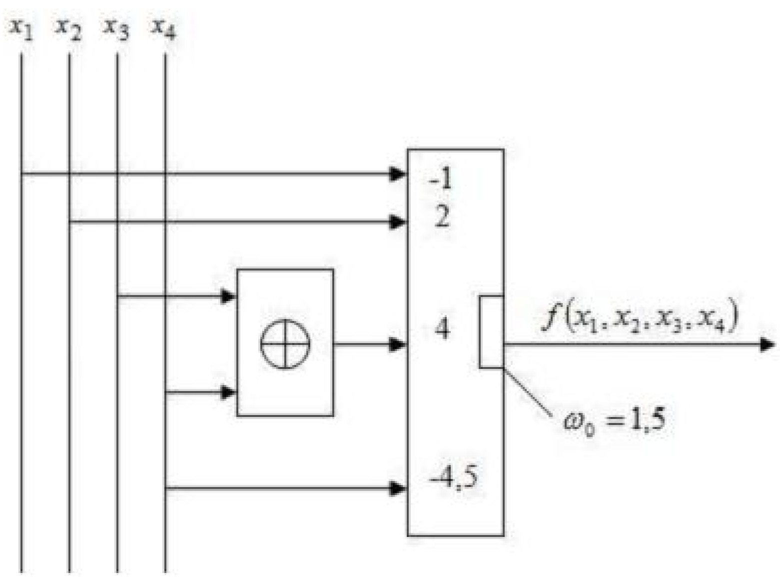

Рис. 2.4. Реалізація функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у випадку 4

Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бульова функція в алфавіті $\{0, 1\}$ і $h_f(y_1, \ldots, y_n) = 1 - 2f(x_1, \ldots, x_n)$ відповідна їй функція в алфавіті $\{-1, 1\}$ $(y_i = 1 - 2x_i)$.

На множині $G_n = \{\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mid \gamma_i \in \{-1, 1\}\}$ визначимо функції $\chi_{i_1 \ldots i_t}(\mathbf{g})$ $(t \leq n)$ наступним чином:

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \ \chi_{i_1 \ldots i_t}(\mathbf{g}) = y_{i_1}(\mathbf{g}) \cdot \ldots \cdot y_{i_t}(\mathbf{g})$$

і

$$\chi_0(\mathbf{g}) = 1,$$

де $y_i(\mathbf{g})$ — значення змінної y_i на наборі $\mathbf{g} \in G_n$. Якщо в множині G_n задати операцію покоординатного множення векторів, то G_n можна розглядати як мультиплікативну абелеву групу типу $\underbrace{(2) \times \ldots \times (2)}_{n\text{-разів}}$, і функції $\chi_{i_1 \ldots i_t}, \chi_0$ є характерами [50] групи G_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Під спектром бульової функції $h(y_1, \ldots, y_n)$ будемо розуміти 2^n-вимірний вектор

$$\mathbf{s}_h = (s_0, s_1, \ldots, s_n, s_{12}, \ldots, s_{(n-1)n}, s_{123}, \ldots, s_{12\ldots n}),$$

де

$$s_0 = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g} \in G_n} h(\mathbf{g}) \chi_0(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g} \in G_n} h(\mathbf{g}), \tag{2.2}$$

$$s_{i_1 \ldots i_t} = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g} \in G_n} h(\mathbf{g}) \chi_{i_1 \ldots i_t}(\mathbf{g}). \tag{2.3}$$

Нехай $\underset{(r,j)}{A}(K(f)), \underset{s}{B}(K(f))$ – наведені вище оператори і I_r – множина індексів $\{i_1, \ldots, i_t\}$, які задовольняють умову $r = 2^{n-i_1} + \ldots \ldots + 2^{n-i_t}$. Далі розглянемо ті перетворення у спектральній області бульових функцій, які відповідають операторам $\underset{(r,j)}{A}(K(f)), \underset{s}{B}(K(f))$. Вводимо такі позначення: якщо для бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ в алфавіті $\{0, 1\}$ ставимо у відповідність бульову функцію $h(y_1, \ldots, y_n) = 1 - 2f(x_1, \ldots, x_n)$ в алфавіті $\{1, -1\}$, то бульовим функціям в алфавіті $\{0, 1\}$, які визначаються операторами $\underset{(r,j)}{A}(K(f))$ і $\underset{s}{B}(K(f))$, поставимо у відповідність функції $\underset{(r,j)}{A}(h)$ і $\underset{s}{B}(h)$.

Теорема 2.2. *Якщо $\mathbf{s}_h$ — спектр бульової функції $h(y_1, \ldots, y_n)$ і $\mathbf{s}'_h$ — спектр бульової функції $\underset{(r,j)}{A}(h)$, то спектр $\mathbf{s}'_h$ знаходимо з спектра $\mathbf{s}_h$ наступним чином: у кожному індексі спектральних коефіцієнтів $\mathbf{s}_h$, що містять j, індекси з I_r викреслюються, якщо вони присутні, і додаються, якщо вони відсутні.*

Доведення. За означенням оператора $\underset{(r,j)}{A}(K(f))$ $(r = 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t})$ та з того, що додаванню за $\bmod 2$

в алфавіті $\{0,1\}$ відповідає множення в алфавіті $\{-1,1\}$, маємо: $\underset{(r,j)}{A}(h(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j,y_{j+1},\ldots,y_n)) = h(y_1,\ldots,y_{j-1},y'_j,y_{j+1},\ldots,y_n)$, де $y'_j = y_j y_{i_1}\ldots y_{i_t}$ і $I_r = \{i_1,\ldots,i_t\}$. Використовуючи формули (2.2) та (2.3), знаходимо $\mathbf{s}'_h = (s'_0, s'_1,\ldots,\ldots,s'_n, s'_{12},\ldots,s'_{12\ldots n})$:

$$
\begin{aligned}
&s'_0 = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\chi_0(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = \\
&= 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\chi_0(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = \\
&= 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\cdot 1 = s_0, \\
&s'_j = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\chi_j(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = 2^{-n}\times \\
&\times \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\chi_{ji_1\ldots i_t}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = s_{ji_1\ldots i_t}, \\
&s'_k = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\chi_k(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = 2^{-n}\times \\
&\times \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\chi_k(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = s_k,\ (k\neq j), \\
&s'_{ji_1} = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\chi_{ji_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)y_j(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\times \\
&\times y_{i_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times \\
&\times y_j(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)y_{i_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times\ldots \\
&\ldots\times y_{i_t}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)y_{i_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = \\
&= 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)y_j(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times \\
&\times y_{i_2}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times\ldots\times y_{i_t}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = s_{ji_2\ldots i_t},
\end{aligned}
$$

оскільки $\forall\mathbf{g}\in G_n\ y_i(\mathbf{g})y_i(\mathbf{g}) = 1$,

$$
\begin{aligned}
&s'_{jk} = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_m,\ldots,\gamma_n)\chi_{jk}(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = \\
&= 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)y_j(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n)\times \\
&\times y_k(\gamma_1,\ldots,\gamma'_j,\ldots,\gamma_n) = 2^{-n}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times y_j(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)y_{i_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)\times\ldots \\
&\ldots\times y_{i_t}(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n)y_k(\gamma_1,\ldots,\gamma_j,\ldots,\gamma_n) = s_{ji_1\ldots i_t k},
\end{aligned}
$$

якщо $k \notin I_r$ і т.д. Отже, $s'_0 = s_0, s'_j = s_{ji_1\ldots i_t}, s'_k = s_k$ $(k \neq j)$, $s'_{ji_1} = s'_{ji_2\ldots i_t}, s'_{jk} = s_{ji_1\ldots i_t k}$, $s'_{ji_1\ldots i_t} = s_j, \ldots$, і теорему доведено.

Теорема 2.3. *Якщо* $\mathbf{s}_h$ *— спектр бульової функції* $h\,(y_1, \ldots, y_n)$ *і* $\mathbf{s}'_h$ *— спектр бульової функції* $\underset{j}{B}(h)$*, то спектр* $\mathbf{s}'_h$ *знаходимо зі спектра* $\mathbf{s}_h$ *наступним чином: у кожному індексі спектральних коефіцієнтів* $\mathbf{s}_h$ *вилучається* j *там, де він є, і дописується туди, де він відсутній.*

Доведення. Враховуючи, що операції $\oplus$ — додавання за mod 2 в алфавіті $\{0, 1\}$ відповідає операція $\cdot$ — множення в алфавіті $\{-1, 1\}$, функція $\underset{j}{B}(h)$ у явному вигляді задається так:

$$\underset{j}{B}(h(y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n)) = y_j \cdot h(y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n).$$

Тоді на основі формул (2.2), (2.3) маємо:

$$\begin{gathered}
s'_0 = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \underset{j}{B}(h(\mathbf{g}))\chi_0(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} y_j(\mathbf{g}) \cdot h(\mathbf{g}) \cdot 1 = s_j, \\
s'_j = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \underset{j}{B}(h(\mathbf{g}))\chi_j(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} y_j(\mathbf{g}) \cdot h(\mathbf{g}) \cdot y_j(\mathbf{g}) = \\
= 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\mathbf{g}) = s_0,
\end{gathered}$$

оскільки $\forall \mathbf{g} \in G_n\ y_j(\mathbf{g}) y_j(\mathbf{g}) = 1$,

$$\begin{aligned}
& s'_k = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \underset{j}{B}(h(\mathbf{g}))\chi_k(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} y_j(\mathbf{g}) \cdot h(\mathbf{g}) \cdot y_k(\mathbf{g}) = \\
& = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\mathbf{g}) \cdot \chi_{jk}(\mathbf{g}) = s_{jk},\ (k \neq j), \\
& s'_{jk} = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \underset{j}{B}(h(\mathbf{g}))\chi_{jk}(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} y_j(\mathbf{g}) \cdot h(\mathbf{g}) \cdot y_j(\mathbf{g}) \times \\
& \times y_k(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\mathbf{g}) y_k(\mathbf{g}) = 2^{-n} \sum_{\mathbf{g}\in G_n} h(\mathbf{g}) \chi_k(\mathbf{g}) = s_k,
\end{aligned}$$

і т.д. Отже, $s'_0 = s_j$, $s'_j = s_0$, $s'_k = s_{jk}$, $s'_{jk} = s_k$, $s'_{jkm} = s_{km}$, $s'_{km} = s_{jkm}, \ldots, s'_{1\ldots j-1 j+1\ldots n} = s_{1\ldots j-1 j j+1\ldots n}$ і теорему доведено.

Якщо через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ відповідно позначити інваріантні операції [46], тоді теорема 2.1 на спектральній мові перепишеться так:

Теорема 2.4. *Якщо спектр* $\mathbf{s}_h$ *бульової функції* $h(y_1, \ldots, \ldots, y_n) = 1 - 2f\,(x_1, \ldots, x_n)$ $(f\,(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}, x_i \in \{0, 1\}, y_i = 1 - 2x_i)$ *за допомогою інваріантних операцій* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

та операторів $\underset{(r;j)}{A}, \underset{j}{B}(h)$ *можна перетворити так, щоб* $(n+$ $+1)$*-вимірний початковий відрізок перетвореного спектра* $\mathbf{s}'_h$ *був канонічним характеристичним вектором деякої бульової функції, що реалізується одним нейронним елементом, то функція* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *може бути реалізована на комбінаційній схемі, що складається з одного нейронного елемента та суматорів за* mod 2.

Застосування теореми 2.4 для синтезу комбінаційних схем із суматорів за mod 2 і одного нейронного елемента покажемо на наступному прикладі. Знову розглянемо функцію $f\ :\ f^{-1}(1) = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0),(0,0,1,0),(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,1,0,1)\}$, за якою побудуємо $h = 1-2f$. Спектр $\mathbf{s}_h$ функції h знаходимо за допомогою швидкого перетворення [48,49]. Матриця швидкого перетворення C для знаходження спектральних коефіцієнтів функції h у системі базисних функцій Уолша-Адамара має такий вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді $2^4\mathbf{s}_h = C(C(C(Ch)))$. Результати обчислення наведемо у таблиці 2.1.

Спектральні коефіцієнти s_1, s_2, s_3, s_4, s_0 із точністю до сталої 2^4 задають відповідні координати характеристичного вектора $\mathbf{b}_h$, тобто $\mathbf{b}_h = (-4,4,4,-8;4)$. За допомогою інваріантних операцій [46] від $\mathbf{b}_h$ переходимо до канонічного характеристичного вектора $\mathbf{b}^*_h = (8,4,4,4;4)$. Вектор $\mathbf{b}^*_h$ не знаходиться у таблиці канонічних характеристичних векторів нейрофункцій [46], тобто функція f не реалізується одним НЕ.

Розглянемо функцію $h_1 = \underset{(1,3)}{A}(h)$. Згідно з теоремою 2.2 побудуємо $2^4\mathbf{s}_h$:

$$\begin{gathered} s'_0 = s_0,\ s'_1 = s_1,\ s'_2 = s_2,\ s'_3 = s_{34},\ s'_4 = s_4, \\ s'_{12} = s_{12},\ s'_{13} = s_{134},\ s'_{14} = s_{14},\ s'_{23} = s_{234},\ s'_{24} = s_{24}, \end{gathered}$$

$$s'_{34} = s_3,\ s'_{123} = s_{1234},\ s'_{124} = s_{124},\ s'_{234} = s_{23},\ s'_{1234} = s_{123}.$$

Таблиця 2.1

y_1	y_2	y_3	y_4	h	Ch	C^2h	C^3h	$2^4\mathbf{s}_h$	$\mathbf{s}_h$
1	1	1	1	1	2	2	0	4	s_0
1	1	1	−1	1	0	−2	4	−8	s_4
1	1	−1	1	−1	−2	2	−4	4	s_3
1	1	−1	−1	1	0	2	−4	8	s_{34}
1	−1	1	1	−1	2	−2	0	4	s_2
1	−1	1	−1	−1	0	−2	4	0	s_{24}
1	−1	−1	1	−1	2	−2	4	4	s_{23}
1	−1	−1	−1	1	0	−2	4	0	s_{234}
−1	1	1	1	1	0	2	4	−4	s_1
−1	1	1	−1	1	−2	−2	0	0	s_{14}
−1	1	−1	1	−1	0	2	0	−4	s_{13}
−1	1	−1	−1	1	−2	2	0	0	s_{134}
−1	−1	1	1	1	0	2	4	4	s_{12}
−1	−1	1	−1	1	−2	2	0	0	s_{124}
−1	−1	−1	1	−1	0	2	0	4	s_{123}
−1	−1	−1	−1	1	−2	2	0	0	s_{1234}

Тоді $\mathbf{b}_{h_1} = (-4, 4, 8, -8; 4)$ і $\mathbf{b}^*_{h_1} = (8, 8, 4, 4; 4)$. Вектор $\mathbf{b}^*_{h_1}$ міститься в таблиці канонічних характеристичних векторів нейрофункцій. Згідно з теоремою 2.4 функція f реалізується комбінаційною схемою, що складається з одного суматора за mod 2 і одного НЕ (див. рис. 2.4).

Зауваження. Якщо $n \leq 7$, то за ваговий вектор НЕ, що входить у цю комбінаційну схему, можна вибрати оптимальний цілочисловий вектор із таблиці, яка містить канонічні характеристичні вектори нейрофункцій [46]. У випадку, коли $n > 7$, НЕ можна синтезувати за цілочисловим алгоритмом, що наведений у розділі 1.

2.2. Алгебраїчні властивості нейробазису бульових функцій

Нехай G — скінченна група відносно операції множення. Розглянемо сукупність усіх формальних лінійних комбінацій вигляду $u = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$, де α_g — елемент деякого поля K. Визначимо над цими формальними лінійними комбінаціями операції додавання і множення наступним чином:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} \left(\alpha_g + \beta_g\right) g,$$

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \beta_h h\right) = \sum_{v\in G}\left(\sum_{g,h\in G, v=gh} \alpha_g \beta_h\right) v.$$

Відносно введених операцій множина всіх формальних лінійних комбінацій $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$ утворює кільце KG, що називається груповим кільцем.

Нехай $G_n = H_2 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_2$ — прямий добуток n циклічних груп $H_2 = \langle a | a^2 = 1\rangle$ 2-го порядку і $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$ — групове кільце над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Визначимо функцію f на групі G_n із значеннями у полі $\mathbb{R}$ так:

$$f(g) = \alpha_g. \tag{2.4}$$

Елемент $g \in G_n$ однозначно запишеться у вигляді $g = (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \ldots, a_n^{x_n})$, де $a_i \in \{-1, 1\}$, $x_i \in \{0, 1\}$. Враховуючи це, рівність (2.4) можна задати на векторах $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, поклавши

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \alpha_g. \tag{2.5}$$

Позначимо через F множину всіх елементів групового кільця $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$, у запису яких зустрічаються тільки коефіцієнти $\alpha_g \in \{0, 1\}$. Очевидно, на основі (2.4) і (2.5), що між елементами множини F та множиною всіх бульових функцій від n змінних існує взаємно однозначна відповідність, тобто $f \leftrightarrow u_f$.

Елемент u_f групового кільця $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$ будемо називати елементом нейробазису в $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$, якщо відповідна йому функція f реалізується одним НЕ із пороговою функцією активації.

У [46] над бульовими функціями визначені чотири операції, які зберігають властивість їх реалізованості одним нейронним елементом із пороговою функцією активації. Розглянемо ці операції на мові групових кілець:

1. Якщо бульова функція $f^{(1)}$ отримана з бульової функції f шляхом інвертування i-ої змінної і $f \leftrightarrow u_f$, тоді $f^{(1)} \leftrightarrow u_f a_i$. Отже, інваріантна операція першого типу — це множення елемента u_f, що відповідає f на i-у твірну групи G_n.

Нехай φ — автоморфізм групи G_n. Якщо $u_f = \sum\limits_{g \in G_n} \alpha_g g$, тоді $\varphi(u_f) = \sum\limits_{g \in G_n} \alpha_g \varphi(g)$ задає автоморфізм групового кільця $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$. Сукупність усіх таких автоморфізмів групового кільця $\mathbb{R}\mathbb{G}_n$ утворює групу, яку позначимо через $\mathrm{Aut} G_n$, а її підгрупу, що складається з усіх підстановок визначених на множині твірних $\{a_1, \ldots, a_n\}$ групи G_n, — через $\mathrm{Aut}^* G_n$.

2. Нехай бульова функція $f^{(2)}$ отримана з бульової функції шляхом перестановки двох змінних x_i, x_j і $f \leftrightarrow u_f$. Отже, інваріантна операція другого типу є автоморфізмом із $\mathrm{Aut}^* G_n$.

3. Якщо $f^{(3)}$ є двоїстою функцією до f і $f \leftrightarrow u_f$, $f^{(3)} \leftrightarrow u_{f^{(3)}}$, тоді елемент $u_{f^{(3)}}$ отримаємо з елемента $u_f a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + \sum\limits_{g \in G_n} g$ зведенням його коефіцієнтів за mod 2.

4. Розглянемо операцію еквідуалізації функції f:

$$f^{(4)} = \overline{x_j \oplus f\left(\overline{x_1 \oplus x_j}, \ldots, \overline{x_{j-1} \oplus x_j}, x_j, \overline{x_{j+1} \oplus x_j}, \ldots, \overline{x_n \oplus x_j}\right)},$$

де $\oplus$ — сума за mod 2 і $f \leftrightarrow u_f$.

Нехай $H_j = \langle a_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle a_{j-1} \rangle \otimes \langle a_{j+1} \rangle \otimes \ldots \otimes \langle a_n \rangle$ є прямим добутком $n-1$ циклічних груп 2-го порядку і $u = \sum\limits_{g \in G_n} \alpha_g g$. Якщо $f^{(4)} \leftrightarrow u_{f^{(4)}}$, тоді $u_{f^{(4)}}$ отримаємо з елемента $\left(\sum\limits_{g \in H_j} \alpha_g g\right) a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n + \sum\limits_{g \in H_j} g + \sum\limits_{g \in a_j H_j} \alpha_g g$ зведенням його коефіцієнтів за mod 2.

Множина $A(\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n) = \left\{ \sum\limits_{g \in G_n} \alpha_g g \mid \sum\limits_{g \in G_n} \alpha_g = 0 \right\}$ називається фундаментальним ідеалом групового кільця $\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n$. Очевидно, множина $A(\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n)$ є нільпотентним ідеалом групового кільця $\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n$, оскільки добуток будь-яких $n+1$ елементів з $A(\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n)$ дорівнює нулю. Елементи з $A(\mathbb{Z}_2 \mathbb{G}_n)$, що мають вигляд:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^{r_i}, \qquad (r_i \in \{0,1\}), \tag{2.6}$$

лінійно незалежні над полем $\mathbb{Z}_2$ і складають базис лінійного простору $A(\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n)$. Цей базис називається стандартним базисом фундаментального ідеалу групового кільця $\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n$.

Теорема 2.5. *Стандартний базис фундаментального ідеалу $A(\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n)$ групового кільця $\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n$ складається з елементів нейробазису $\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n$.*

Доведення. Нехай $f_t(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \prod\limits_{j=1}^{t}(1+a_j)$, $1 \le t \le$ $\le n$, і

$$L_1=(0), \quad L_2=\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_1^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, L_t=\begin{pmatrix} L_{t-1} & 0 \\ L_{t-1}^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Легко бачити, що ядро $K(f_t)$ бульової функції $f_t(x_1,\ldots,x_n)$ співпадає із зведеним ядром $K(f_t) = \mathbf{g}_1 K(f_t)$, де $\mathbf{g}_1 = (0,\ldots$ $\ldots,0)$, $K(f_t) = \begin{pmatrix} L_t & 0\ldots0 \\ L_t^* & 0\ldots0 \end{pmatrix}$. Розглянемо вектор $\mathbf{w} =$ $= (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega_n^-$, координати якого визначимо наступним чином: $\omega_1 = -1$, $,\omega_2 = \omega_1 - 1, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 - 1, \ldots, \omega_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\omega_i -$ -1. Тоді матриця толерантності $L_{\mathbf{w}} = L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ L_{n-1}^* & 0 \end{pmatrix} \in$ $\in E_n^-$, така, що $\begin{pmatrix} L_{\mathbf{w}} \\ L_{\mathbf{w}}^* \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$, де $\mathbf{c}_{\mathbf{w}} = (c_1, c_2, \ldots, c_{2^n})$ і $0 > c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$. З (2.7) безпосередньо випливає, що матриця толерантності L_n має наступну структуру:

$$L_n = \begin{pmatrix} L_t & \overbrace{00\ldots0}^{n-t} \\ L_t^* & 00\ldots0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$L_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} K(f_t)_1 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $K(f_t)_1 = L_{\mathbf{w}}(q)$ $(L_{\mathbf{w}} \in E_n^-, q = |K(f)_t|)$ і на основі теореми 1.21 робимо висновок, що функція $f(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним НЕ з пороговою функцією активації і відповідний елемент u_f $(f \leftrightarrow u_f)$ є елементом нейробазису $\mathbb{Z}_2\mathbb{G}_n$. Отже, теорему доведено.

Сукупність усіх елементів нейробазису з F позначимо через N_2. У зв'язку з цим виникає питання: відносно яких відображень групового кільця множина N_2 буде інваріантною? Відповідь на поставлене питання міститься у наступній теоремі.

Теорема 2.6. *Множина N_2 інваріантна відносно автоморфізму $\varphi \in \mathrm{Aut}G_n$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi \in \mathrm{Aut}^*G_n$.*

Доведення. Нехай Aut^*G_n — підгрупа групи $\mathrm{Aut}G_n$, відносно якої множина $\{a_1, \dots, a_n\}$ є інваріантною. Покажемо, що коли $\varphi \in \mathrm{Aut}G_n \setminus \mathrm{Aut}^*G_n$, тоді $\varphi(u) \notin N_2$ для деякого $u \in N_2$. Якщо покласти $u = 1 + a_i$, тоді в силу теореми 2.5 $u \in N_2$. Для автоморфізму $\varphi \in \mathrm{Aut}G_n \setminus \mathrm{Aut}^*G_n$ існує такий індекс i, що $\varphi(a_i) = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}$ і $\varphi(1 + a_i) = 1 + a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}$, де $r > 1$. Якщо $f_r(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow 1 + a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}$, тоді

$$K(f_r) = \begin{pmatrix} 00\dots000\dots000\dots000\dots0 \\ 00\dots010\dots010\dots010\dots0 \end{pmatrix}$$

(у другому рядку одиниці містяться в i_1-ому, $\dots$, i_r-ому стовпчиках). Отже, множина зведених ядер $T(f_r)$ функції $f_r(x_1, \dots, x_n)$ складається з двох елементів: $K(f_r)_1 = K(f_r)$ і

$$K(f_r)_2 = \begin{pmatrix} 00\dots010\dots010\dots010\dots0 \\ 00\dots000\dots000\dots000\dots0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки перші два рядки будь-якої матриці толерантності $L \in E_n^-$ мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 00\dots0 \\ 10\dots0 \end{pmatrix},$$

то для зведених ядер $K(f_r)_i$ $(i = 1, 2)$ неможливо вибрати елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_2$ так, щоб $K^{\sigma}_{\xi}(f_r)_i = L(2)$, хоча б для одної матриці $L \in E^{-}_{n}$. Тоді, згідно з теоремою 1.21, функція f_r не може бути реалізована одним НЕ з пороговою функцією активації, тобто $\varphi(u) = 1 + a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots a_{i_r} \notin N_2$, і таким чином теорему доведено.

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИ СИНТЕЗУ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ УЗАГАЛЬНЕНОЮ ПОРОГОВОЮ ФУНКЦІЄЮ АКТИВАЦІЇ

У цьому розділі розглядаються нейронні елементи з узагальненою пороговою функцією активації і наводяться методи їх синтезу, встановлені критерії реалізованості бульових функцій одним НЕ з узагальненою пороговою функцією активації, а також на нейронних елементах із двопороговою функцією активації.

3.1. Реалізація бульових функцій одним нейронним елементом із узагальненою пороговою функцією активації

Нехай $H_2 = \{-1, 1\}$ — циклічна група 2-го порядку, $G_n = H_2 \otimes \ldots \otimes H_2$ — прямий добуток n циклічних груп H_2 і $X(G_n)$ — група характерів [50] групи G_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. На множині $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ визначимо функцію:

$$\operatorname{Rsign} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Нехай $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ і $(i_1, \ldots, i_n)$ — його двійковий код, тобто $i = i_1 2^{n-1} + i_2 2^{n-2} + \ldots + i_n$, $i_j \in \{0, 1\}$. Значення характеру χ_i на елементі $\mathbf{g} = ((-1)^{\alpha_1}, \ldots, (-1)^{\alpha_n}) \in G_n$ $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n)$ визначається так:

$$\chi_i(\mathbf{g}) = (-1)^{\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n}. \tag{3.2}$$

Розглянемо 2^n-вимірний векторний простір $V_{\mathbb{R}} = \{\varphi \mid \varphi : G_n \to \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$. Елементи χ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$ групи $X(G_n)$ утворюють ортогональний базис простору $V_{\mathbb{R}}$. Бульова функція в алфавіті $\{-1, 1\}$ задає однозначне відображення $f : G_n \to H_2$, тобто $f \in V_{\mathbb{R}}$. Отже, довільну бульову функцію $f \in V_{\mathbb{R}}$ однозначно можна записати у вигляді:

$$f(\mathbf{g}) = s_0\chi_0(\mathbf{g}) + s_1\chi_1(\mathbf{g}) + \ldots + s_{2^n-1}\chi_{2^n-1}(\mathbf{g}). \tag{3.3}$$

Вектор $\mathbf{s}_f = (s_0, s_1, \ldots, s_{2^n-1})$ називається спектром бульової функції у системі характерів $X(G_n)$ (у системі базисних функцій Уолша-Адамара).

Із різних характерів $X(G_n)$, крім головного, побудуємо m-елементну множину $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ і відносно вибраної системи характерів розглянемо наступну математичну модель нейронного елемента:

$$f(x_1(\mathbf{g}), \ldots, x_n(\mathbf{g})) = \mathrm{Rsign}(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{g}) + w_0), \tag{3.4}$$

де вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ називається вектором структури НЕ і $\mathbf{g} \in G_n$.

Нехай $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0$. Якщо $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ є вектором структури НЕ відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$ групи G_n над $\mathbb{R}$, що реалізує бульову функцію $f : G_n \to H_2$, то з (3.1) і (3.4) безпосередньо випливає, що

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathrm{w}(\mathbf{g}) \neq 0. \tag{3.5}$$

Далі будемо розглядати тільки такі нейронні елементи, вектори структур яких задовольняють умову (3.5). Множину всіх таких $m+1$-вимірних дійсних векторів, що задовольняють умову (3.5), позначимо через $\mathrm{W}_{m+1} = \mathrm{W}_{m+1}(\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m})$.

Очевидно, що нейронний елемент відносно системи характерів $\{\chi_1, \chi_2, \chi_4, \ldots, \chi_{2^{n-1}}\}$ співпадає з пороговим елементом [46].

Аналогічно до того, як у пороговій логіці, тут також виникає питання: чи реалізується задана бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ одним НЕ відносно вибраної системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$, і якщо так, то як знайти відповідний вектор структури НЕ?

Теорема 3.1. *Бульова функція $f : G_n \to H_2$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$ із вектором структури $\mathbf{w} \in \mathrm{W}_{m+1}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad f(\mathbf{g})\mathrm{w}(\mathbf{g}) = |\mathrm{w}(\mathbf{g})|\,, \tag{3.6}$$

де $|x|$ — модуль числа $x \in \mathbb{R}$.

Доведення безпосередньо випливає з (3.4) та з рівності: $(\mathrm{Rsign}\, x)\cdot x = |x|$, де $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема 3.2. *Бульова функція $f : G_n \to H_2$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$ із* *вектором структури* $\mathbf{w} \in \mathrm{W}_{m+1}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})|. \tag{3.7}$$

Доведення. Дійсно, якщо припускати, що має місце (3.7) і функція f не реалізується одним НЕ відносно $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$, то існують такі елементи $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k \in G_n$, для яких не виконується рівність (3.6), тобто:

$$\forall \mathbf{g}_j \in \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k\} \quad f(\mathbf{g}_j)\mathrm{w}(\mathbf{g}_j) = -|\mathrm{w}(\mathbf{g}_j)| \tag{3.8}$$

і

$$2\sum_{j=1}^{k} |\mathrm{w}(\mathbf{g}_j)| = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})| - \sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\mathrm{w}(\mathbf{g}) = 0.$$

Отже, $\forall \mathbf{g}_j \in \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k\}$ $\mathrm{w}(\mathbf{g}_j) = 0$, що суперечить умові $\mathbf{w} \in$ $\in \mathrm{W}_{m+1}$. Необхідність є наслідком співвідношення (3.6).

Запишемо ліву частину рівності (3.7) у розгорнутому вигляді:

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})(\omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0) =$$

$$= \omega_0 \sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g}) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \left(\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\chi_{i_j}(\mathbf{g}) \right) = \omega_0 s_0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j s_{i_j}.$$

Якщо зі спектральних коефіцієнтів $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}, s_0$ бульової функції f, що відповідають системі характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ \ldots \chi_{i_m}\}$, побудувати вектор $\mathbf{s}_f(X) = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}; s_0)$, який будемо називати характеристичним вектором бульової функції f відносно системи X, то теорема 3.2 переформулюється так:

Теорема 3.3. *Бульова функція* $f : G_n \to H_2$ *реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів* $X = \{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$ *із вектором структури* $\mathbf{w} \in \mathrm{W}_{m+1}$ *тоді і тільки тоді, коли її характеристичний вектор* $\mathbf{s}_f(X)$ *задовольняє умову*

$$(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})|, \tag{3.9}$$

де $(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ *— скалярний добуток векторів* $\mathbf{w}$ *і* $\mathbf{s}_f(X)$.

Якщо НЕ з вектором структури $\mathbf{w} \in \mathrm{W}_{m+1}$ відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \dots \chi_{i_m}\}$ реалізує бульову функцію f, то з теореми 3.3 та рівності(3.8) випливає, що для бульової функції $h : G_n \to H_2$ $(h \neq f)$ виконується нерівність

$$(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) > (\mathbf{w}, \mathbf{s}_h(X)). \tag{3.10}$$

Теореми Чоу [46] справджуються і для нейронних елементів відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \dots \chi_{i_m}\}$.

Перша теорема Чоу. *Нехай $f : G_n \to H_2$ і $h : G_n \to H_2$ — бульові функції і $\mathbf{s}_f(X)$ та $\mathbf{s}_h(X)$ відповідно їх характеристичні вектори відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$. Якщо $\mathbf{s}_f(X) = \mathbf{s}_h(X)$, тоді функції f та h або реалізуються, або не реалізуються одним НЕ відносно X.*

Друга теорема Чоу. *Якщо характеристичні вектори $\mathbf{s}_f(X)$ та $\mathbf{s}_h(X)$ бульових функцій $f : G_n \to H_2$ і $h : G_n \to H_2$ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$ рівні й одна з цих функцій реалізується одним НЕ, то $f = h$.*

3.2. Синтез нейронних елементів із узагальненою пороговою функцією активації

У цьому підрозділі розглядаються різні методи синтезу НЕ відносно довільної системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$. Основні труднощі при розробці практично прийнятних методів синтезу НЕ відносно X полягають в нелінійності виразу $\sum\limits_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})|$. В методі мінімізації функціоналу [46] цей вираз апроксимується поліномом відповідного степеня і знаходиться вектор $\mathbf{w}^*$, що мінімізує побудований функціонал. Вектор $\mathbf{w}^*$ приймається за наближеним вектором структури НЕ відносно апроксимації даного порядку.

В ітераційному методі передбачається така модифікація $m+1$-вимірного довільного вектора $\mathbf{w}_i$, яка на кожному кроці ітерації забезпечує зменшення відстані між вектором структури $\mathbf{w}$ нейронного елемента і вектором $\mathbf{w}_i$, за умови, що вектор $\mathbf{w}$ існує. Якщо бульова функція $f : G_n \to H_2$ не реалізується одним НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$, то, очевидно, вектор $\mathbf{w}$ не існує і в цьому випадку в області характеристичних векторів бульових функцій $f_i : G_n \to H_2$, що реалізуються на НЕ з відповідними векторами структури $\mathbf{w}_i$, утворюється граничний цикл [46].

При синтезі НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \ldots, \chi_{i_m}\}$ за допомогою матриць толерантності спочатку з'ясовується питання про реалізованість бульової функції одним нейронним елементом, а потім будується цілочисловий вектор структури НЕ, що реалізує задану функцію.

3.2.1. Метод апроксимації. Аналогічно до того, як для ПЕ в [46], будуємо функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ для НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$. Функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ у явному вигляді задається так:

$$U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) = \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})| - (\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)), \tag{3.11}$$

де $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_0)$ — довільний вектор $m+1$-вимірного простору $\mathbb{R}^{m+1}$, $\mathbf{s}_f(X) = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}, s_0)$.

Функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ є опуклим на множині всіх $m+1$-вимірних дійсних векторів. Дійсно, якщо $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{m+1}$ і $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}_1 + (1-\lambda)\mathbf{w}_2$ ($\lambda \in [0,1]$), то

$$\begin{gathered} U(\lambda \mathbf{w}_1 + (1-\lambda)\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_f(X)) = \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\lambda \mathrm{w}_1(\mathbf{g}) + (1-\lambda)\mathrm{w}_2(\mathbf{g})| - \\ - (\lambda \mathbf{w}_1 + (1-\lambda)\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_f(X)) \leq \lambda \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}_1(\mathbf{g})| + \\ + (1-\lambda) \sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}_2(\mathbf{g})| - \lambda(\mathbf{w}_1, \mathbf{s}_f(\mathbf{g})) - (1-\lambda)((\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_f(\mathbf{g}))) = \\ = \lambda \left(\sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}_1(\mathbf{g})| - (\mathbf{w}_1, \mathbf{s}_f(X)) \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}_2(\mathbf{g})| - \right. \\ \left. - (\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_f(X)) \right) = \lambda U(\mathbf{w}_1, \mathbf{s}_f(X)) + (1-\lambda) U(\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_f(X)). \end{gathered}$$

Якщо $\mathbf{w} \in \mathrm{W}_{m+1}$, тоді з теореми 3.3 та нерівності (3.10) випливає, що $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) \geq 0$ і знак "=" має місце тільки в тому випадку, коли $\mathbf{w}$ є вектором структури НЕ відносно системи X, що реалізує функцію f.

Розглянемо мінімізацію функціоналу U за умови, що його нелінійний вираз $\sum_{\mathbf{g} \in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})|$ замінимо поліномом відповідного степеня, в залежності від порядку апроксимації. Нехай

$$q|\mathrm{w}(\mathbf{g})| \approx \xi_2 q^2 \mathrm{w}^2(\mathbf{g}) + \xi_4 q^4 \mathrm{w}^4(\mathbf{g}) + \ldots + \xi_{2k} q^{2k} \mathrm{w}^{2k}(\mathbf{g}), \tag{3.12}$$

де $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ і q — такий нормуючий множник, що

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad 0 < q|\mathrm{w}(\mathbf{g})| \leq 1. \tag{3.13}$$

Величини ξ_i в (3.12) вибираємо так, щоб мінімізувати середнє квадратичне відхилення між похідними по $\mathrm{w}(\mathbf{g})$ функції $q|\mathrm{w}(\mathbf{g})|$ і її поліноміальної апроксимації [46].

Якщо $k = 1$, то будемо говорити про апроксимацію 1-го порядку, якщо $k = 2$, то про апроксимацію 2-го порядку і т.д.

Розглянемо апроксимацію 1-го порядку. В цьому випадку:

$$|\mathrm{w}(\mathbf{g})| \approx \xi_2 q \mathrm{w}^2(\mathbf{g}),\ (\mathbf{g} \in G_n).$$

Просумувавши ліву та праву частини останнього виразу по всіх $\mathbf{g} \in G_n$, одержуємо:

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})| = \xi_2 q \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^2(\mathbf{g}), \tag{3.14}$$

де

$$\mathrm{w}^2(\mathbf{g}) = \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{g}) + \omega_0\right)^2 = \sum_{j=0}^{m}\sum_{r=0}^{m} \omega_j \omega_r \chi_{i_j}(\mathbf{g}) \chi_{i_r}(\mathbf{g}),$$

і $\chi_{i_0} = \chi_0$ — головний характер групи G_n. Підставляючи значення $\mathrm{w}^2(\mathbf{g})$ в (3.14) і враховуючи ортогональне співвідношення характерів [50], маємо:

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})| = \xi_2 q \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{r=0}^{m} \omega_j \omega_r \chi_{i_j}(\mathbf{g}) \chi_{i_r}(\mathbf{g})\right) =$$

$$= \xi_2 q \sum_{j=0}^{m}\sum_{r=0}^{m} \omega_j \omega_r \left(\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \chi_{i_j}(\mathbf{g}) \chi_{i_r}(\mathbf{g})\right) = 2^n \xi_2 q \sum_{j=0}^{m} \omega_j^2.$$

Тоді функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ можна записати так:

$$U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) = 2^n \xi_2 q \sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 - \sum_{j=0}^{m} \omega_j s_{i_j}, \tag{3.15}$$

де $i_0 = 0$.

Функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$, згідно з (3.15), є неперервним відносно ω_i ($i = 0, 1, \ldots, m$). Отже, функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ можна мінімізувати, прирівнявши до нуля похідні U за ω_j:

$$\frac{\partial U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))}{\partial \omega_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Звідси

$$2^{n+1}\xi_2 q\omega_j - s_{i_j} = 0$$

і

$$\omega_j = \frac{1}{2^{n+1}\xi_2 q} s_{i_j},\ j = 0, 1, \ldots, m. \tag{3.16}$$

Якщо $\mathbf{w}$ — ненульовий вектор, то з того, що $|\mathrm{w}(\mathbf{g})| = \xi_2 q \mathrm{w}^2(\mathbf{g})$ випливає, що $\xi_2 > 0$. Тоді за координати ω_j вектора $\mathbf{w}$ можна вибрати відповідні спектральні коефіцієнти s_{i_j} бульової функції f, оскільки НЕ з вектором структури $\mathbf{w}$ і $\lambda\mathbf{w}$ відносно системи $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ реалізують одну й ту саму бульову функцію, якщо $\mathbf{w} \in W_{m+1}$ і $\lambda > 0$. Отже, $\omega_j^* = s_{i_j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ і в результаті апроксимації першого порядку за вектор структури НЕ вибирається вектор $\mathbf{w}^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*, \omega_0^*)$. Розглянемо наступні два можливі випадки:

1) $\mathbf{w}^* \in \mathrm{W}_{m+1}$,
2) $\mathbf{w}^* \notin \mathrm{W}_{m+1}$.

У першому випадку, якщо $\forall \mathbf{g} \in G_n$ $f(\mathbf{g}) = \operatorname{Rsign} \mathrm{w}^*(\mathbf{g})$, то НЕ з вектором структури $\mathbf{w}^*$ реалізує бульову функцію f і задачу синтезу завершено. Якщо існує такий елемент $\mathbf{g} \in G_n$, що $f(\mathbf{g}) = -\operatorname{Rsign} \mathrm{w}^*(\mathbf{g})$, тоді або завершуємо процес синтезу НЕ методом апроксимації (не побудувавши його), або переходимо до апроксимації другого порядку.

У другому випадку побудуємо два вектори $\mathbf{w}_p^+$ і $\mathbf{w}_p^-$, які належать множині W_{m+1} і як завгодно близькі до вектора $\mathbf{w}^*$, тобто для будь-якого нескінченно малого $\varepsilon > 0$ відстань $\rho(\mathbf{w}^*, \mathbf{w}_p^+) < \varepsilon$ і $\rho(\mathbf{w}^*, \mathbf{w}_p^-) < \varepsilon$. При побудові векторів $\mathbf{w}_p^+, \mathbf{w}_p^- \in \mathrm{W}_{m+1}$ $(p \in \mathbb{N})$ на них накладаємо наступні умови: якщо $\mathbf{g} \in G_n$ такий, що $\mathrm{w}^*(\mathbf{g}) \neq 0$, то

$$\operatorname{Rsign} \mathrm{w}^*(\mathbf{g}) = \operatorname{Rsign} \mathrm{w}_p^+(\mathbf{g}) = \operatorname{Rsign} \mathrm{w}_p^-(\mathbf{g}), \tag{3.17}$$

якщо $\mathbf{g} \in G_n$ такий, що $\mathrm{w}^*(\mathbf{g}) = 0$, то

$$\operatorname{Rsign} \mathrm{w}_p^+(\mathbf{g}) > 0 \text{ і } \operatorname{Rsign} \mathrm{w}_p^-(\mathbf{g}) < 0. \tag{3.18}$$

Нехай $\omega_{\min}^+ = \min\{\mathrm{w}^*(\mathbf{g}) \mid \mathrm{w}^*(\mathbf{g}) > 0,\ \mathbf{g} \in G_n\}$, $\omega_{\max}^- = \max\{\mathrm{w}^*(\mathbf{g}) \mid \mathrm{w}^*(\mathbf{g}) < 0,\ \mathbf{g} \in G_n\}$ і $\omega_0^+(p) = \omega_0^* + \dfrac{\omega}{2p}$, $\omega_0^-(p) =$

$= \omega_0^* - \dfrac{\omega}{2p}$, де $\omega = \min\{\omega_{\min}^+, -\omega_{\max}^-\}$. Тоді вектори $\mathbf{w}_p^+ = (\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*, \omega_0^+(p))$, $\mathbf{w}_p^-(\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*, \omega_0^-(p))$ задовольняють умови (3.17), (3.18) і при $p \to \infty \quad \rho(\mathbf{w}^*, \mathbf{w}_p^+) \to 0, \quad \rho(\mathbf{w}^*, \mathbf{w}_p^-) \to 0.$

Якщо $\forall \mathbf{g} \in G_n$ справджується одна з умов

$$f(\mathbf{g}) = \mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_p^+(\mathbf{g}), \tag{3.19}$$

або

$$f(\mathbf{g}) = \mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_p^-(\mathbf{g}), \tag{3.20}$$

то за вектор структури НЕ, що реалізує функцію f, вибирається вектор $\mathbf{w}_p^+$ або $\mathbf{w}_p^-$ залежно від того, чи має місце співвідношення (3.19) або (3.20). Якщо жодна з цих умов для кожного $\mathbf{g} \in G_n$ не виконується, то синтез НЕ методом апроксимації 1-го порядку або завершуємо (не побудувавши його), або переходимо до апроксимації 2-го порядку.

Розглянемо синтез НЕ методом апроксимації 1-го порядку на наступному прикладі.

Розглянемо бульову функцію $h(y_1, y_2, y_3, y_4)$ в алфавіті $\{-1, 1\}$, що приймає значення 1 на наборах $\{(1,1,1,1), (1,-1,1,1), (1,-1,1,-1), (-1,1,1,-1), (-1,-1,1,1),$ $(-1,-1,1,-1)\}$ і НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_2, \chi_6, \chi_9\}$. Характери χ_2,χ_6,χ_9 вибираємо так, щоб відповідні спектральні коефіцієнти s_2,s_6,s_9 задовольняли умову

$$\forall i \in \{2,6,9\} \text{ і } \forall j \in \{0,1,\ldots,15\} \setminus \{2,6,9\}\ |s_i| \geq |s_j|.$$

Якщо від функції $h(y_1, y_2, y_3, y_4)$ перейти до функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ за допомогою перетворення $f = -\dfrac{1}{2}(h-1)$ і $x_i = -\dfrac{1}{2}(y_i-1)$, то простою перевіркою легко переконатися в тому, що жодне зведене ядро $K(f)_i \in T(f)$ не допускає зображення матрицями толерантності з E_4^-, тобто бульова функція f не може бути реалізована одним НЕ відносно $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Знаходимо спектральні коефіцієнти s_0,s_2,s_6,s_9 бульової функції h:

$$s_0 = -\frac{1}{4};\ s_2 = \frac{3}{4};\ s_6 = -\frac{1}{4};\ s_9 = \frac{1}{4}.$$

Згідно з апроксимацією 1-го порядку:

$$\omega_0^* = -\frac{1}{4};\ \omega_1^* = \frac{3}{4};\ \omega_2^* = -\frac{1}{4};\ \omega_3^* = \frac{1}{4}.$$

Вектор $\mathbf{w}^* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*; \omega_0^*)$ не належить W_4, оскільки існують такі елементи $\mathbf{g}_1 = (1, 1, 1, -1), \mathbf{g}_2 = (-1, 1, 1, 1) \in G_n$, що

$$\mathrm{w}^*(\mathbf{g}_1) = \omega_1^*\chi_2(\mathbf{g}_1) + \omega_2^*\chi_6(\mathbf{g}_1) + \omega_3^*\chi_9(\mathbf{g}_1) + \omega_0^* = 0$$

і

$$\mathrm{w}^*(\mathbf{g}_2) = \omega_1^*\chi_2(\mathbf{g}_2) + \omega_2^*\chi_6(\mathbf{g}_2) + \omega_3^*\chi_9(\mathbf{g}_2) + \omega_0^* = 0.$$

Побудуємо вектори $\mathbf{w}^-(p) = (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*; \omega_0^-(p))$, $\mathbf{w}^+(p) = (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*; \omega_0^+(p))$, де $\omega_0^-(p) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4p}$, $\omega_0^+(p) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4p}$ і результати обчислення при $p = 1$ наведено в наступній таблиці:

Таблиця 3.1. Синтез НЕ відносно X методом апроксимації 1-го порядку

y_1	y_2	y_3	y_4	χ_2	χ_6	χ_9	h	$\mathbf{s}_h$	w^*	w^+	w^-
1	1	1	1	1	1	1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	1	1	−1	1	1	−1	−1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
1	−1	1	1	1	−1	1	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	$-\frac{1}{4}$	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{4}$
−1	1	1	1	1	1	−1	−1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
−1	1	1	−1	1	1	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
−1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	0	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$
−1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
−1	−1	1	1	1	−1	−1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$
−1	−1	−1	1	−1	1	−1	−1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{4}$
−1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1	$\frac{1}{4}$	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$

На основі таблиці 3.1 робимо висновок, що

$$\forall \mathbf{g} \in G_4 \quad h(\mathbf{g}) = \mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}^-(\mathbf{g}),$$

тобто функція $h(y_1, y_2, y_3, y_4)$ реалізується одним НЕ відносно системи $X = \{\chi_2, \chi_6, \chi_9\}$ з вектором структури $\mathbf{w}^- = \left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2}\right)$ або з цілочисловим вектором структури $\mathbf{w} = 4 \cdot \mathbf{w}^- = (3, -1, 1; -2)$.

При апроксимації 2-го порядку маємо:

$$|\mathrm{w}(\mathbf{g})| \approx \xi_2 q \mathrm{w}^2(\mathbf{g}) + \xi_4 q^3 \mathrm{w}^4(\mathbf{g}),\ \mathbf{g} \in G_n$$

і
$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{g})| = \xi_2 q \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^2(\mathbf{g}) + \xi_4 q^3 \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^4(\mathbf{g}), \tag{3.21}$$
де
$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^2(\mathbf{g}) = 2^n \sum_{j=0}^{m} \omega_j^2, \tag{3.22}$$
$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^4(\mathbf{g}) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{m} \omega_j\omega_k\omega_r\omega_t \cdot \Big(\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \chi_{i_j}(\mathbf{g})\chi_{i_k}(\mathbf{g})\times$$
$$\times\chi_{i_r}(\mathbf{g})\chi_{i_t}(\mathbf{g})\Big).$$
При знаходженні значення виразу $\sum\limits_{\mathbf{g}\in G_n} \chi_{i_j}(\mathbf{g})\chi_{i_k}(\mathbf{g})\chi_{i_r}(\mathbf{g})\chi_{i_t}(\mathbf{g})$ розглянемо наступні два можливі випадки відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}, \chi_{i_0} = \chi_0\}$:

1) добуток будь-яких чотирьох різних характерів не дорівнює головному характеру χ_0.

У цьому випадку:
$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \chi_{i_j}(\mathbf{g})\chi_{i_k}(\mathbf{g})\chi_{i_r}(\mathbf{g})\chi_{i_t}(\mathbf{g}) = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } j=k=r=t, \\ 2^n, & \text{якщо } j=k \text{ і } r=t, \\ 2^n, & \text{якщо } j=r \text{ і } k=t, \\ 2^n, & \text{якщо } j=t \text{ і } k=r, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$
і
$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} \mathrm{w}^4(\mathbf{g}) = 2^n \left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^4 + 3\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0;\,k\neq j}^{m} \omega_j^2\omega_k^2\right) =$$
$$= 2^n \left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^4 + 6\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m} \omega_j^2\omega_k^2\right) =$$
$$= 2^n \left(\left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^2\right)^2 + 4\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m} \omega_j^2\omega_k^2\right).$$

Враховуючи (3.21), (3.22) і останню рівність, функціонал $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ у явному вигляді запишеться так:

$$U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) = 2^n q \xi_2 \sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 + 2^n q^3 \xi_4 \left(\left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 \right)^2 + \right.$$

$$\left. 4 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \omega_j^2 \omega_k^2 \right) - \sum_{j=0}^{m} \omega_j s_{i_j}.$$

Дослідження функціоналу $U(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ на мінімум та знаходження параметрів q, ξ_2, ξ_4 проводиться аналогічно до того, як у [46].

2) існують такі чотири різні характери, добуток яких дорівнює головному характеру χ_0.

Позначимо через $H^4(X)$ індекси елементів таких підмножин множини $X \times X \times X \times X$, кожний елемент якої побудований із різних характерів X і добуток яких дорівнює головному характеру χ_0.

У даному випадку:

$$\sum_{\mathbf{g} \in G_n} \chi_{i_j}(\mathbf{g}) \chi_{i_k}(\mathbf{g}) \chi_{i_r}(\mathbf{g}) \chi_{i_t}(\mathbf{g}) = \begin{cases} 2^n, & \text{якщо } j = k = r = t, \\ 2^n, & \text{якщо } j = k \text{ і } r = t, \\ 2^n, & \text{якщо } j = r \text{ і } k = t, \\ 2^n, & \text{якщо } j = t \text{ і } k = r, \\ 2^n, & (i_j, i_k, i_r, i_t) \in H^4(X), \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\sum_{\mathbf{g} \in G_n} \mathrm{w}^4(\mathbf{g}) = 2^n \left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^4 + 3 \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0;\, k \neq j}^{m} \omega_j^2 \omega_k^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{(i_j, i_k, i_r, i_t) \in H^4(X)} \omega_{i_j} \omega_{i_k} \omega_{i_r} \omega_{i_t} \right) = 2^n \left(\left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 4 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \omega_j^2 \omega_k^2 + \sum_{(i_j, i_k, i_r, i_t) \in H^4(X)} \omega_{i_j} \omega_{i_k} \omega_{i_r} \omega_{i_t} \right)$$

і

$$U(\mathbf{w},\mathbf{s}_f(X)) = 2^n q\xi_2 \sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 + 2^n q^3 \xi_4 \left(\left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^2 \right)^2 + \right.$$

$$\left. +4\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \omega_j^2 \omega_k^2 + \sum_{(i_j,i_k,i_r,i_t)\in H^4(X)} \omega_{i_j}\omega_{i_k}\omega_{i_r}\omega_{i_t} \right) - \sum_{j=0}^{m} \omega_j s_{i_j}.$$

Мінімізація функціоналу в цьому випадку ускладнюється за рахунок доданку $\sum\limits_{(i_j,i_k,i_r,i_t)\in H^4(X)} \omega_{i_j}\omega_{i_k}\omega_{i_r}\omega_{i_t}$. Якщо $U_{\min}\left(\mathbf{w},\mathbf{s}_f(X)\right) = U\left(\mathbf{w}^*,\mathbf{s}_f(X)\right)$, то, як в першому так і в другому випадку вектор $\mathbf{w}^* = (\omega_1^*,\ldots,\omega_m^*;\omega_0^*)$ задає вектор структури НЕ, що реалізує бульову функцію $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, якщо $U(\mathbf{w}^*,\mathbf{s}_f(X)) = 0$ і $\mathbf{w}^* \in \mathrm{W}_{m+1}$. У протилежному випадку питання про реалізованість бульової функції f одним НЕ відносно системи характерів X залишається відкритим.

Основним недоліком методу апроксимації є те, що для заданого числа аргументів n бульової функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ не можна вказати порядок апроксимації, який би гарантував знаходження вектора структури НЕ відносно системи X, що реалізує функцію $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, якщо вона є нейрофункцією.

3.2.2. Ітераційний метод синтезу НЕ. Припустимо, що бульова функція $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ $(f : G_n \to H_2)$ реалізується одним НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1},\chi_{i_2},\ldots,\chi_{i_m}\}$ групи G_n над $\mathbb{R}$. Якщо вектор структури НЕ позначити $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega_0)$, тоді

$$f(x_1(\mathbf{g}),\ldots,x_n(\mathbf{g})) = \mathrm{Rsign}(\omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0)$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0 \neq 0.$$

Розглянемо довільний $m+1$-вимірний дійсний вектор $\mathbf{v}_k = (v_1^{(k)},\ldots,v_m^{(k)},v_0^{(k)})$ такий, що $\forall \mathbf{g} \in G_n\ \mathbf{v}_k(\mathbf{g}) \neq 0$. Від вектора $\mathbf{v}_k$ треба перейти до вектора $\mathbf{v}_{k+1}$ так, щоб $\rho(\mathbf{v}_{k+1},\mathbf{w}) < \rho(\mathbf{v}_k,\mathbf{w})$, де $\rho(\mathbf{v},\mathbf{w})$ — відстань між векторами $\mathbf{v}$ і $\mathbf{w}$.

Назвемо вектором похибки величину

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \tag{3.23}$$

а вектором приросту —

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k.$$

Тоді

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathbf{z}_k. \tag{3.24}$$

Для збіжності процесу необхідно, щоб модуль $|\boldsymbol{\varepsilon}_k|$ вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ був більшим за $|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}|$, тобто величина $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = |\boldsymbol{\varepsilon}_k|^2 - {}$ $-|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}|^2$ має бути додатною. З рівностей (3.23), (3.24) та з умови $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) > 0$ безпосередньо випливає:

$$2(\mathbf{z}_k, (\mathbf{w} - \mathbf{v}_k)) - |\mathbf{z}_k|^2 > 0. \tag{3.25}$$

Якщо вектор приросту $\mathbf{z}_k = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k$ визначити так, щоб мала місце нерівність (3.25), то вектор

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{z}_k \tag{3.26}$$

задовольняє умову $\rho(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}) < \rho(\mathbf{v}_k, \mathbf{w})$.

Переходимо до визначення вектора $\mathbf{z}_k$. Функцію, що реалізується нейронним елементом із вектором структури $\mathbf{v}_k = {}$ $= \left(v_1^{(k)}, \ldots, v_m^{(k)}, v_0^{(k)}\right)$ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1},$ $\chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ позначимо через $h_k(x_1, \ldots, x_n)$, а її характеристичний вектор відносно X через $\mathbf{s}_{h_k}(X)$. Вектор приросту $\mathbf{z}_k$ задаємо так:

$$\mathbf{z}_k = \varkappa_k \left(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right), \tag{3.27}$$

де $\varkappa_k$ — деяка додатна величина. Значення $\varkappa_k$ треба визначити так, щоб справджувалася нерівність (3.25). Підставимо значення $\mathbf{z}_k$ з (3.27) у нерівність (3.25). Тоді

$$2\varkappa_k \left(\mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right) - \varkappa_k^2 \left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2 > 0. \tag{3.28}$$

Перший доданок в останній нерівності є невід'ємним і дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли $f = h_k$. Дійсно,

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)) = (\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) - (\mathbf{w}, \mathbf{s}_{h_k}(X)) +$$

$$+ (\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X)) - (\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X))$$

і на основі (3.10) можна стверджувати, що кожний доданок у правій частині рівності є додатним, якщо $f \neq h_k$ і дорівнює нулю, якщо $f = h_k$. Ліва частина (3.28) є квадратним тричленом відносно $\varkappa_k$ і, очевидно, квадратний тричлен приймає найбільше значення при

$$\varkappa_k^* = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X))}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2} \tag{3.29}$$

і це значення є додатним. Права частина останньої рівності містить невідомий вектор $\mathbf{w}$, а це означає, що співвідношення (3.29) не може бути застосованим для знаходження $\varkappa_k$. Виберемо за $\varkappa_k$ значення

$$\varkappa_k^0 = \frac{(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X))}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2} \tag{3.30}$$

і покажемо, що при $\varkappa_k = \varkappa_k^0$ нерівність (3.28) має місце. Якщо в (3.28) замість $\varkappa_k$ підставити $\varkappa_k^0$, то після перетворень одержуємо:

$$\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = \frac{(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X))^2}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2} +$$

$$+ \frac{2\,(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X))\,(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X))}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2}.$$

Згідно з нерівністю (3.10) і умовою $\forall \mathbf{g} \in G_n\ \mathbf{v}_k(\mathbf{g}) \neq 0$ обидва доданки у чисельнику є додатними, якщо $f \neq h_k$, і дорівнюють нулю, якщо $f = h_k$. В останньому випадку вектор $\mathbf{v}_k$ реалізує функцію f і процес синтезу НЕ завершено.

Отже, вектор

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \varkappa_k^0\,(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X))$$

задовольняє нерівність $\rho(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}) < \rho(\mathbf{v}_k, \mathbf{w})$, якщо $f \neq h_k$. Аналогічно до того, як у [46] на основі нерівності $\rho(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}) < < \rho(\mathbf{v}_k, \mathbf{w})$ можна показати, що для нейрофункції f послідовність векторів $\{\mathbf{v}_k\}$ збігається до вектора структури $\mathbf{w}$ функції f.

На кожному кроці ітерації вектор $\mathbf{v}_k$ має задовольняти умову

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathbf{v}_k(\mathbf{g}) \neq 0. \tag{3.31}$$

Якщо в процесі ітерації за $\varkappa_k$ постійно будемо вибирати $\varkappa^0$, то може настати такий момент, коли не справджується умова (3.31). Щоб уникнути такої ситуації, для скалярної величини $\varkappa_k$ вказуємо таку область, в якій $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) > 0$ і для $\varkappa_k$ завжди можна підібрати таке значення, при якому має місце (3.31). Нехай $\varkappa_k = 2\varkappa_k^0$. Підставимо це значення в (3.28). Тоді

$$\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = \frac{4\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X)\right)\left(\mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right)}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2} -$$

$$- \frac{4\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X)\right)^2}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2} =$$

$$= \frac{4\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X)\right)\left(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right)}{\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2}.$$

З останньої рівності на основі (3.10) і (3.31) безпосередньо випливає, що коли $f \neq h_k$, то $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) > 0$ і $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = 0$, тільки в тому випадку, коли $f = h_k$. Отже, $\Delta(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = 2\varkappa_k\left(\mathbf{w} - \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right) - \varkappa_k^2\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2$ приймає додатне значення при будь-якому значенні $\varkappa_k$ з проміжку $[\varkappa_k^0, 2\varkappa_k^0]$ і цей проміжок задає шукану область для $\varkappa_k$.

Покажемо, що коли $\varkappa_k \in (\varkappa_k^0, 2\varkappa_k^0]$, то $\mathbf{s}_{h_{k+1}}(X) \neq \mathbf{s}_{h_k}(X)$. Припустимо протилежне, тобто $\mathbf{s}_{h_{k+1}}(X) = \mathbf{s}_{h_k}(X)$. Тоді на основі нерівності (3.10) із умови $\mathbf{s}_{h_k}(X) \neq \mathbf{s}_f(X)$ маємо:

$$\left(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X)\right) > 0. \tag{3.32}$$

Якщо в нерівності (3.32) $\mathbf{v}_{k+1}$ замінити на вираз $\mathbf{v}_k + \varkappa_k\left(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right)$, то отримаємо:

$$\left(\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_{h_k}(X) - \mathbf{s}_f(X)\right) - \varkappa_k\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2 > 0. \tag{3.33}$$

Нерівність (3.33) з урахуванням (3.30) при $\varkappa_k = \varkappa^0 + \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon \leq \varkappa_k^0\right)$ можна переписати так:

$$-\varepsilon\left|\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X)\right|^2 > 0.$$

З останньої нерівності безпосередньо випливає, що $\mathbf{s}_{h_{k+1}}(X) \neq \mathbf{s}_{h_k}(X)$, якщо $\varkappa \in \left(\varkappa_k^0, 2\varkappa_k^0\right]$. Однак, це не означає, що не існує таких різних натуральних чисел r і k, для яких має місце рівність

$$\mathbf{s}_{h_r}(X) = \mathbf{s}_{h_k}(X). \tag{3.34}$$

Якщо справджується рівність (3.34), то кажуть, що в області характеристичних векторів бульових функцій h_j відносно системи характерів X утворився граничний цикл.

Нехай k — найменше таке натуральне число, що $k > r$, і справджується рівність (3.34). Розглянемо систему векторів $\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_r}, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_{r+1}}(X), \ldots, \mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_{k-1}}(X)$ та їх лінійну комбінацію

$$\sum_{i=0}^{k-r-1} \lambda_i \left(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_{r+i}}(X)\right), \tag{3.35}$$

з невід'ємними коефіцієнтами $\lambda_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, k-r-1)$. Якщо серед коефіцієнтів λ_i хоча б один не дорівнює нулю і лінійна комбінація (3.35) дорівнює нулю, то функція f не реалізується одним НЕ відносно системи характерів X. Дійсно, якщо припускати протилежне, то функція f реалізується одним НЕ відносно системи X з вектором структури $\mathbf{w}$ і справджується рівність:

$$\sum_{i=0}^{k-r-1} \lambda_i \left(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_{r+i}}(X)\right) = 0, \tag{3.36}$$

хоча би при одному ненульовому значенні λ_i. Тоді, помноживши ліву і праву частини (3.36) скалярно на $\mathbf{w}$, отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{k-r-1} \lambda_i \left((\mathbf{s}_f(X), \mathbf{w}) - \left(\mathbf{s}_{h_{r+i}}(X), \mathbf{w}\right)\right) = 0,$$

що суперечить нерівності (3.10).

Отже, якщо в області характеристичних векторів функцій h_j відносно системи характерів X утворився граничний цикл і має місце (3.36) хоча би при одному значенні λ_i $(\lambda_i > 0)$, то робимо висновок, що функція f не реалізується одним НЕ відносно системи характерів X.

Алгоритм синтезу НЕ відносно системи характерів X методом ітерації

Крок 1. Знаходимо характеристичний вектор $\mathbf{s}_f(X)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, що задана в алфавіті $\{-1, 1\}$ відносно системи характерів X, здійснюємо присвоєння: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{s}_f(X)$, $k = 1$ і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Якщо $\forall \mathbf{g} \in G_n\ \mathbf{v}_k(\mathbf{g}) \neq 0$, то визначимо функцію

$$h_k(\mathbf{g}) = \operatorname{Rsign} \mathbf{v}_k(\mathbf{g})$$

і переходимо до кроку 3, а в протилежному випадку до кроку 6.

Крок 3. Якщо $f(\mathbf{g}) = h_k(\mathbf{g})$ для всіх $\mathbf{g} \in G_n$, то функція f реалізується на НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = \mathbf{v}_k$ і процес синтезу НЕ завершено, у протилежному випадку переходимо до кроку 4.

Крок 4. Знаходимо характеристичний вектор $\mathbf{s}_{h_k}$ функції h_k відносно системи X і перевіряємо умову: існує число $r < k$, таке, що $\mathbf{s}_{h_r} = \mathbf{s}_{h_k}$. Якщо умова справджується, то переходимо до кроку 7, а в протилежному випадку до кроку 5.

Крок 5. Знаходимо вектор $\mathbf{v}_{k+1}$ за формулою: $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \varkappa_k (\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_k}(X))$, де $\varkappa_k \in \left(\varkappa_k^0, 2\varkappa_k^0\right]$. Здійснюємо присвоєння $k = k + 1$ і переходимо до кроку 2.

Крок 6. Якщо $k = 1$, то довільним чином змінюємо координати вектора $\mathbf{v}_k$ так, щоб

$$\forall \mathbf{g} \in G_n\ \mathbf{v}_k(\mathbf{g}) \neq 0 \tag{3.37}$$

і переходимо до кроку 2.

Якщо $k \neq 1$, то виберемо таке $\varkappa_k \in \left(\varkappa_k^0, 2\varkappa_k^0\right]$, для якого виконується нерівність (3.37) і переходимо до кроку 5.

Крок 7. В області характеристичних векторів бульових функцій $h_1, h_2, \ldots, h_k$ відносно системи X утворився граничний цикл, а саме: $\mathbf{s}_{h_r}(X) = \mathbf{s}_{h_k}(X)$ $(r < k)$. Якщо можна вибрати такі $\lambda_i \geq 0$, де не всі λ_i дорівнюють нулю, для яких має місце рівність $\sum\limits_{i=0}^{k-r-1} \lambda_i \left(\mathbf{s}_f(X) - \mathbf{s}_{h_{r+i}}(X)\right) = 0$, то функція f не може бути реалізована одним НЕ відносно системи X. У протилежному випадку переходимо до кроку 5.

3.2.3. Метод матриць толерантності для синтезу НЕ. Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бульова функція в алфавіті $\{-1, 1\}$, тобто

$f : G_n \to H_2$. Розглянемо задачу: чи реалізується функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ одним НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$, і якщо так, то як знайти вектор структури НЕ? За допомогою перетворення $\mathbf{x}' = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + 1)$ реалізуємо відображення $\{-1, 1\} \to \{0, 1\}$ і розглянемо систему $X' = \left\{\chi'_{i_1} = \frac{1}{2}(\chi_{i_1} + 1), \chi'_{i_2} = \frac{1}{2}(\chi_{i_2} + 1), \ldots, \chi'_{i_m} = \frac{1}{2}(\chi_{i_m} + 1)\right\}$.

Нехай $f^{-1}(-1) = \{\mathbf{g} \in G_n | f(\mathbf{g}) = -1\}$ і $f^{-1}(1) = \{\mathbf{g} \in G_n | f(\mathbf{g}) = 1\}$. За допомогою системи X' визначимо:

$$f_X^{-1}(-1) = \bigcup_{\mathbf{g} \in f^{-1}(-1)} \left\{\left(\chi'_{i_1}(\mathbf{g}), \ldots, \chi'_{i_m}(\mathbf{g})\right)\right\},$$

$$f_X^{-1}(1) = \bigcup_{\mathbf{g} \in f^{-1}(1)} \left\{\left(\chi'_{i_1}(\mathbf{g}), \ldots, \chi'_{i_m}(\mathbf{g})\right)\right\}.$$

Ядро бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ відносно системи характерів X групи G_n визначається так:

$$K(f_X) = \begin{cases} f_X^{-1}(1), & \text{якщо } \left|f_X^{-1}(1)\right| \leq \left|f_X^{-1}(-1)\right|, \\ f_X^{-1}(-1), & \text{якщо } \left|f_X^{-1}(1)\right| > \left|f_X^{(-1)}(-1)\right|, \end{cases}$$

де $\left|f_X^{-1}(i)\right|$ — кількість елементів множини $f_X^{-1}(i)$ $(i \in \{-1, 1\})$, якщо $f_X^{-1}(1) \cap f_X^{-1}(-1) = \varnothing$. Якщо $f_X^{-1}(1) \cap f_X^{-1}(-1) \neq \varnothing$, то ядро $K(f_X)$ не існує і це означає, що функція f не реалізується одним НЕ відносно системи X.

Нехай $K(f_X) = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ — ядро бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$. Кожному $\mathbf{a}_i = \left(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}\right) \in K(f_X)$ ставимо у відповідність елемент $\mathbf{g}_i = \left((-1)^{\alpha_1^{(i)}}, \ldots, (-1)^{\alpha_1^{(i)}}\right)$ і побудуємо множину

$$T(f_X) = \{K(f_X)_i = \mathbf{g}_i K(f_X) | i = 1, 2, \ldots, q\},$$

яку назвемо множиною зведених ядер бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ відносно системи X. Легко бачити, що всі результати, які отримані в підрозділі 1.5 відносно $K(f)$ і $T(f)$, можуть бути узагальнені на $K(f_X)$, $T(f_X)$, і має місце цілочисловий алгоритм синтезу НЕ з відповідними модифікаціями.

Наведемо деякі теореми з 1.5 відносно $K(f_X)$ та $T(f_X)$.

Теорема 3.4. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ $(f : G_n \to H_2)$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів*

$X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$ *тоді і тільки тоді, коли її ядро* $K(f_X)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_m.

Теорема 3.5. *Бульова функція* $f(x_1, \dots, x_n)$ $(f : G_n \to H_2)$ *реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів* $X = \{\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_m}\}$ *тоді і тільки тоді, коли хоча б одне її зведене ядро* $K(f_X) \in T(f_X)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_m^-.

Теорема 3.6. *Якщо в множині зведених ядер* $T(f_X)$ *бульової функції* $f(x_1, \dots, x_n)$ $(f : G_n \to H_2)$ *знайдеться таке ядро* $K(f_X)_i$ *і такі елементи* $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ $(q = |K(f_X)|)$, *що* $K_\xi^\sigma(f_X)_i = p(K(f_X)_i)$, *тоді* $f(x_1, \dots, x_n)$ *реалізується одним НЕ відносно системи характерів* X.

3.3 Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}_2^n$ — n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$ і $f(x_1, \dots, x_n)$ — бульова функція від n змінних, тобто $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$. Двопороговим нейронним елементом з міткою α (ДНЕ$_\alpha$; $\alpha \in \{0, 1\}$) називається такий логічний пристрій з n входами, стан якого описується вектором $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і виходом $f(\mathbf{x})$, який приймає значення 0 або 1:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T > p_1 \text{ або } \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_2, \\ \overline{\alpha}, & \text{якщо } p_2 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_1, \end{cases} \tag{3.38}$$

де $\overline{\alpha}$ — інвертоване значення α, $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — дійсний n-вимірний вектор, який називається ваговим; p_1, p_2 $(p_1 > p_2)$ — дійсні числа (пороги), $[\mathbf{w}; p_1; p_2]$ — вектор структури двопорогового нейронного елемента з міткою α.

Бульова функція $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом з міткою α, якщо існує такий n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ і такі дійсні числа p_1, p_2, що виконується умова (3.38).

Приклад. Бульова функція $f_1(x_1, x_2) = \overline{x_1}\ \overline{x_2} \vee x_1 x_2$ реалізується на двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_1$ з вектором структури $[\mathbf{w} = (-1, -1); -0{,}5; -1{,}5]$, а $f_2(x_1, x_2) = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$ — на двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_0$ з тим самим вектором структури. Потрібно зауважити, що ні функція $f_1(x_1, x_2)$, ні функція $f_2(x_1, x_2)$ не реалізуються на одному НЕ з пороговою функцією активації.

Якщо бульова функція $f\,(x_1,\dots,x_n)$ реалізується на одному двопороговому нейронному елементі з міткою 0 або 1, то будемо говорити, що вона реалізується одним двопороговим нейронним елементом.

Нехай Ω_n — множина всіх n-вимірних дійсних векторів $\mathbf{w}$, таких, що для будь-яких різних $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}_2^n$ числа $\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{w}^T$ і $\mathbf{x}_2\cdot$ $\cdot\mathbf{w}^T$ різні. Легко бачити, що коли бульова функція $f\,(x_1,\dots,x_n)$ реалізується одним ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w};p_1;p_2]$, де $\mathbf{w}\notin\Omega_n$, то існує ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}';p_1;p_2]$, який реалізує цю ж саму функцію і $\mathbf{w}'\in\Omega_n$. Далі будемо розглядати тільки такі ДНЕ$_\alpha$ ($\alpha\in\{0,1\}$), для яких ваговий вектор $\mathbf{w}\in\Omega_n$.

Нехай $\mathbf{w}$ — фіксований вектор з Ω_n. Позначимо через $Q_\alpha(\mathbf{w})$ клас бульових функцій, що реалізуються одним ДНЕ$_\alpha$ з ваговим вектором $\mathbf{w}$, а через $\rho(\mathbf{w})$ — таку упорядковану множину бульових векторів $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_{2^n})$, що $\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{w}^T > \mathbf{x}_{i+1}\cdot\mathbf{w}^T$.

Аналогічно до того, як у розділі 1.5, вектори $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in\Omega_n$ називаються еквівалентними, якщо $\rho(\mathbf{w}_1)=\rho(\mathbf{w}_2)$.

Теорема 3.7. *Якщо вектори $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in\Omega_n$ еквівалентні, тоді $Q_\alpha(\mathbf{w}_1) = Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.*

Доведення. Нехай $f\,(x_1,\dots,x_n) \in Q_\alpha(\mathbf{w}_1)$. Тоді існують такі числа p_1 і p_2, що $\mathbf{x}\in f^{-1}(\overline{\alpha}) \iff p_2 < \mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1^T <$ $< p_1$. З еквівалентності векторів $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ випливає: якщо $\max\left\{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1^T|\mathbf{x}\in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\} = \mathbf{x}_{max}\cdot\mathbf{w}_1^T$, тоді $\mathbf{x}_{max}\cdot\mathbf{w}_2^T =$ $= \max\left\{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_2^T|\mathbf{x}\in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\}$, якщо $\min\left\{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1^T|\mathbf{x}\in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\} =$ $= \mathbf{x}_{min}\cdot\mathbf{w}_1^T$, тоді $\mathbf{x}_{min}\cdot\mathbf{w}_2^T = \min\left\{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_2^T|\mathbf{x}\in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\}$. Отже, лінійні функції $\mathrm{w}_1(\mathbf{x})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_1^T,\ \mathrm{w}_2(\mathbf{x})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}_2^T$, приймають найбільше та найменше значення на множині $f^{-1}(\overline{\alpha})$ відповідно в точках $\mathbf{x}_{\max}$ і $\mathbf{x}_{\min}$. Тоді в силу того, що $\mathbf{w}_2\in\Omega_n$, завжди можна вказати таке додатне число ε, що ДНЕ$_\alpha$ із вектором структури $[\mathbf{w}_2,v_1,v_2]$, де $v_1=\mathbf{x}_{\max}\cdot\mathbf{w}_2^T+\varepsilon$ і $v_2=\mathbf{x}_{\min}\cdot\mathbf{w}_2^T-\varepsilon$, реалізує функцію f. Це означає, що $f\in Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$ і $Q_\alpha(\mathbf{w}_1)\subset Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.

Аналогічно можна показати, що $Q_\alpha(\mathbf{w}_2)\subset Q_\alpha(\mathbf{w}_1)$. Отже, $\rho(\mathbf{w}_1) = \rho(\mathbf{w}_2)\Longrightarrow Q_\alpha(\mathbf{w}_1)=Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.

Якщо через Ω_n^i $(i=1,2,\dots t)$ позначити класи еквівалентності Ω_n відношення ρ, тобто $\mathbf{w},\mathbf{v}\in\Omega_n^i \iff \rho(\mathbf{w})=\rho(\mathbf{v})$, тоді з теореми 3.7 безпосередньо випливає:

Теорема 3.8. *Якщо $\mathbf{w}^i$ — представник класу Ω_n^i, тоді множина всіх* *бульових функцій від n змінних, які реалізуються одним двопороговим нейронним елементом співпадає з* $\bigcup\limits_{\alpha\in\{0,1\}}\bigcup\limits_{i=1}^{t} Q_\alpha(\mathbf{w}^i)$.

Нехай $L = (a_{ij})$ — матриця толерантності з $M = \bigcup\limits_{N\in M_\tau} S(N)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1};\ j = 1, 2 \ldots, n)$. Введемо позначення: $L(r, q) = (a_{ij})\,(i = r, r+1, \ldots, q;\ \ j = 1, 2 \ldots, n)$, де $r \leq q$. Якщо $r > q$, то вважаємо, що матриця $L(r, q)$ не містить жодного рядка.

Визначимо операцію $\Box$ над матрицями $L_1, L_2 \in M$ і $L(r_1, q_1), L(r_2, q_2)$ $(L \in M)$ так:

$$L_1 \,\Box\, L_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, L(r_1, q_1) \,\Box\, L(r_2, q_2) = \begin{pmatrix} L(r_1, q_1) \\ L(r_2, q_2) \end{pmatrix},$$

якщо $r_1 \leq q_1, r_2 \leq q_2$ і $L(r_1, q_1) \,\Box\, L(r_2, q_2) = L(r_2, q_2)$, якщо $r_1 > q_1$, $L(r_1, q_1) \,\Box\, L(r_2, q_2) = L(r_1, q_1)$, якщо $r_2 > q_2$. Згідно з теоремою 3.8 і властивості матриці $Z_{\mathbf{w}}$ (розд. 1.1) можна стверджувати, що знаходження множини всіх бульових функцій від n змінних, що реалізуються одним двопороговим нейронним елементом, рівносильне задачі побудови множини матриць толерантності $E_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w}\in\Omega_n} L_{\mathbf{w}}$. Відображення $\Delta : \Omega_n^i \to L_{\mathbf{w}^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, де $\mathbf{w}^i$ — представник класу Ω_n^i, задає бієктивне відображення $\widetilde{\Omega}_n = \{\Omega_n^i \mid i = 1, 2, \ldots, t\}$ на E_n, тобто $\Delta(\Omega_n) = E_n$.

Нехай $\varphi_L^{(r_1,r_2)}(x_1, \ldots, x_n)_\alpha$ — бульова функція від n змінних, що приймає значення α $(\alpha \in \{0, 1\})$ на тих і тільки тих наборах, які відповідно є рядками матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$ $(\hat{L} = L \,\Box\, L^*)$, $L \in E_n$, $r_1 \leq r_2,\ r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$.

Визначимо множину бульових функцій $\pi^{(2)}(\varphi_\alpha)$ наступним чином:

$$\pi^{(2)}(\varphi_\alpha) = \bigcup_{L\in E_n} \bigcup_{r_1=1}^{2^n} \bigcup_{r_2=r_1}^{2^n} \varphi_L^{(r_1,r_2)}(x_1, \ldots, x_n)_\alpha.$$

Якщо через $\pi_n^{(2)}$ позначити множину всіх бульових функцій від n змінних, що реалізуються одним двопороговим нейронним елементом, тоді на основі $\Delta(\widetilde{\Omega}_n) = E_n$ і теореми 3.8 маємо:

$$\pi_n^{(2)} = \bigcup_{\alpha\in\{0,1\}} \pi^{(2)}(\varphi_\alpha). \tag{3.39}$$

Нехай $K(f)$ — ядро бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ і $q = |K(f)|$.

Теорема 3.9. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли існує такий елемент $\xi \in S_q$ і така матриця толерантності $L \in E_n$, що її ядро $K(f)$ задовольняє одну з умов:*

1) *існують такі числа $q_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}, q_2 \in \{1, 2, \ldots \ldots, 2^{n-1}+1\}$, що $K_\xi(f) = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1})$,*

2) *існують такі числа $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ $(r_1 \le r_2)$, що $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$.*

Доведення. Дано, що бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом із ваговим вектором $\mathbf{w} \in \Omega_n$. Якщо $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ $(\alpha \in \{0, 1\})$ і $L = L_{\mathbf{w}}$, тоді, згідно з (3.39), можливі наступні два випадки:

1) ядро $K(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ містить ті рядки матриці $\hat{L} = L \square L^*$, які не є рядками матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$, де $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ і $r_2 - r_1 \ge 2^{n-1}$;

2) ядро $K(f)$ бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ містить усі рядки матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$, де $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ і $r_2 - r_1 \le 2^{n-1} - 1$.

У першому випадку $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}})$ і, очевидно, існує такий елемент $\xi \in S_q$, що $K_\xi(f) = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1})$.

У другому випадку маємо: $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$ і необхідність доведено.

Дано, що $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ і $K_\xi(f) = L(1, q_1) \square L^*(q_2, 2^{n-1})$, де $L \in E_n, q_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}, q_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}+1\}$. Тоді $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}}) \subset \pi_n^{(2)}$. Якщо $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$, де $L \in E_n$, тоді $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_\alpha) \subset \pi_n^{(2)}$. Теорему доведено.

Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бульова функція і $K(f)$ — її ядро. Зведеним ядром бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається множина $K(f)_i = \mathbf{g}_i K(f)$, де $\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \ldots, \ldots, (-1)^{\gamma_{in}})$ і $(\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in}) \in K(f)$. Якщо $(\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in}) \in \mathbb{Z}_2^n \setminus \setminus K(f)$ і $\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \ldots, (-1)^{\gamma_{in}})$, то множина $K(f)'_i = = \mathbf{g}_i K(f)$ називається зовнішнім зведеним ядром бульової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$. Множину зведених ядер бульової функції позначимо через $T(f)$, а множину всіх зовнішніх зведених ядер через $T(f)'$.

Теорема 3.10. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли хоча б для одного зведеного ядра $K(f)_i \in T(f)$ або зовнішнього зведеного ядра $K(f)'_j \in T(f)'$ можна вказати такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ ($q = |K(f)|$), матрицю толерантності $L \in E_n^-$ і такі числа $q_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, $q_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}+1\}$, $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ ($r_1 \le r_2$), що має місце одна з умов:*

1) $K_\xi^\sigma(f)_i = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1})$;

2) $K_\xi^\sigma(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2)$.

Доведення. Якщо бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом і $K(f) = f^{(-1)}(\alpha)$ ($\alpha \in \{0, 1\}$), тоді відповідно до теореми 3.9 ядро $K(f)$ функції f допускає одне із зображень:

$$\text{якщо } f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}}), \text{ то } K_\xi(f) = H(1, q_1) \,\square\, H^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{3.40}$$

$$\text{якщо } f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_\alpha), \text{ то } K_\xi(f) = \hat{H}(r_1, r_2), \tag{3.41}$$

де $\xi \in S_q, H \in E_n$. З рівності $E'_n = E_n$ випливає, що $H = (\mathbf{g}L)^\sigma$, де $\mathbf{g} \in G_n, \sigma \in S_n$ і $L \in E_n^-$. Звідси $L = \mathbf{g}^{-1}H^{\sigma^{-1}}$ і, згідно з (3.40), (3.41), з урахуванням $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$ маємо:

$$\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{3.42}$$

або

$$\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = \hat{L}(r_1, r_2). \tag{3.43}$$

Якщо має місце (3.42) або (3.43) при $r_1 = 1$, тоді з того, що перший рядок будь-якої матриці толерантності з $L \in E_n^-$ складається з нулів, випливає, що: ядро містить такий набір $(\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in})$, що $\mathbf{g}^\sigma = \mathbf{g}_i$ ($\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \ldots, (-1)^{\gamma_{in}})$) і $\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (\mathbf{g}^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{g}_i K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i$. Отже, в даному випадку для функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, що реалізується одним двопороговим нейронним елементом, можна вказати таке зведене ядро $K(f)_i \in T(f)$, що

$$K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1}).$$

Якщо має місце рівність (3.43), тоді в силу нерівності $r_1 > 1$ і $L \in E_n^-$ маємо: $\mathbf{g}^\sigma = \mathbf{g}_j = ((-1)^{\gamma_{j1}}, \ldots, (-1)^{\gamma_{jn}})$, де $(\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jn}) \in \mathbb{Z}_2^n \setminus K(f)$, $\mathbf{g}K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (\mathbf{g}^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{g}_j K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)'_j \in T(f)'$. Отже, зовнішнє зведене ядро $K(f)'_j$ задовольняє умову $K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2)$.

Нехай тепер виконується одна з умов:

$$K_\xi^\sigma(f)_i = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{3.44}$$

$$K_\xi^\sigma(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2), \tag{3.45}$$

де $\sigma \in S_n,\ \xi \in S_q$ і $L \in E_n^-$.

Покажемо, що функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом. Нехай $L = L_\mathbf{w}$, де $\mathbf{w} \in \Omega_n^-$. Тоді $(L_\mathbf{w} \,\square\, L_\mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T$ і координати $c_1, c_2, \ldots, c_{2^n}$ вектора $\mathbf{c}_\mathbf{w}^T$ задовольняють умову $0 > c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$. Позначимо $\mathbf{w}_1 = \mathbf{g}_i \mathbf{w}^\sigma$ і нехай $\left(L_{\mathbf{w}_1} \,\square\, L_{\mathbf{w}_1}^*\right) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T$, де $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T = \left(c_1^{(1)}, \ldots, c_{2^n}^{(1)}\right)$ і $c_1^{(1)} > c_2^{(1)} > \ldots > c_{2^n}^{(1)}$.

Припустимо, що має місце рівність (3.44) і $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ $(\alpha \in \{0, 1\})$. Тоді q_1, q_2 задовольняють одну із нижченаведених умов і функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом з міткою α і відповідним вектором структури:

1) якщо $q_1 \neq 0$ і $q_2 \neq 2^{n-1} + 1$, тоді за вектор структури двопорогового нейронного елемента з міткою α, що реалізує функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$, можна вибрати вектор $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$, а $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+q_2}^{(1)}, c_{2^{n-1}+q_2-1}^{(1)}\right)$ за умови, що $q_1 \neq 2^{n-1}$ або $q_2 \neq 1$. Якщо $q_1 = 2^{n-1}$, тоді $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$ і $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, де ε — довільне додатне число. У випадку, коли $q_2 = 1$, маємо: $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+1}^{(1)}, c_{2^{n-1}}^{(1)}\right)$, де $\varepsilon > 0$.

2) якщо $q_1 = 0$ і $q_2 \neq 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$,
де $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+q_2}^{(1)}, c_{2^{n-1}+q_2-1}^{(1)}\right)$ і $\varepsilon > 0$.

3) якщо $q_1 \neq 0$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$,
де $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, $\varepsilon > 0$.

4) якщо $q_1 = 0$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$,
де $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, $\varepsilon > 0$.

Нехай має місце рівність (3.45) при умові, що $r_1 > 1$ і $K(f) = f^{(-1)}(\alpha)$. Тоді функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується на одному ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \in \left(c^{(1)}_{r_1}, c^{(1)}_{r_1-1}\right)$ і $p_2 \in \left(c^{(1)}_{r_2+1}, c^{(1)}_{r_2}\right)$. Якщо $r_1 = 1$, тоді маємо випадок (3.44) при умові, що $q_1 = r_2$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$. Отже, теорему доведено.

Розглянемо наступну задачу. Треба встановити реалізованість бульових функцій $f_1(x_1, x_2, x_3)$ і $f_2(x_1, x_2, x_3)$ на двопорогових нейронних елементах, якщо $f_1^{-1}(1) = \{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$ і $f_2^{-1}(1) = \{(0,1,1), (1,0,1)\}$. Побудуємо множину зведених ядер $T(f_1)$, $T(f_2)$:

$$T(f_1) = \left\{ K(f_1)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, K(f_1)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. K(f_1)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$T(f_2) = \left\{ K(f_2)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K(f_2)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Множина E_3^- складається з двох матриць, а саме:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для зведеного ядра $K(f_1)_1$ маємо: $K(f_1)_1 = L_1(1,2) \,\square\, \square\, L_1^*(4,4)$. Вектор $\mathbf{w} = (-1, -2, -4)$ задовольняє рівність $(L_1 \,\square\, L_1^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$. Тоді за ваговий вектор ДНЕ$_1$, що реалізує функцію $f_1(x_1, x_2, x_3)$, може бути вибраний вектор $\mathbf{w}_1 = ((-1)^0, (-1)^0, (-1)^1)\mathbf{w} = (-1, -2, 4)$. Вектору $\mathbf{w}_1$ відповідає матриця

$$L_{\mathbf{w}_1} = ((-1)^0, (-1)^0, (-1)^1)L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді пороги p_1 і p_2 відповідно беруться з інтервалів (c_3, c_2), (c_8, c_7), де $c_2 = (1,0,1)\cdot \mathbf{w}_1^T = 3$, $c_3 = 2$, $c_7 = -2$, $c_8 = -3$. Отже, ДНЕ$_1$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1; 2{,}5; -2{,}5]$ реалізує функцію $f_1(x_1, x_2, x_3)$.

Простою перевіркою легко переконатися в тому, що зведені ядра $T(f_2)$ не задовольняють умови теореми 3.10. Тоді для функції $f_2(x_1, x_2, x_3)$ побудуємо множину зовнішніх зведених ядер $T(f_2)'$:

$$T(f_2)' = \left\{ K(f_2)'_1 = ((-1)^0, (-1)^0, (-1)^0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \ldots, K(f_2)'_6 = ((-1)^1, (-1)^1, (-1)^1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для зовнішнього зведеного ядра $K(f_2)'_6$ маємо: $K(f_2)'_6 = \hat{L}_1(2,3)$. Тоді за ваговий вектор ДНЕ$_1$ можна вибрати вектор $\mathbf{w}_2 = (-1,-1,-1)\mathbf{w} = (1,2,4)$, а пороги p_1, p_2 вибираються з інтервалів $p_1 \in (c_2, c_1)$, $p_2 \in (c_3, c_4)$, де

$$L_{\mathbf{w}_2} = (-1,-1,-1)L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L_{\mathbf{w}_2} \square L^*_{\mathbf{w}_2}\right)\cdot \mathbf{w}_2^T = \mathbf{c}^T_{\mathbf{w}_2}$$

і $c_2 = 6$, $c_1 = 7$, $c_4 = 4$, $c_3 = 5$.

Отже, ДНЕ$_0$ із вектором структури $[\mathbf{w}_2; 6{,}5; 4{,}5]$ реалізує функцію $f_2(x_1, x_2, x_3)$.

Природно виникає питання: чи не можна звести задачу перевірки реалізованості бульових функцій від n змінних одним двопороговим НЕ до задачі перевірки реалізованості бульових функцій від $n-1$ змінної? Відповідь на поставлене питання міститься у наступній теоремі.

Теорема 3.11. *Бульова функція* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ *реалізується одним двопороговим нейронним елементом із вектором структури* $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n); p_1; p_2]$ *тоді і тільки тоді, коли бульові функції* $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ *відповідно реалізуються на двопорогових нейронних елементах з векторами структури* $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_{n-1}); p_{11}; p_{21}]$, $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10}; p_{20}]$, *пороги яких задовольняють умову* $p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$.

Доведення. Дано, що бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним ДНЕ$_\alpha$ ($\alpha \in \{0, 1\}$). Це означає, що існує такий $n+2$-вимірний вектор $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n); p_1; p_2]$, що

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_1. \tag{3.46}$$

На бульових наборах $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in \mathbb{Z}_2^n$ співвідношення (3.46) запишеться так:

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 < \omega_1 x_1 + \ldots \omega_{n-1} x_{n-1} + \omega_n < p_1,$$

або

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 - \omega_n < \omega_1 x_1 + \ldots$$
$$\ldots + \omega_{n-1} x_{n-1} < p_1 - \omega_n.$$

На основі останнього співвідношення можна стверджувати, що бульова функція $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ реалізується на ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{11} = p_1 - \omega_n; p_{21} = p_2 - \omega_n]$. На бульових наборах $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \in \mathbb{Z}_2^n$ співвідношення (3.46) має такий вигляд:

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Longleftrightarrow p_2 < \omega_1 x_1 + \ldots \omega_{n-1} x_{n-1} < p_1.$$

Отже, ДНЕ$_\alpha$ із вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10} = = p_1; p_{20} = p_2]$ реалізує функцію $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}, 0)$. Пороги $p_{11}, p_{21}, p_{10}, p_{20}$ двопорогових нейронних елементів, що реалізують відповідно функції $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$, очевидно, задовольняють умову $\omega_n = p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$. Отже, необхідність доведено.

Переходимо до доведення достатності. Дано, що функції $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ реалізуються одним ДНЕ$_\alpha$ з відповідними векторами структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{11}; p_{21}]$, $[\mathbf{w}_1 = = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10}; p_{20}]$, де $p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$. Якщо покласти, що $\omega_n = p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$, тоді ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n); p_1 = p_{10}; p_2 = p_{20}]$ реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \vee \overline{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Отже, теорему доведено.

Із рівності $E'_n = E_n$ і теореми 3.10 безпосередньо випливає:

Теорема 3.12. *Якщо бульова функція* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *реалізується одним двопороговим нейронним елементом, тоді кожна з наступних функцій:*

1) $f_1(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, \overline{x_i} \ldots, x_n)$,
2) $f_2(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$,
3) $f_3(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_j \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j \ldots, x_i \ldots, x_n)$,

також реалізується одним двопороговим нейронним елементом.

РОЗДІЛ 4
ДИСКРЕТНІ НЕЙРОФУНКЦІЇ ТА СИНТЕЗ БАГАТОЗНАЧНИХ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НАД ПОЛЕМ ГАЛУА

У даному розділі вводяться поняття дискретної нейрофункції та нейроелемента (НЕ) над полем Галуа. Встановлено критерій реалізованості дискретних функцій одним НЕ та розроблено метод синтезу НЕ з вектором структури над полем Галуа. Описані інваріантні операції для дискретних нейрофункцій. Розроблено спектральний метод синтезу двокаскадної комбінаційної схеми з багатозначних нейроелементів.

4.1. Спектральний аналіз дискретних функцій над полем Галуа

Нехай $F = GF\,(p^m)$ — поле Галуа, що містить циклічні групи

$$H_{k_1} = \langle a_1 | a_1^{k_1} = 1 \rangle,\ H_{k_2} = \langle a_2 | a_2^{k_2} = 1 \rangle, \ldots, H_{k_n} = \langle a_n | a_n^{k_n} = 1 \rangle$$

і $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ — прямий добуток циклічних груп H_{k_i}.

Під дискретною функцією від n змінних над полем F будемо розуміти однозначне відображення вигляду $f : G_n \to F$.

Відмітимо, що спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to C$ над полем C завжди є можливим, оскільки поле C містить первісний корінь k-го степеня з 1 при будь-якому $k = \text{НСК}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — найменше спільне кратне чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Якщо за поле F вибрати поле Галуа $F = GF\,(p^m)$, то спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to F$ не завжди є можливим. Спектральний аналіз дискретних функцій над $F = GF\,(p^m)$ буде можливим тільки тоді, коли розмірність векторного простору $V_F^n = \{f | f : G_n \to GF\,(p^m)\}$ і порядок групи характерів $X(G_n)$ над полем F співпадають.

Розглянемо задачу: чи можна розкласти функцію $f : G_n \to F$ за характерами групи G_n над полем F? Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ і за поле F вибрати поле дійсних чисел R, то група характерів $X\,(G_n)$ групи G_n над полем R співпадає з системою базисних функцій Уолша-Адамара і спектральний аналіз дискретних функцій можливий.

Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k\ \ (k > 2)$, і за поле F вибрати поле комплексних чисел C, то група характерів $X\,(G_n)$ над полем C співпадає з системою базисних функцій Віленкіна-Крестенсона і спектральний аналіз дискретних функцій також можливий.

Нехай $k = \text{НСК}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Покажемо, що коли поле $F = GF(p^m)$ містить первісний корінь k-го степеня з 1, то k націло ділить $u = p^m - 1$. Припустимо, що поле з примітивним елементом ε містить первісний корінь σ k-го степеня з 1. Тоді циклічна група $H_k = \left\langle \sigma | \sigma^k = 1 \right\rangle$ є підгрупою циклічної групи поля F і за теоремою Лагранжа [51] отримуємо, що k є дільником числа u. Нехай k націло ділить u. Розглянемо елемент $\sigma = \varepsilon^{u/k}$. Покажемо, що він буде первісним коренем з 1. Враховуючи властивості примітивного елемента ε поля F, можна стверджувати, що для будь-яких $i, j, r \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\sigma^i \neq \sigma^j$, якщо $i \neq j$ і $\sigma^r \neq 1$. Отже, k — найменше таке натуральне число, що $\sigma^k = 1$. Звідси робимо висновок, що спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to F$ є можливим тоді і тільки тоді, коли k націло ділить u.

Знайдемо аналітичний вигляд характерів групи G_n над полем $F = GF\,(p^m)$. Нехай $k = HCK\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, ε — примітивний елемент поля $F = GF\,(p^m)$, $H_k = \left\langle a | a^k = 1 \right\rangle$ — циклічна група порядку k і k є дільником числа u. Тоді для довільного елемента $h_i \in H_{k_i}$ існує таке число $j_{k_i} \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, що $h_i = a_i^{j_{k_i}}$, де $a_i = a^{\frac{k}{k_i}}$ — твірний елемент циклічної групи H_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Характери χ_{r_i} групи H_{k_i} над полем $F = GF\,(p^m)$ можуть бути записані так:

$$\chi_{r_i}\,(h_i) = \sigma_i^{r_i j_{k_i}}, \tag{4.1}$$

де $\sigma_i = \varepsilon^{\frac{u}{k_i}}$, $r_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$.

Із того, що група G_n є прямим добутком циклічних груп $H_{k_1}, \ldots, H_{k_n}$, випливає: для довільного $\mathbf{g} \in G_n$ існують такі числа $j_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, що $\mathbf{g} = \left(a_1^{j_1}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, a_n^{j_n}\right) = \left(a^{k j_1 / k_1}, \ldots, a^{k j_n / k_n}\right)$.

Із мультиплікативності характерів [50,52] і з (4.1) маємо, що всі характери групи вичерпуються функціями

$$\chi_{(r_1, \ldots, r_n)}\,(\mathbf{g}) = \sigma^{t_1 r_1 j_1 + \ldots + t_n r_n j_n}, \tag{4.2}$$

де $\sigma = \varepsilon^{\frac{u}{k}}$, $t_i = \frac{k}{k_i}$, $r_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо на множині всіх характерів групи G_n визначити добуток двох характерів $\chi_{(r_1, \ldots, r_n)}$, $\chi_{(q_1, \ldots, q_n)}$ наступним чином:

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \chi_{(r_1, \ldots, r_n)}\,(\mathbf{g}) \cdot \chi_{(q_1, \ldots, q_n)}\,(\mathbf{g}) = \chi_{(r_1 \oplus_1 q_1, \ldots, r_n \oplus_n q_n)}\,(\mathbf{g})\,,$$

де $\oplus_i$ — додавання за модулем k_i, то вони утворюють мультиплікативну групу характерів $X(G_n)$. На основі (4.2) можна стверджувати, що кількість різних характерів групи G_n над полем F дорівнює порядку групи G_n. Тоді з того, що характери ортогональні [50,52] і $|X(G_n)| = \dim_F V_F^n = k_1 k_2 \dots k_n$, маємо: $X(G_n)$ утворює ортогональний базис простору V_F^n. Отже, довільний елемент $f \in V_F^n$ однозначно запишеться так:

$$f(\mathbf{g}) = \sum_{r_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots r_n)} \chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g}), \tag{4.3}$$

де додавання та множення здійснюються у полі F.

Розклад (4.3) називається спектральним розкладом дискретної функції $f : G_n \to F$ за характерами групи G_n над полем F.

Помножимо обидві частини рівності (4.3) на $\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}$ і просумуємо за всіма елементами G_n. Отримаємо:

$$\sum_{\mathbf{g} \in G_n} f(\mathbf{g}) \chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}) =$$
$$= \sum_{\mathbf{g} \in G_n} \left(\sum_{r_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)} \chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g}) \right) \chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}).$$

З урахуванням властивості ортогональності характерів, праву частину останньої рівності можна записати так:

$$\sum_{\mathbf{g} \in G_n} \left(\sum_{r_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)} \chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g}) \right) \chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}) =$$
$$= \sum_{r_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)} \left(\sum_{\mathbf{g} \in G_n} \chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g}) \chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}) \right) =$$
$$= s_{(q_1,\dots,q_n)} |G_n|.$$

Отже, спектральні коефіцієнти функції знаходяться за формулою:

$$s_{(q_1,\dots,q_n)} = |G_n|^{-1} \sum_{\mathbf{g} \in G_n} f(\mathbf{g}) \chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}), \tag{4.4}$$

де $q_i \in \{0, 1, \dots, k_i - 1\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Вищенаведені результати зі спектрального аналізу функцій за характерами групи проілюструємо на наступних прикладах.

Приклад 4.1. Нехай $n = 2$, $k = k_1 = k_2 = 2$ і $F = GF\left(3^2\right)$ — поле Галуа з модульним многочленом $x^2 \oplus x \oplus 2$. Спектральний аналіз функцій $f \in V_F^2 = \{f \mid f : G_2 \to F\}$ $(G_2 = H_2 \otimes H_2)$ можливий, оскільки k ділить число $u = 3^2 - 1$. Позначимо через ε твірний елемент циклічної групи поля $GF\left(3^2\right)$, тобто $GF\left(3^2\right) \setminus \{0\} = \left\{\varepsilon^j \,|\, j = 0, 1, \ldots, 7\right\}$. Тоді $\sigma = \varepsilon^4 = 2$. Характери групи G_2 знаходимо за формулою (4.2):

Таблиця 4.1

G_2	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$
$(1,1)$	1	1	1	1
$(1,a)$	1	σ	1	σ
$(a,1)$	1	1	σ	σ
(a,a)	1	σ	σ	1

Нехай $f(1,1) = f(1,a) = f(a,1) = \sigma$ і $f(a,a) = 0$. За формулою (4.4) знаходимо спектральні коефіцієнти $s_{(0,0)}$, $s_{(0,1)}, s_{(1,0)}, s_{(1,1)}$ функції f:

$$\begin{aligned}
s_{(0,0)} &= |G_2|^{-1}(\sigma \cdot 1 + \sigma \cdot 1 + \sigma \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 1 \cdot 0 = 0,\\
s_{(0,1)} &= |G_2|^{-1}(\sigma \cdot 1 + \sigma \cdot \sigma + \sigma \cdot 1 + 0 \cdot \sigma) = 1 \cdot (2\sigma + 1) = 2,\\
s_{(1,0)} &= |G_2|^{-1}(\sigma \cdot 1 + \sigma \cdot 1 + \sigma \cdot \sigma + 0 \cdot \sigma) = 1 \cdot (2\sigma + 1) = 2,\\
s_{(1,1)} &= |G_2|^{-1}(\sigma \cdot 1 + \sigma \cdot \sigma + \sigma \cdot \sigma + 0 \cdot \sigma) = 1 \cdot (\sigma + 2) = 1.
\end{aligned}$$

Отже, $\forall \mathbf{g}\ G_2\ \ f(\mathbf{g}) = 2\chi_{(0,1)}(\mathbf{g}) + 2\chi_{(1,0)}(\mathbf{g}) + \chi_{(1,1)}(\mathbf{g})$.

Приклад 4.2. Нехай $n = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Тоді $k = 6$ і за поле F можна вибрати поле $GF(13)$, оскільки k ділить $u = 13 - 1$. За твірний елемент циклічної групи поля $GF(13)$ можна вибрати $\varepsilon = 2$, тобто $GF(13) \setminus \{0\} = \left\{2^j \,|\, j = 0, 1, \ldots, 11\right\}$. Тоді $\sigma = 2^{12/6} = 4$. Побудуємо таблицю характерів групи $G_2 = H_2 \otimes H_3$ над полем $GF(13)$:

Таблиця 4.2

G_2	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(0,2)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$	$\chi_{(1,2)}$
$(1,1)$	1	1	1	1	1	1
$(1,b)$	1	3	9	1	3	9
$(1,b^2)$	1	9	3	1	9	3
$(a,1)$	1	1	1	12	12	12
(a,b)	1	3	9	12	10	4
(a,b^2)	1	9	3	12	4	10

де $H_2 = \left\langle a | a^2 = 1 \right\rangle, \quad H_3 = \left\langle b | b^3 = 1 \right\rangle$.

Нехай $f(1,1) = f(1,b) = 6$, $f\left(1,b^2\right) = 0$, $f(a,1) = f(a,b) = f\left(a,b^2\right) = 2$. Використовуючи формулу (4.4), знаходимо спектральні коефіцієнти $s_{(0,0)}, s_{(0,1)}, s_{(0,2)}, s_{(1,0)}, \quad s_{(1,1)}, s_{(1,2)}$ функції f у системі базисних функцій $X(G_2)$: $s_f = (3,10,4,1,10,4)$.

Зауваження. Для знаходження спектральних коефіцієнтів $s_{(r_1,\dots r_n)}$ дискретних функцій $f \in V_F^n$ можна застосувати швидкі алгоритми, які базуються на відомій теоремі з теорії зображень груп [50], а саме: якщо $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ і $|G_n|$ є дільником числа $p^m - 1$, тоді $X(G_n) = X(H_{k_1}) \otimes X(H_{k_2}) \otimes \ldots \otimes X(H_{k_n})$ над полем $GF(p^m)$ і на теоремі факторизації матриць [49].

4.2. Реалізованість дискретних нейрофункцій одним НЕ над скінченним полем Галуа

Скінченні поля і групи широко застосовуються в теорії логічних функцій і автоматів [53-56]. Особливо важливу роль відіграють скінченні поля в теорії кодування [57]. У роботі [58] показано, що будь-який скінченний автомат має ізоморфне зображення у вигляді лінійного автомата над деяким скінченним полем. Аналіз і синтез лінійних автоматів над довільним скінченним полем здійснюється традиційним методом спектрального аналізу.

Основні методи спектрального аналізу можуть бути успішно використані і для перевірки реалізованості дискретних функцій одним нейронним елементом над скінченним полем Галуа.

У цьому параграфі визначимо поняття нейроелемента над полем $GF(p^m)$ відносно довільної системи характерів групи, на якій визначена дискретна функція, і наведемо ряд критеріїв реалізованості дискретних функцій на такому елементі.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n, q$ — натуральні числа ($k_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$, $q \geq 2$) і $k = \text{НСК}(k_1, k_2, \ldots, k_n, q)$. Далі будемо розглядати тільки такі поля $F = GF(p^m)$, які задовольняють умову: $p^m - 1$ націло ділиться на k. Це означає, що поле $F = GF(p^m)$ містить циклічні групи H_{k_i}, H_q із відповідними твірними елементами $\sigma_i = \varepsilon^{u/k_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sigma = \varepsilon^{u/q}$, де ε — примітивний елемент поля F, $u = \operatorname{card} F - 1$.

Визначимо на множині $F\setminus\{0\}$ функцію $\operatorname{Fsign}\xi$ наступним чином:

$$\forall\xi\in F\setminus\{0\}\quad \operatorname{Fsign}\xi=\sigma^j,\quad \text{якщо}\ \ \frac{ju}{q}\le\deg\xi<\frac{(j+1)\,u}{q},$$

де $\deg\xi$ — степінь елемента ξ $\left(\xi=\varepsilon^{\deg\xi}\right)$, $j\in\{0,1,\ldots,q-1\}$.

Нейронним елементом над полем $F=GF\left(p^m\right)$ називається логічний пристрій з $n+1$ входами $x_1,\ldots,x_n;x_0$ $(n\ge1)$, які відповідно приймають значення з множин H_{k_i} $(i=1,\ldots,n)$ та $H_0=\{1\}$, і одним виходом, що приймає значення з множини H_q. Кожному входу ставиться у відповідність певний елемент ω_i поля F і значення вихідного сигналу знаходиться так: значення вхідних сигналів множаться на відповідні елементи ω_i, після цього отримані величини додаються і на виході маємо значення $\operatorname{Fsign}\xi$ від отриманої суми.

Схематично НЕ над полем Галуа зображено на рис. 4.1.

Вектор $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ називається вектором структури нейронного елемента над полем Галуа $(\omega_i\in GF\left(p^m\right))$.

Нехай $G_n=H_{k_1}\otimes H_{k_2}\otimes\ldots\otimes H_{k_n}$ — прямий добуток циклічних груп H_{k_i}. Дискретна функція $f:G_n\to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F=GF\left(p^m\right)$, якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_m;\omega_0)$, що для всіх $\mathbf{g}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in G_n$ $\ f\left(\mathbf{g}\right)=\operatorname{Fsign}\mathrm{w}\left(\mathbf{g}\right)$, де $\mathrm{w}\left(\mathbf{g}\right)=\omega_1\gamma_1+\ldots+\omega_n\gamma_n+\omega_0$, і додавання та множення виконуються у полі F. Дискретна функція $f:G_n\to H_q$, що реалізується одним НЕ над полем F, називається нейрофункцією над F.

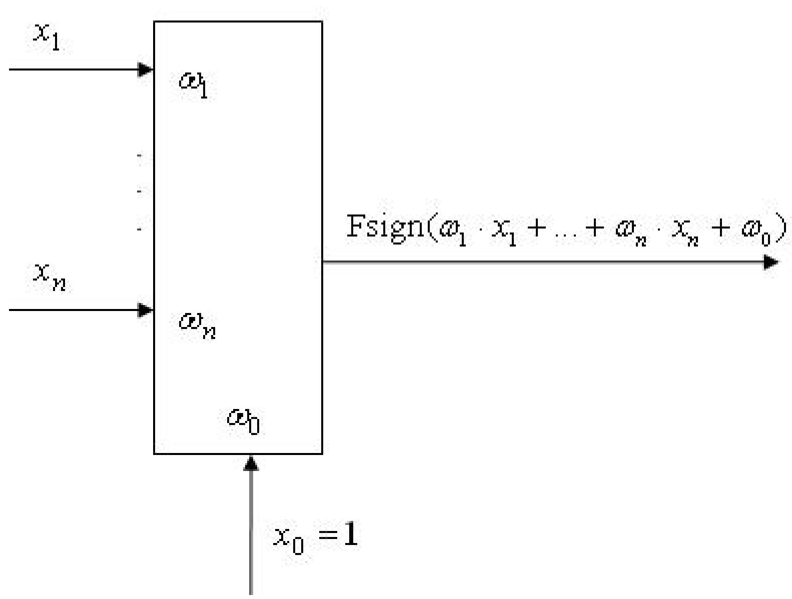

Рис. 4.1. Схема НЕ над полем Галуа

Теорема 4.1. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF(p^m)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$*, що*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad r(\mathbf{g}) f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g}) \tag{4.5}$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad 0 \leq \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}. \tag{4.6}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція f реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ над полем F, тобто

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad f(\mathbf{g}) = \mathrm{Fsign}\, \mathrm{w}(\mathbf{g}). \tag{4.7}$$

Побудуємо функцію $r(\mathbf{g})$ наступним чином: для всіх $\mathbf{g} \in G_n$ покладемо

$$\deg r(\mathbf{g}) = \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg f(\mathbf{g}). \tag{4.8}$$

Тоді $\deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) = \deg r(\mathbf{g}) + \deg f(\mathbf{g})$. Тому для довільного $\mathbf{g} \in G_n$ $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = r(\mathbf{g}) \cdot f(\mathbf{g})$. Припустимо, що на довільному фіксованому $\mathbf{g} \in G_n$ функція f приймає значення σ^j. Тоді з рівності (4.7) та з означення функції $\mathrm{Fsign}\, x$ випливає, що

$$\frac{ju}{q} \leq \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) < \frac{(j+1)u}{q}. \tag{4.9}$$

Нерівність (4.9) перепишемо так:

$$\frac{ju}{q} - \deg f(\mathbf{g}) \leq \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg f(\mathbf{g}) < \frac{(j+1)u}{q} - \deg f(\mathbf{g}).$$

З останньої нерівності, враховуючи (4.8) і $\deg f(\mathbf{g}) = \frac{ju}{q}$, $\left(f(\mathbf{g}) = \sigma^j = \varepsilon^{ju/q}\right)$, безпосередньо маємо $0 \leq \deg r(\mathbf{g}) < \dfrac{u}{q}$.

Достатність. Нехай для функції $f : G_n \to H_q$ існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, яка задовольняє умови (4.5), (4.6). Покажемо, що функція $f(\mathbf{g})$ реалізується над полем F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$. З (4.5) та (4.6) випливає, що $\deg r(\mathbf{g}) = \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg f(\mathbf{g})$ і

$$0 \leq \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg f(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}. \tag{4.10}$$

Нехай $\mathbf{g} \in G_n$ і $f(\mathbf{g}) = \sigma^j$. Нерівність (4.10) з урахуванням рівності $\deg f(\mathbf{g}) = \frac{ju}{q}$ можна записати так: $\frac{ju}{q} - \deg \sigma^j \leq$ $\leq \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg \sigma^j < \frac{(j+1)u}{q} - \deg \sigma^j$. Звідси для всіх $\mathbf{g} \in G_n$ $\frac{ju}{q} \leq \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) < \frac{(j+1)u}{q}$ і за означенням функції $\mathrm{Fsign}\,\xi$ маємо:

$$f(\mathbf{g}) = \mathrm{Fsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{g}).$$

Отже, функція $f(\mathbf{g})$ реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ і теорему доведено.

При розв'язуванні цілого ряду практичних задач розпізнавання образів, діагностики, при побудові нейромереж часто виникає проблема синтезу частково визначених дискретних функцій одним НЕ. Отже, розробка методів синтезу НЕ, що реалізує частково визначену дискретну функцію, є практично важливою задачею при побудові логічних схем у нейробазисі.

Нехай дискретна функція $f : G_n \to H_q$ визначена не на всіх елементах групи G_n. Позначимо через $D_n \subset G_n$ множину елементів, на яких функція f визначена, і нехай $D'_n = G_n \backslash D_n$ — множина елементів, на яких функція не визначена.

Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем F, якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$, що для всіх $\mathbf{g} \in D_n$ $f(\mathbf{g}) =$ $= \mathrm{Fsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{g})$.

Теорема 4.2. *Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем $F = GF(p^m)$ із вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r : G_n \to F \backslash \{0\}$, що*

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \quad r(\mathbf{g})\, f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g})$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; 0 \leq \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема доводиться аналогічно до теореми 4.1.

Теорема 4.1 (4.2) встановлює реалізованість дискретних функцій (частково визначених дискретних функцій) одним НЕ над полем Галуа, але її важко застосовувати на практиці для знаходження вектора структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$. У наступному параграфі наведемо практично придатний метод синтезу НЕ над полем $F = GF\,(p^m)$.

4.3. Спектральний метод синтезу НЕ над полем Галуа

Нехай $f : G_n \to H_q$ — довільна дискретна функція. Виникає питання, чи реалізується функція f одним НЕ над полем $F = GF(p^m)$ і якщо так, то як знайти вектор структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ відповідного НЕ?

Нехай $X^*(G_n) = \left\{\chi_{(0,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(1,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(0,1,\ldots,0,0)}, \ldots \right.$ $\left. \ldots \chi_{(0,0,\ldots,1,0)}, \chi_{(0,0,\ldots,0,1)}\right\}$.

Теорема 4.3. *Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що*

$$0 \leq \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q},$$

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$, де $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ над полем F.

Доведення. *Необхідність.* Нехай дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$. Тоді, за теоремою 4.1, існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що $\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G_n$ $0 \leq \deg r(\mathbf{x}) < \dfrac{u}{q}$ і

$$r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n.$$

Останню рівність, враховуючи означення характерів групи G_n, можна переписати так:

$$\begin{gathered} r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \omega_0 \chi_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \omega_1 \chi_{(1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \ldots \\ \ldots + \omega_n \chi_{(0,\ldots,0,1)}(\mathbf{x}). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Функцію $r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \in V_F^n$ розкладемо за базисом простору V_F^n, що складається з характерів групи G_n, тобто

$$r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \sum_{\chi \in X^*(G_n)} s_\chi \chi(\mathbf{x}) + \sum_{\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)} s_\chi \chi(\mathbf{x}). \tag{4.12}$$

З (4.11) і (4.12) випливає, що $s_\chi = 0$, якщо $\chi \in X(G_n) \setminus$ $\setminus X^*(G_n)$. На основі рівності $|G_n| s_\chi = \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right)$ отримаємо

$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0$ для всіх $\chi \notin X^*(G_n)$. Отже, необхідність доведено.

Достатня умова є очевидною. Якщо дискретна функція $f : G_n \to H_q$ задовольняє умови теореми 4.3, то координати вектора структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ НЕ, що реалізує функцію f над полем F, знаходяться за формулами:

$$\begin{array}{l} \omega_0 = |G_n|^{-1} \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right), \\ \omega_1 = |G_n|^{-1} \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n = |G_n|^{-1} \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,1)}(\mathbf{x}) \right). \end{array} \tag{4.13}$$

Приклад 4.3. Нехай $n = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = q = 3$ і $G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k =$ НСК(2,3,3) і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом 2, тобто $GF(13) \setminus \{0\} = \left\{ 2^j \,|\, j = 0, 1, \ldots, 11 \right\}$. Твірними елементами груп H_2, H_3 над F відповідно будуть $\sigma_1 = 2^{12/2} = 12$, $\sigma_2 = 2^{12/3} = 3$ і областю значення дискретної функції $f : G_n \to H_q$ буде множина $\{1, 3, 9\}$. За допомогою наступної таблиці задаємо функції $f : G_n \to H_q$, $r : G_n \to F \setminus \{0\}$ і групу характерів $X(G_2)$ групи G_2 над полем F:

Таблиця 4.3

x_1	x_2	f	r	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(0,2)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$	$\chi_{(1,2)}$
1	1	1	r_0	1	1	1	1	1	1
1	3	1	r_1	1	3	9	1	3	9
1	9	3	r_2	1	9	3	1	9	3
12	1	3	r_3	1	1	1	12	12	12
12	3	9	r_4	1	3	9	12	10	4
12	9	9	r_5	1	9	3	12	4	10

На основі теореми 4.3. та таблиці 4.3. побудуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь над полем F:

$$\begin{cases} r_0 + 3r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + 3r_5 = 0, \\ r_0 + 9r_1 + 9r_2 + 10r_3 + 10r_4 + 12r_5 = 0, \\ r_0 + 3r_1 + r_2 + 10r_3 + 12r_4 + 10r_5 = 0, \end{cases}$$

$r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in \{1, 2, 4, 8\}$. Система має декілька розв'язків, одним з яких є $(1,8,1,1,4,2)$. Відповідно до отриманого розв'язку системи знаходимо вектор структури НЕ над F, що реалізує функцію f:

$$\omega_0 = 11 \cdot (1+8+3+3+36+18) = 11 \cdot 4 = 5,$$
$$\omega_1 = 11 \cdot (1+8+3+3 \cdot 12+36 \cdot 12+18 \cdot 12) = 11 \cdot 7 = 12,$$
$$\omega_2 = 11 \cdot (1+72+9+3+9 \cdot 9 \cdot 4+9 \cdot 3 \cdot 2) = 11 \cdot 8 = 10.$$

Отже, $f(x_1, x_2) = \mathrm{Fsign}\,(12x_1 + 10x_2 + 5)$.

Клас дискретних функцій, реалізованих одним НЕ залежить від вибраного поля Галуа. Результати програм із синтезу НЕ над F показують, що коли збільшуємо потужність поля F, то потужність класу нейрофункцій не зменшується. Для підтвердження цього факту наведемо наступні прості приклади. Нехай $n = 2,\ k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF(3)$. Число u ділиться на $k = \text{НСК}\,(k_1, k_2, q)$, отже, спектральний аналіз бульових функцій над F є можливим. Примітивним елементом поля F є $\varepsilon = 2$. У наступній таблиці наведемо всі бульові функції від двох змінних, які реалізуються одним НЕ над полем F:

Таблиця 4.4

x_1	x_2	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
1	1	1	1	1	2	2	2
1	2	1	1	2	2	2	1
2	1	1	2	1	2	1	2
2	2	1	2	2	2	1	1

Векторами структури НЕ, які реалізують ці функції, відповідно будуть: $\mathbf{w}_{g_0} = (0,0;1)$, $\mathbf{w}_{g_1} = (1,0;0)$, $\omega_{g_2} = (0,1;0)$, $\mathbf{w}_{g_3} = (0,0;2)$, $\mathbf{w}_{g_4} = (2,0;0)$, $\mathbf{w}_{g_5} = (0,2;0)$. Отже, клас бульових нейрофункцій від двох змінних над $GF(3)$ містить шість функцій $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$.

Розглянемо поле $F = GF(5)$. В якості примітивного елемента поля F можна вибрати $\varepsilon = 2$. Тоді $\sigma = \varepsilon^{\frac{5-1}{2}} = 4$. Бульові нейрофункції від двох змінних над $GF(5)$ наведемо у наступній таблиці:

Таблиця 4.5

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	1	1	1	4	4	4	4
4	1	1	1	4	4	1	1	4	4
4	4	1	4	1	4	1	4	1	4

Продовження таблиці 4.5

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	4	4	4	4	4	4	4	4
1	4	1	1	1	1	4	4	4	4
4	1	1	1	4	4	1	1	4	4
4	4	1	4	1	4	1	4	1	4

Векторами структури відповідних НЕ будуть: $\mathbf{w}_{f_0} = (0,0;1)$, $\mathbf{w}_{f_1} = (2,2;2)$, $\mathbf{w}_{f_2} = (2,3;2)$, $\mathbf{w}_{f_3} = (1,0;0)$, $\mathbf{w}_{f_4} = (3,2;2)$, $\mathbf{w}_{f_5} = (0,1;0)$, $\mathbf{w}_{f_6} = (1,1;4)$, $\mathbf{w}_{f_7} = (2,2;3)$, $\mathbf{w}_{f_8} = (3,3;2)$, $\mathbf{w}_{f_9} = (4,4;1)$, $\mathbf{w}_{f_{10}} = (0,4;0)$, $\mathbf{w}_{f_{11}} = (2,3;3)$, $\mathbf{w}_{f_{12}} = (4,0;0)$, $\mathbf{w}_{f_{13}} = (3,2;3)$, $\mathbf{w}_{f_{14}} = (3,3;3)$, $\mathbf{w}_{f_{15}} = (0,0;4)$. На основі таблиці 4.5 можна стверджувати, що всі бульові функції від двох змінних є нейрофункціями над $GF(5)$. Поле $GF(5)$ є мінімальним полем Галуа (полем із мінімальною потужністю), на якому всі бульові функції від двох змінних реалізуються одним НЕ.

Нехай $k = \text{НСК}\,(k_1, \ldots, k_n, q)$ $(k_i \geq 2,\ q \geq 2)$ і $G_n = H_{k_1} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$.

Гіпотеза. Для довільного k і для довільного n можна вказати таке мінімальне поле Галуа $F_{\min}$, на якому всі дискретні функції $f : G_n \to H_q$ реалізуються одним НЕ.

Теорема 4.4. *Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF\,(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w}$ тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що*

$$\text{для всіх } \mathbf{x} \in D_n \quad 0 \leq \deg r\,(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}\ ,$$

$$\text{для всіх } \mathbf{x} \in D_n \quad \big(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\big) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$.

Доведення безпосередньо випливає з теорем 4.2 і 4.3.

4.4. Інваріантні операції над дискретними нейрофункціями

При вивченні класів нейрофункцій над F важливо встановити ті перетворення над дискретними функціями, які зберігають властивість їх реалізованості одним НЕ. В нижченаведених теоремах опишемо операції, відносно яких клас нейрофункцій над F є замкненим.

Теорема 4.5. *Якщо дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF(p^m)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, *то функція* $f_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, \xi x_i, \ldots, x_n)$, *де* $\xi \in H_{k_i}$, *також реалізується одним НЕ над полем* F *з вектором структури* $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \xi\omega_i, \ldots, \omega_n; \omega_0)$.

Доведення. Дано, що функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Тоді на основі теореми 4.3 існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що

$$\big(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\big) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$ і $0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}$. Нехай $\xi \in H_{k_i}$. Визначимо функцію $r_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ так: $r_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = r(x_1, \ldots, \xi x_i, \ldots, x_n)$. Елемент $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots x_{i-1}, \xi x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ групи G_n запишемо наступним чином: $\mathbf{x}' = (1, \ldots, 1, \xi, 1, \ldots, 1) \circ (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, де $\circ$ — символ операції покоординатного множення векторів. Характери $\chi \in X(G_n)$ є мультиплікативними функціями, визначеними на групі G_n, тобто $\chi(\mathbf{x}') = \chi(1, \ldots, 1, \xi, 1, \ldots, 1)\chi(\mathbf{x})$. Отже,

$$\big(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\big) = \big(r(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}(\mathbf{x}')\big) =$$

$$= \chi^{-1}(1, \ldots, 1, \xi, 1, \ldots, 1) \big(r_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\big) = 0$$

при $\chi \notin X^*(G_n)$, де

$$X^*(G_n) = \left\{\chi_{(0,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(1,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(0,1,\ldots,0,0)}, \ldots, \chi_{(0,0,\ldots,0,1)}\right\}.$$

Тоді з урахуванням того, що $\forall \mathbf{x} \in G_n \;\; 0 \le \deg r_1(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}$, маємо, що функція f_1 реалізується одним НЕ над полем F.

Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ — вектор структури НЕ над F, що реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, а $\mathbf{w}' =$

$= (\omega'_1, \ldots, \omega'_i, \ldots, \omega'_n; \omega'_0)$ — вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Тоді з (4.13) і означення характерів групи G_n маємо:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1} \Big(r_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \Big) =$$

$$= |G_n|^{-1} \Big(r(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}') \Big) = \omega_0,$$

якщо $j \neq i$, то

$$\omega'_j = |G_n|^{-1} \Bigg(r_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \Bigg) =$$

$$= |G_n|^{-1} \Bigg(r(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0}(\mathbf{x}') \Bigg) = \omega_j,$$

і

$$\omega'_i = |G_n|^{-1} \Bigg(r_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \Bigg) =$$

$$= |G_n|^{-1} \xi \Bigg(r(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}') \Bigg) = \xi \omega_i.$$

Отже, НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \xi\omega_i, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ реалізує функцію f_1. Теорему доведено.

Приклад 4.4. Нехай $n = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $q = 3$, $G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k = 6$ і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом $\varepsilon = 2$. Функція $f(x_1, x_2) = \operatorname{Fsign}(12x_1 + 10x_2 + 5)$ реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (12, 10; 5)$. Покажемо, що функція $f_1(x_1, x_2) = f(x_1, \xi x_2)$ також реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (12, 10\xi; 5)$, де ξ — довільний елемент циклічної групи H_3. В якості ξ виберемо 3 і задамо функції f і f_1 за допомогою наступної таблиці:

Таблиця 4.6

x_1	x_2	f	f_1
1	1	1	1
1	3	1	3
1	9	3	1
12	1	3	9

12	3	9	9
12	9	9	3

Нейронний елемент над $GF(13)$ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (12, 4; 5)$ реалізує функцію f_1, якщо $f_1(x_1, x_2) = \operatorname{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$. Знайдемо значення $\operatorname{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$ на кожному наборі:

$$
\begin{gathered}
(1,1) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5) = \operatorname{Fsign} 8 = 1, \\
(1,3) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5) = \operatorname{Fsign} 3 = 3, \\
(1,9) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 5) = \operatorname{Fsign} 1 = 1, \\
(12,1) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 1 + 5) = \operatorname{Fsign} 10 = 9, \\
(12,3) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 5) = \operatorname{Fsign} 9 = 9, \\
(12,9) \to \operatorname{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 9 + 5) = \operatorname{Fsign} 3 = 3.
\end{gathered}
$$

Отже, $f_1(x_1, x_2) = \operatorname{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$.

Теорема 4.6. *Якщо дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем $F = GF(p^m)$ із вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0)$ і $k_i = k_j$, то функція $f_2(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n)$ також реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_2 = (\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_i \ldots, \omega_n; \omega_0)$.*

Доведення. Дано, що функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Тоді, на основі теореми 4.3, існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q} \tag{4.14}$$

і

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x}) \right) = 0 \tag{4.15}$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots \ldots, x_j \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n)$, $r_2(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}')$ і $\tilde{\chi}_{(h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots h_n)} = \chi_{(h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_i, \ldots h_n)}$. Очевидно, що

$$\max_{\mathbf{x} \in G_n} \{\deg r_2(\mathbf{x})\} = \max_{\mathbf{x} \in G_n} \{\deg r(\mathbf{x})\}.$$

Тому функція $r_2(\mathbf{x})$ задовольняє нерівність (4.14) і приймає значення у множині $F\setminus\{0\}$. На основі (4.2) систему рівнянь (4.15) можна переписати так:

$$\left(r_2(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \left(r(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}'), \tilde{\chi}^{-1}(\mathbf{x}')\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n)\setminus X^*(G_n)$. Звідси з урахуванням нерівності $0 \le \deg r_2(\mathbf{x}) < \dfrac{u}{q}$ випливає реалізованість функції $f_2(\mathbf{x})$ одним НЕ. Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0)$ — вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f(\mathbf{x})$. Позначимо через $\mathbf{w}_2 = ({\omega'}_1, \ldots, {\omega'}_i, \ldots, {\omega'}_j \ldots, {\omega'}_n; {\omega'}_0)$ вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f_2(\mathbf{x})$. Тоді на основі (4.13) маємо:

$$\begin{aligned} {\omega'}_0 &= |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\right) = \\ &= |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}')\right) = \omega_0. \end{aligned}$$

Якщо $s \neq j$ і $s \neq i$, то

$$\begin{aligned} {\omega'}_s &= |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(s)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\right) = \\ &= |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(s)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}')\right) = \omega_s. \\ {\omega'}_i &= |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\right) = \\ &= |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}'), \tilde{\chi}^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}')\right) = \omega_j, \end{aligned}$$

і, аналогічно, ${\omega'}_j = \omega_i$. Отже, функція $f_2(\mathbf{x})$ реалізується над F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_2 = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_i \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Теорему доведено.

Теорема 4.7. *Якщо дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, то функція $f_3(x_1, \ldots, x_n) = \xi f(\xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n)$, де $\xi \in H_q$, $\xi_i \in H_{k_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, також реалізується одним НЕ над полем F з вектором структури $\mathbf{w}_3 = (\xi \cdot \xi_1 \omega_1, \ldots, \xi \cdot \xi_n \omega_n; \xi \cdot \omega_0)$.*

Доведення. Враховуючи теорему 4.5, доведення досить провести для випадку $f_3(x_1, \ldots, x_n) = \xi f(x_1, \ldots, x_n)$. Нехай функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Покладемо $r_3(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})$. Тоді на основі теореми 4.3 маємо:

$$\left(r_3(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x}) \right) = \xi \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x}) \right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \backslash X^*(G_n)$. Тому $f_3(\mathbf{x})$ є нейрофункцією над F. Перейдемо до знаходження вектора структури $\mathbf{w}_3 = (\omega'_1, \ldots, \omega'_n; \omega'_0)$ НЕ, що реалізує функцію $f_3(\mathbf{x})$. На основі (4.13) маємо:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1} \left(r_3(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \xi \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) = \xi \omega_0,$$

і для $1 \leq j \leq n$

$$\omega'_j = |G_n|^{-1} \left(r_3(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$
$$= |G_n|^{-1} \cdot \xi \left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) = \xi \omega_j.$$

Отже, функція $f_3(\mathbf{x})$ реалізується на НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_3 = \xi(\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Звідси та з теореми 4.5 безпосередньо випливає справедливість загального твердження. Теорему доведено.

Приклад 4.5. Нехай $n = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $q = 3$, $G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k = 6$ і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом $\varepsilon = 2$. Функція $f(x_1, x_2) = \operatorname{Fsign}(12x_1 + 10x_2 + 5)$ реалізується НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (12, 10; 5)$. Задаємо функції $f(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2) = 3f(12x_1, 3x_2)$ і $\operatorname{Fsign}(3 \cdot 12 \cdot 12 \cdot x_1 + 3 \cdot 3 \cdot 10x_2 + 3 \cdot 5) = \operatorname{Fsign}(3 \cdot x_1 + 12x_2 + 2)$ за допомогою наступної таблиці:

Таблиця 4.7

x_1	x_2	f	f_3	$\operatorname{Fsign}(3x_1 + 12x_2 + 2)$
1	1	1	1	$\operatorname{Fsign}(3 + 12 + 2) = \operatorname{Fsign} 4 = 1$
1	3	1	1	$\operatorname{Fsign}(3 + 36 + 2) = \operatorname{Fsign} 2 = 1$
1	9	3	9	$\operatorname{Fsign}(3 + 108 + 2) = \operatorname{Fsign} 9 = 9$
12	1	3	3	$\operatorname{Fsign}(36 + 12 + 2) = \operatorname{Fsign} 11 = 3$
12	3	9	9	$\operatorname{Fsign}(36 + 36 + 2) = \operatorname{Fsign} 9 = 9$
12	9	9	3	$\operatorname{Fsign}(36 + 108 + 2) = \operatorname{Fsign} 3 = 3$

Як бачимо, НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_3 = (3, 12; 2)$ реалізує функцію $f_3(x_1, x_2)$.

Теорема 4.8. *Якщо функція k-значної логіки $f : G_n \to H_k$ $(G_n = H_k \otimes \ldots \otimes H_k)$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, то функція $f_4(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = x_j f\left(x_1 x_j^{-1}, \ldots, x_{j-1} x_j^{-1}, x_j^{-1}, x_{j+1} x_j^{-1}, \ldots, x_n x_j^{-1}\right)$ також реалізується над полем F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_4 = (\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_0, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_n; \omega_j)$.*

Доведення. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G_n$ і $\mathbf{x}^j = \left(x_1 x_j^{-1}, \ldots \ldots, x_{j-1} x_j^{-1}, x_j^{-1}, x_{j+1} x_j^{-1}, \ldots, x_n x_j^{-1}\right)$. З того, що функція $f : G_n \to H_k$ реалізується одним НЕ над F, на основі теореми 4.3 з урахуванням $r_4(\mathbf{x}) = r\left(\mathbf{x}^j\right)$ маємо:

$$\left(r_4(\mathbf{x}) f_4(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) x_j f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) =$$
$$= \left(r(\mathbf{x}^j) f(\mathbf{x}^j), x_j \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \left(r(\mathbf{x}^j) f(\mathbf{x}^j), \chi^{-1}(\mathbf{x}^j)\right) = 0$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \backslash X^*(G_n)$.

Враховуючи, що $\max\deg r_4(\mathbf{x})$ $(\min\deg r_4(\mathbf{x}))$ і $\max\deg r(\mathbf{x})$ $(\min\deg r(\mathbf{x}))$ на групі G_n співпадають, з останньої рівності випливає, що функція $f_4(\mathbf{x})$ реалізується одним НЕ над полем F.

Дано, що НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ реалізує функцію $f(\mathbf{x})$. Нехай НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_4 = (\omega'_1, \ldots, \omega'_{j-1}, \omega'_0, \omega'_{j+1}, \ldots, \omega'_n; \omega'_j)$ реалізує функцію $f_4(\mathbf{x})$. Виразимо координати вектора $\mathbf{w}_4$ через координати вектора $\mathbf{w}$:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1} \left(r_4(\mathbf{x}) f_4(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$
$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(x_j\, r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$
$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), x_j^{-1}(\mathbf{x}^j) \right) =$$
$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots 0, \underset{(j)}{1}, 0,\ldots,0)}\left(\mathbf{x}^j\right) \right) = \omega_j.$$

$$\omega'_j = |G_n|^{-1} \left(r_4(\mathbf{x}) f_4(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0, \underset{(j)}{1}, 0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(x_j\, r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0)}\left(\mathbf{x}\right) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), x_j^{-1}(\mathbf{x}^j) x_j\left(\mathbf{x}^j\right) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}\left(\mathbf{x}^j\right) \right) = \omega_0.$$

Якщо $i \neq j$, то

$$\omega'_i = |G_n|^{-1} \left(r_4\left(\mathbf{x}\right) f_4\left(\mathbf{x}\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}\left(\mathbf{x}\right) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(x_j\, r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi(^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), x_j x_i^{-1} \right) =$$

$$= |G_n|^{-1} \cdot \left(r\left(\mathbf{x}^j\right) f\left(\mathbf{x}^j\right), \chi^{-1}_{(0,\ldots 0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}\left(\mathbf{x}^j\right) \right) = \omega_i.$$

Отже, функція $f_4\left(\mathbf{x}\right)$ реалізується над полем F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_4 = (\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \omega_0, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_n; \omega_j)$.

Приклад 4.6. Розглянемо тризначну нейрофункцію від двох змінних над полем $GF(13)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (2, 5; 7)$, тобто $f\left(x_1, x_2\right) = \mathrm{Fsign}\left(2x_1 + 5x_2 + 7\right)$. Задаємо функцію $f_4\left(x_1, x_2\right) = x_1 f\left(x_1^{-1}, x_1^{-1} x_2\right)$ і знаходимо значення функції $\mathrm{Fsign}\left(7x_1 + 5x_2 + 2\right)$. Результати обчислень наведені у наступній таблиці:

Таблиця 4.8

x_1	x_2	f	f_4	$\mathrm{Fsign}(7x_1 + 5x_2 + 2)$
1	1	1	1	1
1	3	3	3	3
1	9	1	1	1
3	1	9	1	1
3	3	1	3	3
3	9	3	3	3
9	1	1	9	9
9	3	1	1	1
9	9	9	3	3

Як бачимо, функція $f_4\left(x_1, x_2\right)$ реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_4 = (7,5;2)$. Отже, $f_4(x_1,x_2) = \mathrm{Fsign}(7x_1+5x_2+2)$.

4.5. Дискретні нейрофункції над полем Галуа відносно довільної системи характерів

Нехай $GF(p^m)$ — поле, що містить циклічні групи $H_{k_i} = \left\langle a_i \left| a_i^{k_i} = 1 \right.\right\rangle$, $i = 1,\ldots,n$, $H_q = \langle a \,|\, a^q = 1 \rangle$, $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ — прямий добуток циклічних груп H_{k_i}, і нехай $k = \text{НСК}(k_1,k_2,\ldots,k_n,q)$ є дільником числа $u = p^m - 1$. Із різних елементів групи $X(G_n)$, крім головного χ_0 утворимо множину $X = \{\chi_{i_1},\chi_{i_2},\ldots,\chi_{i_t}\}$ і відносно X розглянемо наступну математичну модель нейронного елемента:

$$f(\mathbf{g}) = \mathrm{Fsign}\left(\sum_{j=1}^{t} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{g}) + \omega_0\right), \tag{4.16}$$

де $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_t;\omega_0)$ — вектор структури нейроелемента відносно системи X і $\mathbf{g} \in G_n$. Якщо $t = n$ і $\chi_{i_1} = \chi_{(1,0,\ldots,0)},\ldots,\chi_{i_t} = \chi_{(0,\ldots,0,1)}$, то отримаємо модель НЕ, яка показана на рис. 4.1.

Нехай $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g})+\ldots+\omega_t\chi_{i_t}(\mathbf{g})+\omega_0$. Відносно нової математичної моделі НЕ (4.16) теореми 4.1, 4.2 і 4.3 можуть бути узагальнені наступним чином.

Теорема 4.9. *Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_t;\omega_0)$ відносно системи характерів X тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r : G_n \to F\setminus\{0\}$, що*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \;\; r(\mathbf{g})\, f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g})$$

і

$$0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема 4.10. *Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури*

$\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; r(\mathbf{g}) f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g})$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; 0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема 4.11. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF(p^m)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q},$$

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus (X \cup \{\chi_0\})$.

Остання теорема дає можливість синтезувати НЕ над полем Галуа відносно системи характерів X.

Приклад 4.7. Нехай $n = 2$, $k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF(3)$. Тоді бульова функція $\varphi(x_1, x_2) = 2^{(\deg x_1 + \deg x_2) \bmod 2}$ в алфавіті $\{1, 2\}$, як видно з таблиці 4.4, не реалізується одним НЕ відносно системи характерів $X = \{x_1, x_2\}$, але реалізується одним НЕ відносно системи $X' = \{\chi_3\}$ з вектором структури $\mathbf{w} = (1; 0)$. Приклад показує, що якщо змінити систему характерів, відносно якої розглядаються НЕ над полем F, то зміниться і клас нейрофункцій. Якщо за X вибрати групу характерів $X(G_n)$, то, очевидно, клас нейрофункцій співпаде з множиною усіх дискретних функцій типу $f : G_n \to H_q$.

4.6. Дискретні нейрофункції над полем комплексних чисел відносно довільної системи характерів

Нехай $H_{k_i} = \langle a_i \mid {a_i}^{k_i} = 1 \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $H_q = \langle a \mid a^q = 1 \rangle$ — циклічні групи, $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ — прямий добуток груп H_{k_i}, і нехай

$k = \text{НСК}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n, q)$. Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ при довільному натуральному k містить k різних коренів k-го степеня з 1. Отже, спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to \mathbb{C}$ є завжди можливим. Згідно з [59], визначимо на полі $\mathbb{C}$, за винятком точки 0, функцію $\operatorname{Csign} z$ так:

$$\forall z \neq 0 \;\; \operatorname{Csign} z = \sigma^j, \text{ якщо } \frac{2\pi}{q} \leq \arg z < \frac{2\pi\,(j+1)}{q},$$

де $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $\sigma = \varepsilon^{k/q}$, ε — первісний корінь k-го степеня з 1.

Із різних характерів групи G_n побудуємо множину $X = \{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ і відносно X розглянемо наступну модель нейронного елемента:

$$f\,(\mathbf{x}) = \operatorname{Csign}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}\,(\mathbf{x}) + \omega_0\right).$$

Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем $\mathbb{C}$ відносно системи характерів X, якщо існує такий вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, що для всіх $\mathbf{x} \in G_n$ $f\,(\mathbf{x}) = \operatorname{Csign} \mathrm{w}\,(\mathbf{x})$, де $\mathrm{w}(\mathbf{x}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{x}) + \ldots \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{x}) + {} + \omega_0$. Вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ називається вектором структури нейроелемента відносно системи характерів X над полем $\mathbb{C}$.

Теорема 4.12. *Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $\mathbb{C}$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ відносно системи характерів X тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r : G_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, що*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \;\; r\,(\mathbf{g})\, f\,(\mathbf{g}) = \mathrm{w}\,(\mathbf{g})$$

і

$$0 \leq \arg r\,(\mathbf{g}) < \frac{2\pi}{q}.$$

Ця теорема є узагальненням теореми 2.1 [60] і доводиться аналогічно.

Розглянемо вектори $\mathbf{a} = (1, 0)$ і $\mathbf{b} = \left(\cos\frac{2\pi}{q}, \sin\frac{2\pi}{q}\right)$, які при $q > 2$ неколінеарні. Це означає, що функцію $r(\mathbf{x})$ можна записати у вигляді:

$$r(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon,$$

де $a(\mathbf{x}),\ b(\mathbf{x})$ набувають дійсних значень. У роботі [60] показано, що функція $r(\mathbf{x})$ $\;(r : G_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\})$, яка задовольняє умову

$$0 \leq \arg r\,(\mathbf{g}) < \frac{2\pi}{q} \;\; (q > 2)\,,$$

допускає зображення $r(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon$ тоді і тільки тоді, коли існують такі функції $a(\mathbf{x})$ $(a : G_n \to \mathbb{R}\setminus\{0\})$, $b(\mathbf{x})$ $(b : G_n \to \mathbb{R})$, що $a(\mathbf{x}) > 0$ і $b(\mathbf{x}) \geq 0$.

Теорему 4.12 на основі останнього твердження можна переформулювати так.

Теорема 4.13. *Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізуєтьcя одним нейронним елементом над полем $\mathbb{C}$ із вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ відносно системи характерів X тоді і тільки тоді, коли існують такі дві функції $a(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x})$, які визначені на G_n і набувають значення з $\mathbb{R}$, що*

$$\forall \mathbf{x} \in G_n \quad (a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon) f(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}) \quad i \;\; a(\mathbf{x}) > 0, \;\; b(\mathbf{x}) \geq 0.$$

Зауважимо, що теорема 4.13 невірна при $q = 2$, оскільки в цьому випадку вектори $\mathbf{a} = (1, 0)$ і $\mathbf{b} = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1, 0)$ колінеарні. У випадку $q = 2$ відносно системи характерів X отримуємо узагальнення теореми 2.4 [60].

4.7. Спектральний метод синтезу двошарової нейромережі над полем Галуа

Нехай k $(k \geq 2)$ — довільне натуральне число і поле $F = GF(p^m)$ таке, що число k є дільником числа $u = p^m - 1$. Тоді поле F містить циклічну групу $H_k = \left\langle \sigma | \sigma^k = 1 \right\rangle$, де $\sigma = \varepsilon^{u/k}$, ε — примітивний елемент поля F.

Нехай $P_k^n = \{f | f : G_n \to H_k\}$ — множина всіх функцій k-значної логіки від n змінних в алфавіті $H_k = \left\{1, \sigma, \ldots, \sigma^{k-1}\right\}$, $G_n = H_k \otimes \ldots \otimes H_k$ — прямий добуток n циклічних груп H_k. Позначимо через $P_k^n(F)$ множину всіх нейрофункцій від n змінних над полем F. Якщо поле F таке, що $P_k^n(F) = P_k^n$, то задача синтезу нейромережі вироджується, оскільки всі функції P_k^n є нейрофункціями, тобто реалізуються одним НЕ. Нехай поле F таке, що $P_k^n(F)$ є власною підмножиною P_k^n. Виберемо у множині $P_k^n(F)$ довільну систему функцій $\{f_1, \ldots, f_t\}$ і через $P(f_1, \ldots, f_t)$ позначимо множину всіх таких функцій f, які допускають зображення:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t-1} s_i \varphi_i(\mathbf{x}), \tag{4.17}$$

де $\varphi_i(\mathbf{x}) = f_1^{i_1}(\mathbf{x}) f_2^{i_2}(\mathbf{x}) \dots f_t^{i_t}(\mathbf{x})$, $i = i_1 k^{t-1} + i_2 k^{t-2} + \dots + i_t$, $i_1, i_2, \dots, i_t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Рівність (4.17) допускає наступне схематичне зображення, що показано на рис. 4.2. Якщо за систему функцій $\{f_1, \dots, f_t\}$ вибрати систему функцій $\{x_1, \dots, x_n\}$ $(t = n)$, то, очевидно, що $P(x_1, \dots, x_n) = P_k^n$, і задача синтезу двошарової нейромережі зводиться до синтезу вихідного НЕ відносно системи усіх характерів групи G_n над полем F. У цьому випадку перший шар є зайвим.

Якщо система функцій $\{f_1, \dots, f_t\}$ така, що $P(f_1, \dots, f_t) \subseteq P_k^n(F)$, то задача синтезу нейромережі є, очевидно, недоцільною.

Отже, систему функцій $\{f_1, \dots, f_t\}$ треба вибирати так, щоб $P_k^n(F)$ була власною підмножиною множини $P(f_1, \dots, f_t)$, і нейромережі будуємо для функцій $f \in P(f_1, \dots, f_t) \setminus P_k^n(F)$.

Функції $\varphi_i(\mathbf{x})$ $(i = 0, 1, \dots, k^t - 1)$ належать простору $V_F^n = \{f | f : G_n \to F\}$ з ортогональним базисом $X(G_n)$, а це означає, що кожну функцію однозначно можна записати у вигляді:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k^n-1} q_{ij} \chi_j(\mathbf{x}), \tag{4.18}$$

де q_{ij} — j-а складова спектра функції $\varphi_i(\mathbf{x})$. Об'єднавши рівності (4.17) і (4.18), одержимо:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t-1} \sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij} \chi_j(\mathbf{x}).$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $\chi_m^{-1}(\mathbf{x})$ і просумуємо по всім $\mathbf{x} \in G_n$. Отримаємо:

$$\sum_{\mathbf{x} \in G_n} f(\mathbf{x}) \chi_m^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t-1} \sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij} \sum_{\mathbf{x} \in G_n} \chi_j(\mathbf{x}) \chi_m^{-1}(\mathbf{x}).$$

Ліва частина останньої рівності з точністю до множника k^n співпадає з m-ою складовою r_m спектра вихідного сигналу мережі від вхідних змінних $x_1, \dots, x_n$. Отже,

$$r_m = k^{-n} \sum_{i=0}^{k^t-1} \sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij} \sum_{\mathbf{x} \in G_n} \chi_j(\mathbf{x}) \chi_m^{-1}(\mathbf{x}). \tag{4.19}$$

Враховуючи властивість ортогональності характерів, рівність (4.19) можна переписати так:

$$r_m = \sum_{i=0}^{k^t-1} s_i q_{im}. \tag{4.20}$$

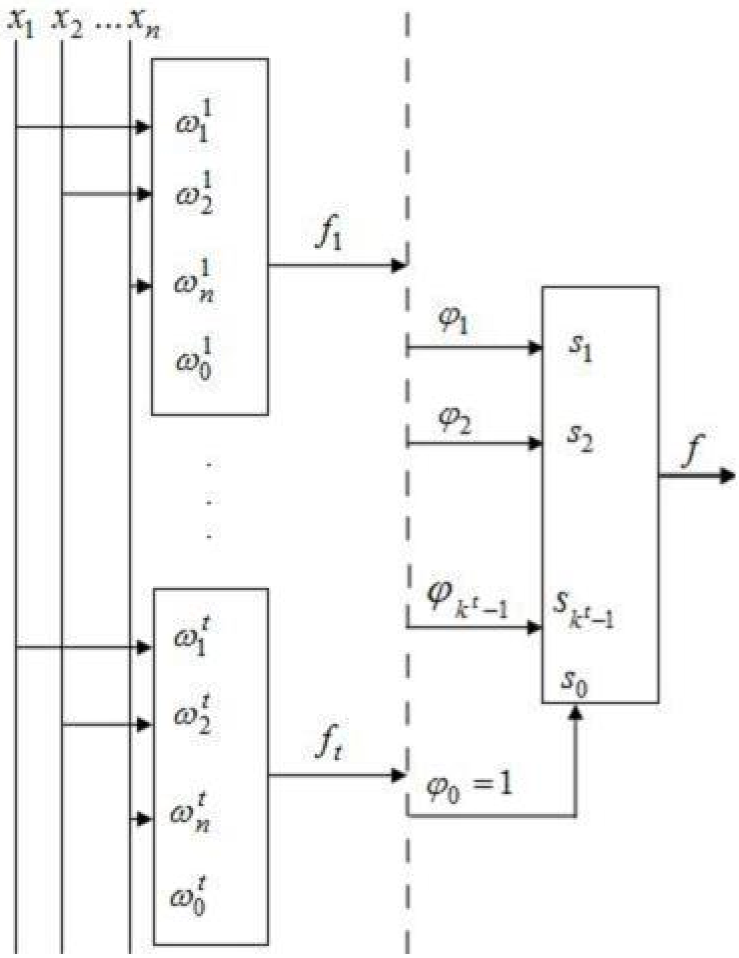

Рис. 4.2. Схема двошарової нейромережі

Співвідношення (4.20) є спектральним засобом визначення мережі. Складові спектра r_m $(m = 0, 1, \ldots, k^n - 1)$ можуть бути знайдені за заданою функцією $f(\mathbf{x})$. Отже, синтез двошарової мережі зводиться до знаходження такого вектора $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{k^t-1})$ і матриці (q_{im}), яка перетворює $\mathbf{s}$ у відомий вектор $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{k^n-1})$. При цьому перші $t+1$ рядки матриці (q_{im}) відповідно мають співпадати зі спектрами функцій, що належать множині $P_k^n(F)$. Ці перетворення не дають практично придатний метод синтезу нейромережі. Основні труднощі полягають у знаходженні спектрів проміжкових функцій $\varphi_i(\mathbf{x})$, а також вибору вектора $\mathbf{s}$.

Розглянемо нейромережу (рис. 4.2) з наступним НЕ у другому шарі:

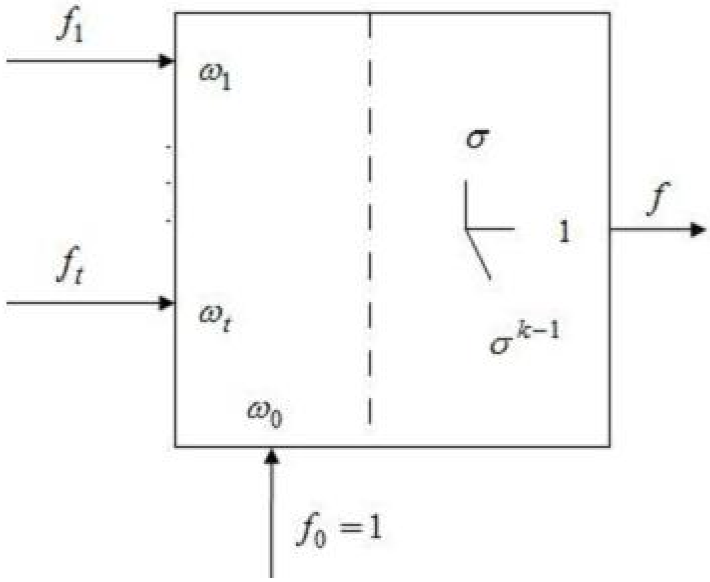

Рис. 4.3. Вихідний НЕ нейромережі

і розглянемо функцію

$$\mathrm{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{t} \omega_i f_i(\mathbf{x}), \tag{4.21}$$

що задає відображення $\mathrm{w} : G_n \to F \backslash \{0\}$. Розкладемо ліву і праву частини рівності (4.21) за характерами групи G_n. Тоді

$$\sum_{j=0}^{k^n-1} v_j \chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k^n-1} \sum_{i=0}^{t} \omega_i q_{ij} \chi_j(\mathbf{x}), \tag{4.22}$$

де q_{ij} — j-а складова спектра функції f_i. Якщо покласти $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{k^n-1})$ і $\mathbf{r}_i = (q_{ij})$, $(j = 0, 1, \ldots, k^n - 1)$, то з (4.22) маємо:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{t} \omega_i \mathbf{r}_i, \tag{4.23}$$

де $\mathbf{v}$ — спектр функції $\mathrm{w}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{r}_i$ — спектр нейрофункції f_i над полем F. Якщо би спектр $\mathbf{v}$ був відомий, то задача синтезу двошарової нейромережі із заданим вихідним НЕ була б відносно простою. Але у загальному випадку спектр $\mathbf{v}$ невідомий, і при розв'язуванні задачі синтезу двошарової нейромережі накладаємо додаткові обмеження на вихідний НЕ, а саме, припустимо, що $\mathbf{v}$ співпадає зі спектром $\mathbf{r}$ функцій $f(\mathbf{x})$. Тоді рівність (4.23) можна переписати так:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{t} \omega_i \mathbf{r}_i. \tag{4.24}$$

Таким чином, для синтезу двошарової нейромережі за таких обмеженнь на вихідний НЕ нам достатньо знайти множину спектрів $\mathbf{r}_i$ відповідних нейрофункцій f_i над полем F і такі числа ω_i, які задовольняють рівність (4.24). У загальному випадку знаходження величин ω_i є непростою задачею. Щоб уникнути цих труднощів, при знаходженні $\omega_i \in F$ використовують різні методи локальної мінімізації. В основі цих методів, як правило, лежать додаткові обмеження на кількість входів нейроелементів першого шару. При такому підході виникає питання: чи можна реалізувати будь-яку функцію з множини $P(x_1, \ldots, x_n)$ на двошаровій нейромережі, якщо перший шар містить тільки такі НЕ, кількість входів яких менша за кількість входів у нейромережі.

Теорема 4.14. *Якщо двошарова нейромережа* (рис. 4.2) *реалізує довільну функцію $f \in P(x_1, \ldots, x_n)$, то перший шар за умови* (4.24) *містить хоча б один нейроелемент, у якого кількість входів не менша за кількість входів самої мережі.*

Доведення. Доводити теорему будемо від супротивного. Припустимо, що можна синтезувати двошарову нейромережу за умови (4.24), яка реалізує довільну функцію $f \in P(x_1, \ldots, x_n)$, і кількість входів кожного нейроелемента вхідного шару менша за число n. Тоді така мережа має реалізувати і функцію $f(\mathbf{g}) = x_1^{k-1}(\mathbf{g}) \cdot \ldots \cdot x_n^{k-1}(\mathbf{g})$, де n — кількість входів нейромережі, $x_i(\mathbf{g})$ — значення змінної x_i на елементі $\mathbf{g} \in G_n$. Знайдемо спектр $\mathbf{r} = (r_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, k^n - 1)$ функції f у системі $X(G_n)$ над F. З ортогональної властивості характерів та з того, що $f \in X(G_n)$, випливає, що $r_i = 0$, $(i = 0, 1, \ldots, k^n - 2)$ і $r_{k^n-1} = 1$. Легко бачити, що останній компонент спектра довільної функції, що реалізується НЕ першого шару, дорівнює нулю. Дійсно, кількість входів кожного нейроелемента першого шару обмежена зверху числом ν $(\nu < n)$, а це означає, що спектр довільної функції, реалізованої такими нейроелементами, може містити не більше ніж k^ν ненульових складових, які мають порядкові номери, не більші за $k^\nu - 1$. Отже, $k^n - 1$-а складова спектра зваженої суми $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1 f_1(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_t f_t(\mathbf{g}) + \omega_0$

вихідного нейроелемента дорівнює нулю, оскільки спектр зваженої суми w($\mathbf{g}$) є лінійною комбінацією спектрів функцій f_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$, які реалізуються відповідними НЕ першого шару. Якщо спектр зваженої суми w($\mathbf{g}$) вихідного НЕ у системі $X\,(G_n)$ над полем F позначити через $\mathbf{s} = (s_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, k^n - 1)$, то, очевидно, що $s_{k^n-1} = 0$.

За нашим припущенням існує такий вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots \ldots \omega_t; \omega_0)$, що

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \qquad f\,(\mathbf{g}) = \omega_1 f_1\,(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_t f_t\,(\mathbf{g}) + \omega_0. \tag{4.25}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (4.25) на $f^{-1}\,(\mathbf{g})$, а потім просумуємо за всіма $\mathbf{g} \in G_n$. Тоді, з урахуванням того, що кількість аргументів кожної функції f_i менша ніж n, маємо:

$$k^n = 0. \tag{4.26}$$

У зв'язку з тим, що поле $GF\,(p^m)$ було вибрано таким чином, що число k є дільником числа $u = p^m - 1$, можна стверджувати, що рівність (4.26) не має місце, оскільки k і p взаємно прості числа. Отримане протиріччя вказує на неможливість нашого припущення, отже, теорему доведено.

РОЗДІЛ 5
ОБРОБКА І РОЗПІЗНАВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ У НЕЙРОБАЗИСІ

Розробка придатних методів обробки та розв'язання задачі розпізнавання дискретних сигналів і зображень є актуальною і практично важливою задачею. Як відомо [61-65], вибір базису представлення дискретних сигналів і зображень є важливим етапом при їх обробці та формуванні ознак для задачі розпізнавання.

У цьому розділі розроблено метод синтезу нейромережевих схем для розпізнавання об'єктів, закодованих n-вимірними бульовими векторами. Досліджується ефективність функціонування вказаної схеми залежно від значення індексів матриць толерантності, які використовуються при синтезі схем. У цьому ж розділі розроблено метод представлення дискретних двовимірних зображень у нейробазисі, що допускає ефективне кодування їх фрагментів і розглядається задача розпізнавання дискретних зображень. Побудовано функціонали μ^*-"подібності", μ_*-"відмінності"p-фрагментів зображень, і з урахуванням їх властивостей приймається рішення про належність заданого зображення до одного з класів еталонів $K_1, K_2, \ldots, K_t$.

5.1. Розпізнавальна схема бінарних сигналів та зображень у нейробазисі

Нехай $K_1, K_2, \ldots, K_t$ — навчальна вибірка для класів об'єктів $K'_1, K'_2, \ldots, K'_t$. Класи $K'_i,\ \ K'_j\ \ (i \neq j)$, і у тому числі підмножини $K_i \subset K'_i,\ \ K_j \subset K'_j$, можуть мати непорожній перетин.

Розглянемо задачу синтезу нейромережевої схеми, яка довільний об'єкт d з $\bigcup\limits_{i=1}^{t} K'_i$ відносить до одного з класів об'єктів K'_i, якщо елементи класів закодовані бульовими векторами розмірності n, тобто навчальна вибірка задається так:

$$K_1 = \left\{ \left(\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{1n}^{(1)}\right), \left(\alpha_{21}^{(1)}, \ldots, \alpha_{2n}^{(1)}\right), \ldots, \left(\alpha_{k_1 1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{k_1 n}^{(1)}\right) \right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_t = \left\{ \left(\alpha_{11}^{(t)}, \ldots, \alpha_{1n}^{(t)}\right), \left(\alpha_{21}^{(t)}, \ldots, \alpha_{2n}^{(t)}\right), \ldots, \left(\alpha_{k_t 1}^{(t)}, \ldots, \alpha_{k_t n}^{(t)}\right) \right\},$$

де $\alpha_{ij}^{(r)} \in \{0, 1\},\ r = 1, \ldots, t.$

Для розв'язання поставленої задачі виберемо конфігурацію нейросхеми, що складається з трьох шарів нейроелементів і одного логічного вихідного блоку, що за номером максимального значення вихідної функції третього шару визначає належність заданого об'єкта d до одного з класів $K_1', K_2', \ldots, K_t'$. Якщо всі вихідні функції третього шару приймають значення менші за $\eta \in (0,1)$, то заданий об'єкт не відноситься до жодного з класів $K_1', K_2', \ldots, K_t'$. Величина η є параметром розпізнавальної схеми, за допомогою якого регулюємо точність розпізнавання. Схематично ця логічна схема зображена на рис. 5.1.

Згідно з рис. 5.1 кожному класу об'єктів K_i відповідає блок із номером i, на виході якого отримуємо числову величину F_i. Для синтезу розпізнавальної схеми треба знайти вектори структури:

$$\begin{array}{l} \mathbf{w}_{11} = \left(\omega_1^{11}, \ldots, \omega_n^{11}; T_1^1\right), \ldots, \mathbf{w}_{r_1 1} = \left(\omega_1^{r_1 1}, \ldots, \omega_n^{r_1 1}; T_{r_1}^1\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{w}_{1t} = \left(\omega_1^{1t}, \ldots, \omega_n^{1t}; T_1^t\right), \ldots,\ \mathbf{w}_{r_t t} = \left(\omega_1^{r_t t}, \ldots, \omega_n^{r_t t}; T_{r_t}^t\right) \end{array}$$

нейроелементів 1-го шару і вагові вектори $\mathbf{v}_1 = \left(\nu_1^1, \ldots, \nu_{r_1}^1\right), \ldots$ $\ldots, \mathbf{v}_t = \left(\nu_1^t, \ldots, \nu_{r_t}^t\right)$ нейроелементів 2-го шару. Величини f_r^k, g_1^k, g_2^k і F_k $(k = 1, 2, \ldots, t)$ визначаються наступним чином:

$$f_r^k\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \begin{cases} 1, & \omega_1^{r_k} x_1 + \ldots + \omega_n^{r_k} x_n \geq T_r^k, \\ 0, & \omega_1^{r_k} x_1 + \ldots + \omega_n^{r_k} x_n < T_r^k, \end{cases}$$

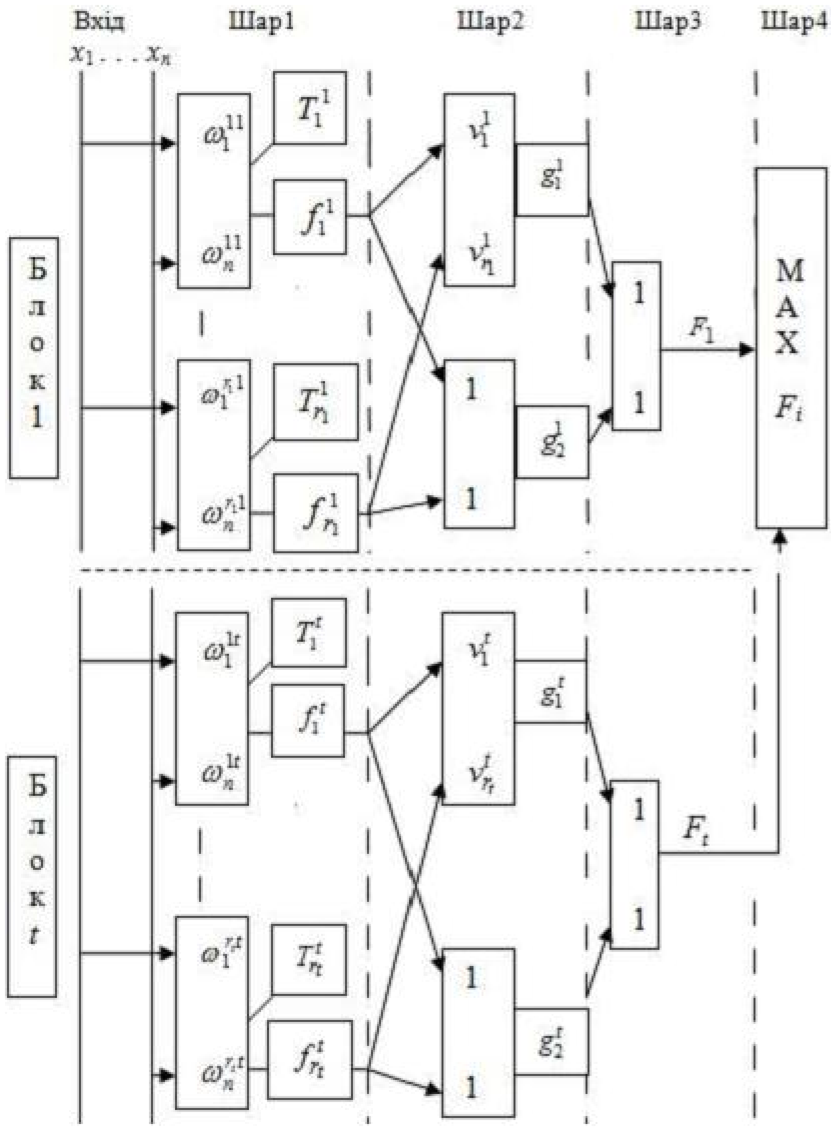

Рис. 5.1. Розпізнавальна схема у нейробазисі

$r \in \{1,2,\ldots,r_k\}$, $g_1^k = \nu_1^k f_1^k + \ldots + \nu_r^k f_r^k$, $g_2^k = f_1^k + \ldots + f_r^k + 1$ і $F_k = \frac{g_1^k}{g_2^k}$. Розглянемо метод синтезу нейроелементів 1-го та 2-го шарів, тобто метод знаходження векторів $\mathbf{w}_{11},\ldots,\mathbf{w}_{r_1 1},\ldots,\mathbf{w}_{1t},\ldots,\mathbf{w}_{r_t t},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_t$. Нехай A — довільна підмножина множини Z_2^n, $\mathbf{a} \in A$ і p — пороговий оператор із міткою σ та індексом j. Тоді $p\left(\mathbf{a}A\right)$ — максимальна така підмножина множини $\mathbf{a}A$, що

$$p\left(\mathbf{a}A\right)_\xi^\sigma = \left(L_j 0_j \ldots 0_j\right) \,\square\, \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j} \left(L_{j+i}^*\left(q_i\right) \underbrace{0\ldots 0}_{n-(j+i)}\right)\right), \qquad (5.1)$$

де $q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n-j}$. Індекс матриці толерантності j в розкладі (5.1) називається також індексом p-множини $(\mathbf{a}\,p\,(\mathbf{a}A))^{\sigma^{-1}}$, де $A^\sigma = \{\mathbf{a}^\sigma \mid \mathbf{a} \in A\}$.

Зауваження. Мітка $\sigma \in S_n$ визначається так, щоб кількість одиниць $K\,(i)\,,\ \ K\,(i+1)$ відповідних стовпчиків з номерами $i,\ i+1$ задовольняли нерівність $K\,(i) \geq K\,(i+1)$.

Довільну множину A_s бульових векторів можна записати через p-підмножини так:

$$A_s = \mathbf{a}_1^s p\,(\mathbf{a}_1^s A_s) \cup \mathbf{a}_2^s p\,(\mathbf{a}_2^s A_s) \cup \ldots \cup \mathbf{a}_{r_s}^s p\,\left(\mathbf{a}_{r_s}^s A_s\right),$$

де p-підмножини $p\,(\mathbf{a}_i^s A_i)$ задовольняють наступну умову:

$$\mathbf{a}_i^s p\,(\mathbf{a}_i^s A_s) \not\subset \bigcup_{j=1, j\neq i}^{r_s} \mathbf{a}_j^s p\,\left(\mathbf{a}_j^s A_s\right), \tag{5.2}$$

$i = 1, 2, \ldots, r_s$. Множина $\mathbf{a}_m^s p(\mathbf{a}_m^s A_s)$ називається m-им компонентом p-розкладу множини A_s на p-підмножини з індексом j_{ms}. Точки розкладу $\mathbf{a}_1^s, \ldots, \mathbf{a}_{r_s}^s$ множини A_s на p-підмножини визначаються так, щоб кількість орт-векторів множини $\mathbf{a}_i^s A_s$ була не менша за кількість орт-векторів множини $\mathbf{a}_{i+1}^s A_s$ $(i = 1, 2, \ldots r_s - 1)$ і щоб справджувалося (5.2). Далі будемо розглядати лише такі точки розкладу.

Нехай B_s — довільна підмножина множини $A_s \subset Z_2^n$ і $\mathbf{b}_1^s$, $\mathbf{b}_2^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s$ — такі елементи з B_s, що

$$B_s \subseteq \mathbf{b}_1^s p\,(\mathbf{b}_1^s A_s) \cup \mathbf{b}_2^s p\,(\mathbf{b}_2^s A_s) \cup \ldots \cup \mathbf{b}_{r_s}^s p\,\left(\mathbf{b}_{r_s}^s A_s\right) \tag{5.3}$$

і

$$B_s \not\subset \bigcup_{i=1, i\neq j}^{r_s} \mathbf{b}_i^s p\,(\mathbf{b}_i^s A_s), \tag{5.4}$$

де $j \in \{1, \ldots, r_s\}$ і p-підмножини $\mathbf{b}_i^s p\,(\mathbf{b}_i^s A_s)$ задовольняють умову (5.2).

Система p-підмножин $\mathbf{b}_1^s p\,(\mathbf{b}_1^s A_s)\,, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s p\,\left(\mathbf{b}_{r_s}^s A_s\right)$ задає p-покриття підмножини B_s у множині A_s відносно точок $\mathbf{b}_1^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s \in B_s$ з відповідними індексами $j_{1s}, j_{2s}, ..., j_{r_s s}$, якщо вони задовольняють умови (5.2)-(5.4). Якщо через $P_{A_s}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$ позначити множину $\bigcup\limits_{i=1}^{r_s} \mathbf{b}_i^s p\,(\mathbf{b}_i^s A_s)$, то очевидно, що $B_s \subset P_{A_s}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right) \subset A_s$.

Мінімальним p-покриттям множини B_s у множині A_s відносно точок розкладу $\mathbf{b}_1^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s \in B_s$ з відповідними індексами $j_{1s}, j_{2s}, ..., j_{r_s s}$ його

p-компонентів $\mathbf{b}_i^s p\left(\mathbf{b}_i^s A_s\right)$ $(i = 1, ..., r_s)$ називається така мінімальна підмножина $P_{A_s}^{\min}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$ в A_s, яка задовольняє умови (5.2)-(5.4).

Аналогічно визначається максимальне p-покриття множини B_s у множині A_s відносно точок розкладу $\mathbf{b}_1^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s \in B_s$ з відповідними індексами $j_{1s}, j_{2s}, ..., j_{r_s s}$, різниця тільки у тому, що під $P_{A_s}^{\max}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$ розуміємо таку максимальну підмножину в A_s, що задовольняє умови (5.2)-(5.4).

Очевидно, коли $P_{A_s}^{\min}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s\right) \neq P_{A_s}^{\max}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$, то існує таке p-покриття $P_{A_s}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$, що

$$P_{A_s}^{\min}\left(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right) \subset P_{A_s}(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s) \subset P_{A_s}^{\max}(B_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s).$$

Нехай p-множина $p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)$ множини $\mathbf{b}_m A_s$ $(m \in \{1, ..., r_s\})$ має мітку σ_{ms} та індекс j_{ms}, тобто

$$p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)_{\xi_{ms}}^{\sigma_{ms}} = \left(L_{j_{ms}} 0_{j_{ms}} \ldots 0_{j_{ms}}\right) \square$$

$$\square \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j_{ms}} \left(L_{j_{ms}+i}^* \left(q_i^{ms}\right) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_{ms}+i)} \right) \right), \tag{5.5}$$

де $q_0^{ms} \geq q_1^{ms} \geq \ldots \geq q_{n-j_{ms}}^{ms}$.

Через k_{ms} позначимо таке найменше ціле невід'ємне число, що $q_{k_{ms}}^{ms} \neq 0$ і $q_{k_{ms}+1}^{ms} = 0$. Побудуємо n-вимірний вектор $\mathbf{u}_{ms} =$ $= \left(u_1^{ms}, ..., u_{j_{ms}}^{ms}, u_{j_{ms}+1}^{ms}, ..., u_n^{ms}\right)$ наступним чином:

$$\begin{aligned} & u_1^{ms} = -1, \;\; u_2^{ms} = u_1^{ms} - 1, ..., u_{j_{ms}}^{ms} = \sum_{i=1}^{j_{ms}-1} u_i^{ms} - 1, \\ & u_{j_{ms}+1}^{ms} = u_{j_{ms}}^{ms} + \left(q_1^{ms} - q_0^{ms}\right), ..., \;\; u_{j_{ms}+k_{ms}}^{ms} = u_{j_{ms}+k_{ms}-1}^{ms} + \\ & + \left(q_{k_{ms}}^{ms} - q_{k_{ms}-1}^{ms}\right), \;\; u_{j_{ms}+k_{ms}+1} = u_{j_{ms}+k_{ms}+2} = \ldots = u_n^{ms} = \\ & = \left(\mathbf{g}_{k_{ms}}^{ms}, \mathbf{c}_{k_{ms}}^{ms}\right) - 1, \end{aligned}$$

де $\mathbf{g}_{k_{ms}}^{ms}$ — останній рядок матриці $\left(L_{j_{ms}+k_{ms}}^* \left(q_{k_{ms}}\right) 0...0\right)$, $\mathbf{c}_{k_{ms}}^{ms} = \left(u_1^{ms}, ..., u_{j_{ms}+k_{ms}}^{ms} 0, ..., 0\right)$ — n-вимірний вектор і $\left(\mathbf{g}_{k_{ms}}^{ms}, \mathbf{c}_{k_{ms}}^{ms}\right)$ — скалярний добуток векторів $\mathbf{g}_{k_{ms}}^{ms}$ і $\mathbf{c}_{k_{ms}}^{ms}$. Легко бачити, що побудований вектор $\mathbf{u}_{ms}$ задовольняє умову

$$\forall \mathbf{x} \in p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right) \text{ і } \forall \mathbf{y} \in Z_2^n \backslash p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right) \;\; \left(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{ms}\right) > \left(\mathbf{y}, \mathbf{u}_{ms}\right).$$

Нехай $\mathbf{g} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ — останній рядок матриці $p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)_{\xi_{ms}}^{\sigma_{ms}}$. Визначимо вектор $\mathbf{w}_{ms} = \mathbf{b}_m^s\left(\mathbf{u}_{ms}^{\sigma_{ms}^{-1}}\right)$ і число $T_m^s = \left(\mathbf{b}_m^s \oplus \mathbf{g}^{\sigma_{ms}^{-1}}, \mathbf{w}_{ms}\right)$, де операція $\oplus$ задає покоординатне додавання векторів за mod 2. Якщо за ваговий вектор НЕ вибрати вектор $\mathbf{w}_{ms}$, а за поріг — T_m^s, то значення вихідного сигналу НЕ буде дорівнювати 1 лише в тому випадку, коли на вхід подаються елементи із $\mathbf{b}_m^s p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)$. Отже, характеристична функція f_m^s множини $\mathbf{b}_m^s p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)$ є нейрофункцією, що реалізується одним НЕ з вектором структури $[\mathbf{w}_{ms}; T_m^s]$. При фіксованому s, коли m пробігає множину $\{1, ..., r_s\}$, за вищенаведеним методом синтезуємо всі нейронні елементи s-го блоку шару 1. Для синтезу всіх нейроелементів шару 1 необхідно, щоб змінна s пробігала множину $\{1, \ldots, t\}$. Вагові вектори $\mathbf{v}_1 = \left(v_1^1, ..., v_{r_1}^1\right), ..., \mathbf{v}_t = \left(v_1^t, ..., v_{r_t}^t\right)$ нейроелементів 2-го шару знаходимо за формулою:

$$v_m^s = \frac{\left|\mathbf{b}_m^s p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right) \cap B_s\right|}{|B_s|}, \tag{5.6}$$

де $m \in \{1, ..., r_s\}$, $s \in \{1, ...t\}$ і $|A|$ — кількість елементів множини $A \subset \mathbb{Z}_2^n$. Після знаходження векторів $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_t$ задачу синтезу розпізнавальної схеми у нейробазисі розв'язано.

Якщо екзаменаційна вибірка не задана, то рішення приймаємо за $\max F_i$ наступним чином: об'єкт відносимо до класу K'_{i^*}, якщо $F_{i^*} = \max\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} \neq 0$ — єдиний максимальний елемент множини $\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\}$, або до класів $K'_{i_1}, \ldots, K'_{i_h}$, якщо $F_{i_1} = \ldots = F_{i_h} = \max\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} \neq 0$, не порівнюючи їх з параметром η. У випадку, коли $\max\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} = 0$, рішення відносно об'єкту не приймаємо.

Якщо задано екзаменаційну вибірку, то при синтезі розпізнавальної схеми проводимо навчання відносно η шляхом варіювання його значення ($\eta \in (0, 1)$) при фіксованих індексах відповідних p-множин і знаходимо таке значення $\eta = \eta^*$, при якому мінімізується похибка на екзаменаційній вибірці. У цьому випадку рішення відносно заданого об'єкта приймаємо тільки тоді, коли $\max\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} \geq \eta^*$.

5.2. Алгоритм синтезу розпізнавальної схеми

Крок 1. Нехай $\{K_1, ..., K_t\}$ — навчальна вибірка, s = 1 і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Побудуємо множину:

$$A_s = K_s \cup \left(Z_2^n \backslash \bigcup_{i=1; i \neq s}^{t} K_i \right) \tag{5.7}$$

і знаходимо довільне p-покриття множини K_s з фіксованими індексами $j_{1s}, j_{2s}, ..., j_{r_s s}$ у множині A_s, тобто

$$P_{As}\left(K_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right) = b_1^s p\left(b_1^s A_s\right) \cup b_2^s p\left(b_2^s A_s\right) \cup \ldots \cup b_{r_s}^s p\left(b_{r_s}^s A_s\right).$$

Для кожної p-підмножини $\mathbf{b}_m^s p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)$ $(m = 1, 2, ..., r_s)$ за вищенаведеним алгоритмом знаходимо вектор структури $[\mathbf{w}_{ms}; T_m^s]$ НЕ, що реалізує характеристичну функцію f_m^s множини $\mathbf{b}_m^s p\left(\mathbf{b}_m^s A_s\right)$. Після побудови системи векторів $\left\{[\mathbf{w}_{1s}; T_1^s], ..., \left[\mathbf{w}_{r_s s}; T_{r_s}^s\right]\right\}$, яка задає вектори структур нейронних елементів 1-го шару блоку s, за формулою (5.6), замінивши B_s на K_s, знаходимо ваговий вектор НЕ 2-го шару і переходимо до кроку 3.

Крок 3. Якщо $s < t$, то $s = s + 1$ і переходимо до кроку 2, а в протилежному випадку синтез схеми завершено.

Зауваження 1. p-покриття $p_{A_s}\left(K_s; \mathbf{b}_1^s, ..., \mathbf{b}_{r_s}^s\right)$ множини K_s в A_s з фіксованими індексами $j_{1s}, ..., j_{r_s s}$ в алгоритмі визначається неоднозначно, що дає нам можливість вибрати мінімальне, максимальне або будь-яке р-покриття. Для однозначного вибору p-покриття нам необхідно задати екзаменаційну вибірку (множину n-вимірних бульових наборів, на якій проводиться тестування розпізнавальної схеми) і вибрати для неї оптимальне p-покриття, тобто таке p-покриття множини K_s в A_s з фіксованими індексами $j_{1s}, ..., j_{r_s s}$, що мінімізує похибку розпізнавальної схеми для цієї екзаменаційної вибірки при фіксованому η. Шляхом покрокової зміни $\eta \in (0,\ 1)$ знаходимо його оптимальне значення η^* і оптимальні індекси $j_{1s}^*, ..., j_{r_s s}^*$ відповідних p-підмножин.

Зауваження 2. Залежно від умов технічної реалізації нейроелементів 1-го шару, тобто від максимального значення модуля координат векторів структур нейроелементів, можна визначити індекс j_{ms} матриці толерантності в (5.5), що відповідає цьому обмеженню. За вищенаведеним алгоритмом синтезу нейроелементів 1-го шару максимальна за модулем координата m-го НЕ в s-му блоці дорівнює числу $2^{j_{ms}-1} + 1$. Отже, через індекси матриць толерантності ми задаємо обмеження на координати векторів структур.

Зауваження 3. Якщо для всіх $s \in \{1, 2, ..., t\}$ покласти $j_{1s} = 1, ..., j_{sr_s} = 1$, то побудована розпізнавальна схема без η буде звичайним класифікатором.

Синтез розпізнавальної схеми без η розглянемо на наступному прикладі. Для простоти виберемо рецепторне поле розміром 3×3 і задамо наступні навчальні вибірки двох класів бінарних зображень:

Клас 1

	*	
*	*	*
	*	

	*	
	*	*
	*	

	*	
*	*	
	*	

Клас 2

*	*	*
	*	
	*	

*	*	
	*	
	*	

	*	*
	*	
	*	

Закодуємо ці бінарні зображення бульовими векторами так: перші три координати вектора формуємо на основі першого рядка рецепторного поля, якщо клітинка містить символ "*", то відповідна координата вектора дорівнює 1, у протилежному випадку 0, наступні три координати формуємо на основі другого рядка і так далі.

Запишемо коди відповідних бінарних зображень навчальної вибірки K_1, K_2 класів K_1', K_2':

$$K_1 = \begin{cases} \mathbf{b}_1^1 = (010111010)\,, \\ \mathbf{b}_2^1 = (010011010)\,, \\ \mathbf{b}_3^1 = (010110010)\,, \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} \mathbf{b}_1^2 = (111010010)\,, \\ \mathbf{b}_2^2 = (110010010)\,, \\ \mathbf{b}_3^2 = (011010010)\,. \end{cases}$$

Знаходимо максимальне p-покриття з індексом 2 для K_1, K_2 і відносно цих покриттів синтезуємо розпізнавальну схему. Згідно з алгоритмом, при побудові p-підмножини $p\big(\mathbf{b}_1^1 A_1\big)^{\sigma_{11}}$, де $\sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, можна використовувати всі елементи Z_2^9, крім елементів множини

$\{(101101000)^{\sigma_{11}}, (100101000)^{\sigma_{11}}, (001101000)^{\sigma_{11}}\}$. Отже,

$$p\big(\mathbf{b}_1^1 A_1\big)^{\sigma_{11}} = (L_2\ 0...0) \,\square\, (L_2^*(1)\ 0...0) \,\square\, (L_3^*(1)\ 0...0) \,\square \\ \ldots \square\, (L_9^*(1)\ 0...0)\,. \tag{5.8}$$

У вигляді матриці p-множина $p\big(\mathbf{b}_1^1 A_1\big)^{\sigma_{11}}$ запишеться так:

$$p\big(\mathbf{b}_1^1 A_1\big)^{\sigma_{11}} = \begin{pmatrix} 000000000 \\ 100000000 \\ 010000000 \\ 001000000 \\ 000100000 \\ 000010000 \\ 000001000 \\ 000000100 \\ 000000010 \\ 000000001 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, максимальне p-покриття навчальної вибірки K_1 класу K_1' в A_1 містить тільки одну підмножину, тобто $P_{A_1}\left(K_1; \mathbf{b}_1^1\right) = \mathbf{b}_1^1 p\left(\mathbf{b}_1^1 A_1\right)$. За розкладом (5.8) побудуємо вектор $\mathbf{u}_{11} = \left(u_1^{11}, u_2^{11}, ..., u_9^{11}\right)$:

$$u_1^{11} = -1,\ \ u_2^{11} = u_1^{11} - 1 = -2,\ \ u_3^{11} = u_2^{11} + (1-1) = -2, ..., u_9^{11} = \\ = u_8^{11} + (1-1) = -2.$$

Після цього визначимо вектор:

$$\mathbf{w}_{11} = \mathbf{b}_1^1\left(\mathbf{u}_{11}^{\sigma_{11}^{-1}}\right) = \mathbf{b}_1^1(-2,-2,-2,-1,-2,-2,-2,-2) = (-2,2, \\ -2,1,2,2,-2,2,-2)$$

і число $T_1^1 = \left(\left(\mathbf{b}_1^1 \oplus \mathbf{g}^{\sigma_{11}^{-1}}\right), \mathbf{w}_{11}\right) = ((0,1,0,1,1,1,0,1,1)\,, \mathbf{w}_{11}) = 7$, де $\mathbf{g}$ — останній рядок матриці $p\big(\mathbf{b}_1^1 A_1\big)^{\sigma_{11}}$. Отже, ми побудували НЕ першого блоку шару 1, що має вектор структури $[(-2,2,-2,1,2,2,-2,2,-2);7]$.

Аналогічно побудуємо вектор структури НЕ другого блоку шару 1. Знаходимо матрицю $p\big(\mathbf{b}_1^2 A_2\big)^{\sigma_{12}}$, $\left(\sigma_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 1&3&2&4&5&6&7&8&9 \end{smallmatrix}\right)\right)$:

$$p\left(\mathbf{b}_1^2 A_2\right)^{\sigma_{12}} = \begin{pmatrix} 000000000 \\ 100000000 \\ 010000000 \\ 001000000 \\ 000100000 \\ 000010000 \\ 000001000 \\ 000000100 \\ 000000010 \\ 000000001 \end{pmatrix}$$

при побудові якої не можна використовувати елементи $(101101000)^{\sigma_{12}}$, $(101001000)^{\sigma_{12}}$, $(101100000)^{\sigma_{12}}$ множини Z_2^9. У цьому випадку максимальне p-покриття навчальної вибірки K_2 класу K_2' в A_2 з індексом 2 співпадає з $\mathbf{b}_1^2 p\left(\mathbf{b}_1^2 A_2\right)$, тобто

$$P_{A_2}\left(K_2; \mathbf{b}_1^2\right) = \mathbf{b}_1^2 p\left(\mathbf{b}_1^2 A_2\right).$$

Згідно з вищенаведеним алгоритмом $\mathbf{u}_{12} = (-1, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2)$, $\mathbf{w}_{12} = \mathbf{b}_1^2\left(\mathbf{u}_{12}^{\sigma_{12}^{-1}}\right) = (1, 2, 2, -2, 2, -2, -2, 2, -2)$, $T_1^2 = \left(\left(\mathbf{b}_1^2 \oplus \mathbf{g}^{\sigma_{12}^{-1}}\right), \mathbf{w}_{12}\right) = 7$. Отже, НЕ другого блоку шару 1 має вектор структури $\left[\mathbf{w}_{12}, T_1^2\right]$. У формулу (5.6) замість B_s підставляємо K_s і знаходимо $v_1^1 = 1$, $v_1^2 = 1$. Після знаходження величин v_1^1, v_1^2 синтез розпізнавальної схеми завершено, і вона має структуру, зображену на рис. 5.2. НЕ 1-го шару

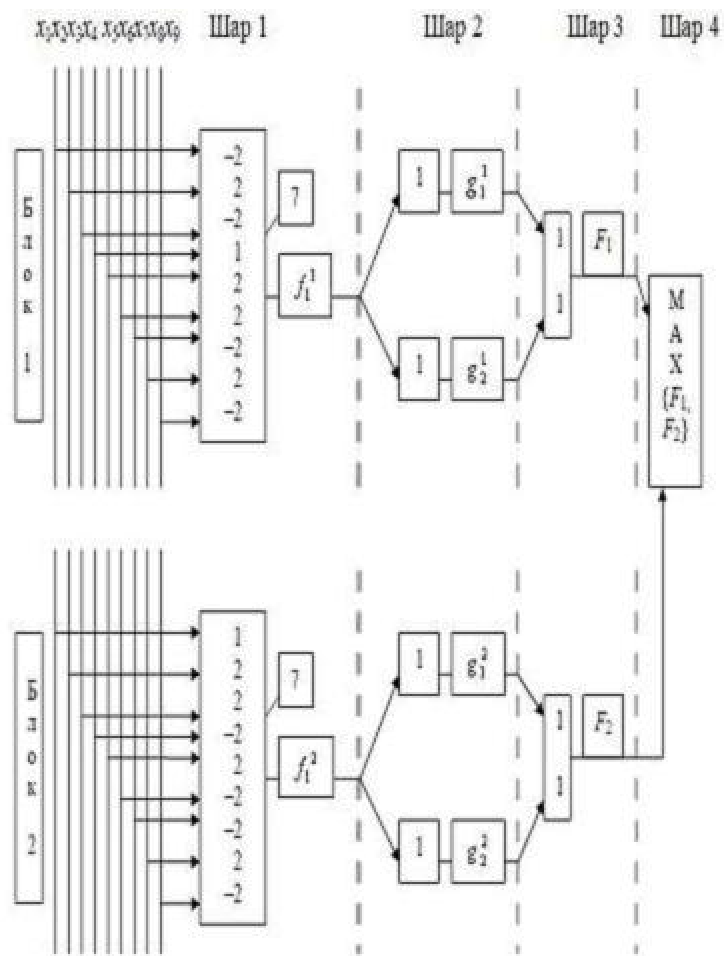

Рис. 5.2. Розпізнавальна схема для зображень

блоку 1 активізується тільки в тому випадку, коли на вхід подаємо елементи множини:

$$P_{A_1}\left(K_1;\mathbf{b}_1^1\right)=\mathbf{b}_1^1 p\left(\mathbf{b}_1^1 A_1\right)=\{(010111010),(010011010),\\ (010101010),(110111010)\,(000111010),(011111010),\\ (010110010),(010111110),(010111000),(010111011)\},$$

а НЕ 1-го шару блока 2 не активізується при жодному з цих елементів.

Це означає, що розпізнавальна схема відносить до класу K_1' наступні зображення:

	*	
*	*	*
	*	

	*	
	*	*
	*	

	*	
*		*
	*	

*	*	
*	*	*
	*	

*	*	*
	*	

	*	*
*	*	*
	*	

	*	
*	*	
	*	

	*	
*	*	*
*	*	

	*	
*	*	*

	*	
*	*	*
	*	*

За розпізнавальною схемою до класу K_2' відносяться зображення:

*	*	*
	*	
	*	

	*	*
	*	
	*	

*	*	
	*	
	*	

*		*
	*	
	*	

*	*	*
*	*	
	*	

*	*	*
	*	

*	*	*
	*	*
	*	

*	*	*
	*	
*	*	

*	*	*
	*	

*	*	*
	*	
	*	*

які відповідають елементам множини

$$P_{A_2}\left(K_2;\mathbf{b}_1^2\right)=\mathbf{b}_1^2 p\left(\mathbf{b}_1^2 A_2\right)=\{(111010010),(011010010)\,,\\ (110010010)\,,(101010010)\,,(111110010)\,,(111000010)\,,\\ (111011010)\,,(111010110)\,,(111010000)\,,(111010011)\}\,.$$

Відносно інших бінарних зображень розпізнавальна схема рішення не приймає, тому що $F_1=0$ і $F_2=0$.

Якщо реалізувати синтез розпізнавальної схеми (рис 5.2) для вищенаведених класів бінарних зображень відносно мінімальних p-покриттів з індексом 2, то

$$p\left(\mathbf{b}_1^1 A_1\right)^{\sigma_{11}}=p\left(\mathbf{b}_1^2 A_2\right)^{\sigma_{12}}=\begin{pmatrix}000000000\\100000000\\010000000\end{pmatrix}$$

і $P_{A_1}\left(K_1;\mathbf{b}_1^1\right)=K_1,\ P_{A_2}\left(K_2;\mathbf{b}_1^2\right)=K_2$. Нейроелементи відповідних блоків шару 1 будуть мати наступні структури: (Блок 1): $[(-3,3,-3,1,3,2,-3,3-3);10]$, (Блок 2): $[(1,3,2,-3,3,-3,-3,3-3);10]$, і розпізнавальна схема буде звичайним класифікатором.

Зауваження. Якщо ймовірності появи елементів, які належать до класів $K_1',...,K_t'$ не співпадають, то вводиться p_i — ймовірність належності елементів до класу K_i' і розпізнавальна схема (рис. 5.1) модифікується наступним чином: у четвертому шарі $\max\{F_i\}$ замінюється на $\max\{p_iF_i\}$, $i=1,...,t$.

5.3. Представлення двовимірних бінарних зображень у нейробазисі

Нехай рецепторне поле розміром $2^r \times 2^s$ містить нормалізоване [64] бінарне зображення A' і $n = r + s$. За певним законом φ кожному рецептору однозначно ставимо у відповідність n-вимірний бульовий вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і через A позначимо множину всіх таких бульових векторів, які відповідають рецепторам, зайнятих зображенням A', тобто $\varphi(A') = A \subset Z_2^n$. Нехай p — пороговий оператор і точки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A$ такі, що

$$a_i p(\mathbf{a}_i A) \not\subset \bigcup_{j=1, j\neq i}^{t} \mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A),$$

і

$$P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) = \bigcup_{j=1}^{t} \mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A). \tag{5.9}$$

Точки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A$, для яких має місце (5.9), називаються точками розкладу двовимірного бінарного зображення A' у нейробазисі. Якщо точки розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A$ бінарного зображення A' такі, що $P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) = A$, то ці точки утворюють повну систему точок розкладу цього зображення у нейробазисі. Згідно з алгоритмом попереднього параграфа, за кожною множиною $\mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A)$ однозначно будується $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w}_j = \left(\omega_1^j, ..., \omega_n^j; \omega_0^j = T_j\right)$ такий, що

$$\forall \mathbf{a} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A) \quad \mathrm{w}_j(\mathbf{a}) = \omega_1^j \alpha_1 + ... + \omega_n^j \alpha_n - \omega_0^j \geq 0$$

і

$$\forall \mathbf{b} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in Z_2^n \backslash \mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A) \quad \mathrm{w}_j(\mathbf{b}) < 0.$$

Алгоритм, що реалізує відображення $\mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A) \to \mathbf{w}_j$, позначимо через F $(F(\mathbf{a}_j p(\mathbf{a}_j A)) = \mathbf{w}_j)$ і розповсюдимо його на множину $P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., a_t)$ наступним чином:

$$F : P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) \to (F(\mathbf{a}_1 p(\mathbf{a}_1 A)), ..., F(\mathbf{a}_t p(\mathbf{a}_t A)))$$

або

$$F : P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) \to (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_t). \tag{5.10}$$

Під представленням двовимірного бінарного зображення A' у нейробазисі відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A$ розуміємо відображення (5.10). Якщо точки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t$ утворюють повну систему точок розкладу, то представлення зображення A' у нейробазисі будемо називати точним.

Теорема 5.1. *Нормалізовані двовимірні бінарні зображення A_1' і A_2' ідентичні тоді і тільки тоді, якщо існують такі точки розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$, відносно яких співпадають точні представлення цих зображень у нейробазисі.*

Доведення. *Необхідність.* Дано, що нормалізовані двовимірні бінарні зображення A_1' і A_2' ідентичні. Це означає, що $A_1 = A_2$ і

$$\forall \mathbf{a}_i \in A_1 \cap A_2 \quad P_{A_1}(A_1, \mathbf{a}_i) = P_{A_2}(A_2, \mathbf{a}_i)\,. \tag{5.11}$$

Отже, у цих зображень співпадають повні системи точок розкладу. Нехай система векторів $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t\}$ утворює одну із повних систем точок розкладу зображень A_1' і A_2', тобто

$$P_{A_1}(A_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) = P_{A_2}(A_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t)\,. \tag{5.12}$$

Відображення F, згідно з алгоритмом, на основі (5.11) множинам $P_{A_1}(A_1, \mathbf{a}_i)\,,\ \ P_{A_2}(A_2, \mathbf{a}_i)$ ставить у відповідність один і той самий вектор $\mathbf{w}_i$. Враховуючи (5.12), маємо:

$$\forall j \in \{1, 2\} \quad F : P_{A_j}(A_j, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) \to (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_t)$$

і необхідність доведено.

Достатність. Дано, що $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_t)$ є точним представленням двовимірних бінарних зображень A_1' і A_2' відносно повної системи точок розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t$. Отже,

$$\begin{gathered}\forall i \in \{1, 2, ..., t\} \quad P_{A_1}(A_1, \mathbf{a}_i) = P_{A_2}(A_2, \mathbf{a}_i) = \\ = \{\mathbf{a} \in Z_2^n | \mathrm{w}_i(\mathbf{a}) \geq 0\} \Rightarrow P_{A_1}(A_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) = \\ = P_{A_2}(A_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) \Rightarrow A_1 = A_2\end{gathered}$$

і теорему доведено.

Нехай $A \subset Z_2^n,\ \ \mathbf{a}_i \in A$ і p — пороговий оператор з міткою σ_i та індексом j_i. Тоді

$$p(\mathbf{a}_i A)_{\xi_i}^{\sigma_i} = (L_{j_i} 0 \ldots 0) \,\square\, \left(\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_i} \left(L_{j_i+r}^*(q_r)\ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r)} \right) \right).$$

Розглянемо відображення $F_k : p(\mathbf{a}_i A) \to (\mathbf{a}_i \mathbf{w}_i)^{\sigma_i}$ де $\mathbf{w}_i = F(\mathbf{a}_i p(\mathbf{a}_i A))$ і розширимо його на $P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t)$ так:

$$F_k : P_A(A, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t) \to \left(\mathbf{w}_1^k = (\mathbf{a}_1 \mathbf{w}_1)^{\sigma_1}, ... \right.\\ \left. \ldots, \mathbf{w}_t^k = (\mathbf{a}_t \mathbf{w}_t)^{\sigma_t}\right). \tag{5.13}$$

Відображення (5.13) назвемо канонічним представленням двовимірного зображення A' у нейробазисі відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t$. Якщо точки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t$ задають повну систему точок розкладу для A', то $\left(\mathbf{w}_1^k, ..., \mathbf{w}_t^k\right)$ є точним канонічним представленням A' у нейробазисі.

Перетворення $\mathbf{w}_i \to \mathbf{a}_i \left(\left(\mathbf{w}_i^k\right)^{\sigma_i^{-1}}\right)$ реалізує однозначний перехід від канонічного представлення бінарного зображення A' до звичайного, тому має місце наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нормалізовані двовимірні бінарні зображення A_1' і A_2' ідентичні тоді і тільки тоді, якщо існують такі точки розкладу $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$, відносно яких співпадають точні канонічні представлення цих зображень у нейробазисі.*

Нехай $A \subset Z_2^n$. Розглянемо відображення $F_k : P_A(A, \mathbf{a}_i) \to \to \mathbf{w}_i^k = \left(\omega_1^{ik}, \ldots, \omega_{j_i}^{ik}, \omega_{j_i+1}^{ik}, \ldots, \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}\right)$. Вектору $\mathbf{w}_i^k$ однозначно ставимо у відповідність $n - j_i + 1$-вимірний вектор $\mathbf{v}_i = \left(v_1^i, \ldots, v_{n-j_i+1}^i\right)$ наступним чином:

1) якщо $j_i \neq 0$, то $v_r^i = \omega_{j_i+r-1}^{ik} - \omega_0^{ik}$, $r = 1, 2, ..., n - j_i + 1$;
2) якщо $j_i = 0$, то $\mathbf{v}_i = (-1, -1, ..., -1)$ — $n+1$-вимірний вектор.

Зауваження. Індекс порогового оператора j_i дорівнює 0 тільки в тому випадку, коли $\mathbf{a}_i \notin A$.

Вектор $\mathbf{v}_i$ назвемо інформаційним вектором p-множини $p(\mathbf{a}_i A)$ з міткою σ_i і через $\lambda(\mathbf{v}_i)$ позначимо його розмірність.

Нехай A_1' і A_2' — двовимірні бінарні зображення рецепторного поля $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$, $p(\mathbf{a}A_1)$, $p(\mathbf{a}A_2)$ p-множини відповідних множин A_1, A_2 відносно точки $\mathbf{a}$ з мітками σ_1, σ_2 та індексами j_1, j_2 і $\mathbf{v}_1 = \left(v_1^1, ..., v_{n-j_1+1}^1\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(v_1^2, ..., v_{n-j_2+1}^2\right)$ — відповідні їм інформаційні вектори. Будемо вважати, що інформаційний вектор $\mathbf{v}_1$ p-множини $p(\mathbf{a}A_1)$ передує інформаційному вектору $\mathbf{v}_2$ p-множини $p(\mathbf{a}A_2)$ $(\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2)$, якщо:

1) $\lambda(\mathbf{v}_1) \geq \lambda(\mathbf{v}_2)$,

2) $v^1_{m+i} \le v^2_i, \; i = 1, 2, ..., \lambda(\mathbf{v}_2)$, де $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$.

Теорема 5.3. *Якщо мітки* σ_1, σ_2 *відповідних* p*-множин* $H_1 = p(\mathbf{a}A_1)$, $H_2 = p(\mathbf{a}A_2)$ *співпадають, то* $(\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2) \Rightarrow H_1 \subset \subset H_2$.

Доведення. За означенням p-множини H_i:

$$(H_i)^{\sigma_i}_{\xi_i} = (L_{j_i}0\ldots0) \,\square \left(\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_i} \left(L^*_{j_i+r} \left(q^i_r \right) \underbrace{0\ldots0}_{n-(j_i+r)} \right) \right), \tag{5.14}$$

$i = 1, 2$. Кількість рядків q^i_r передматриці толерантності $\left(L^*_{j_i+r} \left(q^i_r \right) \underbrace{0\ldots0}_{n-(j_i+r)} \right)$ виражається через координату v^i_{r+1} інформаційного вектора $\mathbf{v}_i$ p-множини H_i рівністю $q^i_r = v^i_r + 1$. Отже, $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \Rightarrow v^1_{m+r} \le v^2_r \Rightarrow q^1_{m+r} \le q^2_r \Rightarrow \left(L^*_{j_2+r} \left(q^2_r \right) 0...0 \right)$ містить матрицю $\left(L^*_{j_1+m+r} \left(q^1_r \right) 0...0 \right)$, де $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$. Враховуючи рівність міток $\sigma_1 = \sigma_2$, властивість матриць та передматриць толерантності $\forall r \in \{1, 2, ..., m\}$ $\left(L^*_{j_2-r}\, 0...0 \right)$ містить $\left(L^*_{j_1+m-r}\, (q_{m-r})\, 0...0 \right)$. Тоді на основі (5.14) робимо висновок, що $H_1 \subseteq H_2$. Теорему доведено.

На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ задамо функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$ наступним чином:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

і на парі інформаційних векторів $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ відповідних p-множин $H_1 = p(\mathbf{a}A_1)$, $H_2 = p(\mathbf{a}A_2)$ визначимо функціонали μ, ν: нехай $\lambda(\mathbf{v}_1) \ge \lambda(\mathbf{v}_2)$ і $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$, тоді

$$\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} \left| g\left(v^1_{m+t} \right) \left(v^1_{m+t} + 1 \right) - g\left(v^2_t \right) \left(v^2_t + 1 \right) \right| +$$

$$+ \sum_{t=1}^{m} \left(2^{n-\lambda(\mathbf{v}_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1 \right),$$

$$\nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = h\left(n - \lambda(\mathbf{v}_1) + 1\right) 2^{n-\lambda(\mathbf{v}_1)} +$$

$$+\sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}\left(\min\left\{v^1_{m+t},v^2_t\right\}+1\right)+\sum_{t=1}^{m}\left(v^1_{m-t+1}+1\right),$$

де $|c|$ — модуль дійсного числа c, $\sum\limits_{t=1}^{0}(...)=0$.

Теорема 5.4. *Якщо p-множини $H_1 = p(\mathbf{a}A_1)$, $H_2 = p(\mathbf{a}A_2)$ з відповідними інформаційними векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ мають однакові мітки $\sigma_1=\sigma_2$, то функціонал*

$$\mu^*(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=\frac{\nu(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)+\nu(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}$$

задовольняє умову $|H_1\cap H_2|=|H_1\cup H_2|\,\mu^*(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$.

Доведення. Нехай $\lambda(\mathbf{v}_1)\geq\lambda(\mathbf{v}_2)$ і $m=\lambda(\mathbf{v}_1)-\lambda(\mathbf{v}_2)$. З побудови p-множин H_i $(i=1,2)$ випливає:

$$(H_1)^{\sigma_1}_{\xi_1}=(L_{j_1}0\dots0)\square\left(L^*_{j_1}\left(q^1_0\right)0\dots0\right)\square\dots\square \tag{5.15}$$

$$\square\left(L^*_{j_1+m-1}\left(q^1_{m-1}\right)0\dots0\right)\square\left(\mathop{\square}_{r=m}^{n-j_1}\left(L^*_{j_1+r}\left(q^1_{j_1+r}\right)\,0\dots0\right)\right)$$

$$\begin{gathered}(H_2)^{\sigma_2}_{\xi_2}=(L_{j_1}0\dots0)\square\left(L^*_{j_1}0\dots0\right)\square\dots\square\\ \square\left(L^*_{j_2-1}\left(q^1_{m-1}\right)0\dots0\right)\square\left(\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_2}\left(L^*_{j_2+r}\left(q^2_r\right)\,0...0\right)\right).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Позначимо через $m\big(L_j\underbrace{0...0}_{n-j}\big)$ множину всіх рядків матриці толерантності $(L_j\,0...0)$. Тоді з того, що $\forall t\in\{0,1,2,\dots$ $\dots,n-j_2\}$ $q^1_{m+t}\leq q^2_t$ або $q^1_{m+t}>q^2_t$ і $q^i_t=v^i_{t+1}+1$ $(i=1,2)$ маємо:

$$\begin{gathered}\left|g\left(v^1_{m+t+1}\right)\left(v^1_{m+t+1}+1\right)-g\left(v^2_{t+1}\right)\left(v^2_{t+1}+1\right)\right|=\\ =\left|m\left(L^*_{j_2+t}\left(q^2_t\right)0...0\right)\backslash m\left(L^*_{j_1+m+t}\left(q^1_{m+t}\right)0...0\right)\right|\end{gathered}$$

або

$$\begin{gathered}\left|g\left(v^1_{m+t+1}\right)\left(v^1_{m+t+1}+1\right)-g\left(v^2_{t+1}\right)\left(v^2_{t+1}+1\right)\right|=\\ =\left|m\left(L^*_{j_1+m+t}\left(q^1_{m+t}\right)0...0\right)\backslash m\left(L^*_{j_2+t}\left(q^2_t\right)0\dots0\right)\right|.\end{gathered}$$

Отже,

$$\begin{gathered}\left|g\left(v^1_{m+t+1}\right)\left(v^1_{m+t+1}+1\right)-g\left(v^2_{t+1}\right)\left(v^2_{t+1}+1\right)\right|=\\ =\left|m\left(L^*_{j_1+m+t}\left(q^1_{m+t}\right)0...0\right)\Delta m\left(L^*_{j_2+t}\left(q^2_t\right)0...0\right)\right|,\end{gathered} \tag{5.17}$$

де Δ — симетрична різниця множин. З розкладу (5.15) випливає, що $q_s^1 < 2^{j_1+s-1}$ $(s = 0, 1, \ldots, m-1)$, тобто $\forall s \in \{0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1\}$

$$m\left(L^*_{j_1+s}\left(q_s^1\right)\ 0...0\right) \subset m\left(L^*_{j_1+s}\,0...0\right)$$

і

$$\begin{gathered}\left|m\left(L^*_{j_1+s}\left(q_s^1\right)\ 0...0\right)\Delta\, m\left(L^*_{j_1+s}\,0...0\right)\right| = \\ = 2^{j_1+s-1} - \left(v^1_{s+1}+1\right).\end{gathered} \tag{5.18}$$

На основі (5.15)-(5.18) і $\sigma_1 = \sigma_2$ можна стверджувати:

$$\begin{gathered}|H_1 \Delta H_2| = \sum_{t=1}^{m}\left(2^{n-\lambda(\mathbf{v}_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1\right) + \\ + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}\left|g\left(v^1_{m+t}\right)\left(v^1_{m+t}+1\right) - g\left(v^2_t\right)\left(v^2_t+1\right)\right| = \\ = \mu\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right).\end{gathered} \tag{5.19}$$

Передматриці толерантності $\left(L^*_r\left(q_r\right)\underbrace{0...0}_{n-r}\right)$, $\left(L^*_s\left(q_s\right)\underbrace{0...0}_{n-s}\right)$ задовольняють умову

$$r \neq s \Rightarrow m\left(L^*_r\left(q_r\right)\ 0...0\right) \cap m\left(L^*_s\left(q_s\right)\ 0...0\right) = \varnothing.$$

Тоді, враховуючи рівність $\sigma_1 = \sigma_2$, в силу (5.15) і (5.16) маємо:

$$\begin{gathered}|H_1 \cap H_2| = \left|m\left(L_{j_1}0...0\right)\right| + \sum_{t=1}^{m}\left|m\left(L^*_{j_1+m-t}\left(q^1_{m-t}\right)\right)\ 0...0\right| + \\ + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}\left|m\left(L^*_{j_1+m+t-1}\left(q^1_{m+t-1}\right)\ 0\ldots0\right)\cap\right. \\ \left.\cap\, m\left(L^*_{j_2+t-1}\left(q^2_{t-1}\right)\ 0\ldots0\right)\right| = h\left(j_1\right)2^{j_1-1} + \sum_{t=1}^{m}\left(v^1_{m-t+1}+1\right) + \\ + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}\left(\min\left\{v^1_{m+t}, v^2_t\right\}+1\right) = \nu\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right).\end{gathered} \tag{5.20}$$

З рівностей (5.19), (5.20) безпосередньо випливає:

$$\begin{gathered}|H_1 \cap H_2| = |H_1 \cup H_2| \cdot \frac{|H_1 \cap H_2|}{|H_1 \cup H_2|} = \\ = |H_1 \cup H_2| \cdot \frac{|H_1 \cap H_2|}{|H_1 \Delta H_2| + |H_1 \cap H_2|} = |H_1 \cup H_2|\,\mu^*\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right).\end{gathered}$$

Отже, теорему доведено.

Визначимо функціонал μ_* на парі $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ інформаційних векторів p-множин H_1, H_2 з відповідними мітками σ_1, σ_2 наступним чином:

$$\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}.$$

Неважко переконатися, що функціонали μ_*, μ^* мають наступні властивості:

1) на будь-якій парі інформаційних векторів $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ p-множин H_1, H_2 $\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in [0;\ 1]$;

2) $\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \ \mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$;

3) якщо $\sigma_1 = \sigma_2$ і $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$, то $H_1 = H_2$;

4) якщо $\sigma_1 = \sigma_2$ і $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, то $H_1 \cap H_2 = \varnothing$.

Базуючись на властивостях 3, 4, функціонал μ^* природно називати мірою "подібності"; а μ_* — мірою "відмінності" p-множин H_i (p-фрагментів $H'_i = \varphi(H_i)$).

Слід відзначити, що представлення p-фрагментів двовимірних бінарних зображень у просторі інформаційних векторів є ефективним з точки зору компресії інформації. Дійсно, якщо H' — p-фрагмент двовимірного бінарного зображення A' рецепторного поля $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$ відносно точки $\mathbf{a} \in Z_2^n$ і t — таке найменше невід'ємне ціле число, що

$$H_\xi^\sigma = (L_j 0 \ldots 0) \square \left(\mathop{\square}_{r=0}^{t} \left(L_{j+r}^* (q_r)\ 0...0 \right) \right),$$

то з нерівностей $2^{j-1} > q_0 \geq q_1 \geq ... \geq q_t$ та з побудови інформаційного вектора $\mathbf{v}_H$ випливає, що коефіцієнт компресії $\varkappa_H$ p-фрагмента H' (у бітах) задовольняє умови:

1) якщо $\mathbf{a} \in A$ $(A = \varphi(A'))$, то $\varkappa_H \geq 2^n / (j(t+1) + 2(n - j - t))$;

2) якщо $\mathbf{a} \notin A$, то $\varkappa_H = 2^{n-1} / (n+1)$.

5.4. Представлення та розпізнавання двовимірних бінарних зображень у просторі інформаційних векторів

Нехай A' — довільне нормалізоване двовимірне бінарне зображення рецепторного поля $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$ і $A = \varphi(A') \subset Z_2^n$,
де φ — закон, за яким кожному рецептору, зайнятому зображенням A', однозначно ставиться у відповідність відповідний n-вимірний бульовий вектор. Множину A за допомогою порогового оператора p можна однозначно розкласти на p-підмножини $H_i = \mathbf{a}_i p(\mathbf{a}_i A)$ відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t$ із відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$. Це означає, що зображення A' відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t$ та міток $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$ однозначно можна задати упорядкованою послідовністю p-фрагментів $H'_i = \varphi^{-1}(H_i)$, тобто:

$$A' \to (H'_1, H'_2, ..., H'_t)\,.$$

Згідно з алгоритмом F_k кожній p-множині H_i однозначно ставиться у відповідність $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w}_i^k = \left(\omega_1^{ik}, \omega_2^{ik}, ..., \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}\right)$, за яким формується інформаційний вектор $\mathbf{v}_i$ p-фрагмента H'_i. Отже, бінарне зображення A' однозначно можна задати впорядкованою послідовністю інформаційних векторів $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t)$ і далі відображення

$$\Delta : A' \to (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t) \tag{5.20}$$

будемо називати представленням бінарного зображення A' у просторі інформаційних векторів відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t$ із відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$.

Фрагменти H'_i бінарного зображення A' можна розглядати як його характерні ознаки, за якими можна відрізнити A' від інших бінарних зображень.

Нехай A'_1, A'_2 — нормалізовані двовимірні зображення і

$$\Delta : A'_1 \to \Delta(A'_1) = \left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, ..., \mathbf{v}_t^1\right),$$

$$\Delta : A'_2 \to \Delta(A'_2) = \left(\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, ..., \mathbf{v}_t^2\right)$$

— їх представлення у просторі інформаційних векторів відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$ з відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$.

Будемо вважати, що представлення двох двовимірних бінарних зображень A'_1, A'_2 у просторі інформаційних векторів відносно заданих точок і міток співпадають, якщо $\mathbf{v}_i^1 = \mathbf{v}_i^2$, $i =$
$= 1, 2, \ldots, t$.

Друге означення ідентичності двох двовимірних бінарних зображень A_1', A_2' у просторі інформаційних векторів відносно заданих точок і міток може бути таким:

$$\Delta\left(A_1'\right) = \Delta\left(A_2'\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu^*\left(\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2\right) = 1, \ \ i = 1, 2, ..., t.$$

Очевидно, що ці означення є еквівалентними.

У просторі інформаційних векторів двовимірних бінарних зображень визначимо операцію $\prec$ так:

$$\Delta\left(A_1'\right) \prec \Delta\left(A_2'\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\mathbf{v}_1^1 \prec \mathbf{v}_1^2\right) \ \& \ \left(\mathbf{v}_2^1 \prec \mathbf{v}_2^2\right) \ \& \ ... \ \& \ \left(\mathbf{v}_t^1 \prec \mathbf{v}_t^2\right).$$

З теореми 5.3 безпосередньо випливає:

Теорема 5.5. *Якщо точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$ утворюють повну систему точок розкладу для двовимірного бінарного зображення A_1' з відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$, то*

$$\Delta\left(A'_1\right) \prec \Delta\left(A'_2\right) \Rightarrow A_1' \text{ є фрагментом } A_2'.$$

Теорема 5.6. *Якщо точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$ утворюють повну систему точок розкладу для двовимірного бінарного зображення A_1' з відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$ і $\Delta\left(A_1'\right) = \Delta\left(A_2'\right)$, то:*

1) $A_1' = A_2'$, *якщо точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_t$ утворюють повну систему точок розкладу для двовимірного бінарного зображення A_2';*

2) A_1' *є фрагментом для A_2', якщо точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_t$ не утворюють повну систему точок розкладу для двовимірного бінарного зображення A_2'.*

5.4.1. Алгоритм розпізнавання двовимірних бінарних зображень на основі властивостей функціоналу μ^*

Використовуючи властивості функціоналу μ^*, можна побудувати наступний алгоритм розпізнавання двовимірних зображень. Нехай $A'_1 \ldots, A'_r$ — різні нормалізовані двовимірні еталонні бінарні зображення і $A_i = \varphi\left(A'_i\right)$. За теоремою 5.6 можна вказати такі точки розкладу $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s$ для зображень $A'_1 \ldots, A'_r$, що $\Delta\left(A'_i\right) \neq \Delta\left(A'_j\right)$, якщо $i \neq j$. Кількість точок розкладу s є параметром алгоритму і, як правило, вибирається так, щоб точність представлення будь-якого зображення A'_j $(j \in \{1, 2, ..., r\})$ у просторі інформаційних векторів задовольняла нерівність

$$\frac{\left|P_{A_j}\left(A_j; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\right)\right|}{|A_j|} \geq \delta,$$

де $\delta \in (0,\, 1]$ задає точність представлення зображення A_j у просторі інформаційних векторів.

Нехай точки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s$ такі, що задовольняють вищенаведені умови. Тоді алгоритм розпізнавання двовимірних бінарних зображень можна записати так:

Крок 1. Нормалізуємо задане двовимірне бінарне зображення B', відносно якого приймаємо рішення про його належність до одного з класів зображень, визначених еталонними зображеннями $A'_1, \ldots, A'_r$ і переходимо до кроку 2.

Крок 2. Відносно заданих точок $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s$ з відповідними мітками $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s$ знаходимо $\Delta\left(A'_j\right) = \left(\mathbf{v}_1^j, \mathbf{v}_2^j, ..., \mathbf{v}_s^j\right)$ для кожного $j \in \{1, 2, ..., r\}$; $\Delta\left(B'\right) = \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_s\right)$ і переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Побудуємо матрицю $G = (g_{ji})$, де $g_{ji} = \mu^*\left(\mathbf{v}_i^j, u_i\right)$ $(i = 1, ..., s;\ j = 1, ..., r)$ і визначимо підмножини $J_1, J_2, ..., J_s \subset$ $\subset J = \{1, 2, ..., r\}$ наступним чином:

$$J_i = \{j \in J | g_{ji} = \max\{g_{ti} | t \in J\}\},\ i = 1, 2, ..., s.$$

Після цього формуємо матрицю $G^* = \left(g^*_{ji}\right)$, де $g^*_{ji} = 1$, якщо $j \in J_i$ і $g^*_{ji} = 0$, якщо $j \notin J_i$. За кожним рядком $j \in \{1, 2, ..., r\}$ матриці G^* знаходимо величину $g_j = \sum\limits_{i=1}^{s} g^*_{ji}$. Якщо $g_{j_0} = \max\{g_j | j \in J\}$ — єдиний максимальний елемент множини $\{g_j | j \in J\}$ $(g_{\max} = g_{j_0})$, то задане зображення

B' відносимо до класу, що задається еталонним зображенням A'_{j_0}, а в протилежному випадку знаходимо $J^* = \{j \in J | g_j = g_{\max}\}$ і обчислюємо:

$$g_j^* = \sum_{i=1}^{s} g_{ji} g_{ji}^*, \quad j \in J^*.$$

Якщо $g^*_{\max} = \max \left\{ g_j^* | j \in J^* \right\}$ — єдиний максимальний елемент цієї множини і $g^*_{\max} = g_{j_0^*}$, то зображення B' відносимо до класу, що задається еталонним зображенням $A'_{j_0^*}$, а в протилежному випадку має місце одна з наступних альтернатив: відносно зображення B' рішення не приймаємо і алгоритм вважається закінченим, або збільшуємо кількість точок розкладу на одну точку $\mathbf{a}_{s+1}$, таким чином збільшуємо точність представлення еталонних зображень $A'_1, \ldots, A'_r$ у просторі інформаційних векторів, робимо присвоєння $s = s + 1$ і переходимо до кроку 2.

Зауваження 1. Якщо еталонні зображення $A'_1, \ldots, A'_r$ з'являються з відповідними ймовірностями $p_1, ..., p_r$, то крок 3 алгоритму можна модифікувати наступним чином: після того, як знайдено $g^*_{\max}$, і цей елемент не єдиний максимальний елемент множини $\left\{ g_j^* | j \in J^* \right\}$, обчислимо $g^* = \max \left\{ p_j g^*_{\max} | j \in \{1, 2, ..., r\} \right\}$ і рішення про належність зображення B' до одного з класів приймаємо відносно g^* аналогічно до того, як це робиться в алгоритмі відносно $g^*_{\max}$.

Зауваження 2. При побудові матриці $G^* = \left(g_{ji}^* \right)$ можна враховувати міру "подібності" ε $(\varepsilon \in (0,\, 1])$ p-фрагментів зображень наступним чином: $g_{ji}^* = 1$, якщо $g_{ji} \geq \varepsilon$; $g_{ji}^* = 0$, якщо $g_{ji} < \varepsilon$. Якщо задана екзаменаційна вибірка, то шляхом варіювання значень ε (проводиться навчання алгоритму відносно ε) знаходимо таке значення ε^*, при якому мінімізується похибка на екзаменаційній вибірці, і при знаходженні елементів g_{ji}^* матриці G^* за ε вибираємо ε^*.

Розглянемо алгоритм розпізнавання двовимірних бінарних зображень на наступному прикладі без їх нормалізації.

Нехай A'_1, A'_2 — еталонні двовимірні бінарні зображення:

		0	1	0	1
		0	0	1	1
0	0	*	*	*	
0	1	*			
1	0	*			
1	1	*			

		0	1	0	1
		0	0	1	1
0	0	*	*	*	
0	1	*		*	
1	0	*	*	*	
1	1	*			

Рис. 5.3. Зображення A_1' Рис. 5.4. Зображення A_2'

і

$A_1 = \{\mathbf{a}_1^1 = (0,0,0,0)\,,\ \mathbf{a}_2^1 = (0,1,0,0)\,,\ \mathbf{a}_3^1 = (1,0,0,0)\,,$
$\mathbf{a}_4^1 = (1,1,0,0)\,, \mathbf{a}_5^1 = (0,0,0,1)\,, \mathbf{a}_6^1 = (0,0,1,0)\}\,,$
$A_2 = \{\mathbf{a}_1^2 = (0,0,0,0)\,,\ \mathbf{a}_2^2 = (0,1,0,0)\,,\ \mathbf{a}_3^2 = (1,0,0,0)$ Точка
$\mathbf{a}_4^2 = (1,1,0,0)\,, \mathbf{a}_5^2 = (0,0,0,1)\,, \mathbf{a}_6^2 = (0,0,1,0)\,, \mathbf{a}_7^2 = (0,1,1,0)\,,$
$\mathbf{a}_8^2 = (1,0,1,0)\,,\ \mathbf{a}_9^2 = (1,0,0,1)\}\,.$
$\mathbf{a}_1^1 = (0,0,0,0)$ утворює повну систему точок розкладу зображення A_1' у нейробазисі. Дійсно,

$$p\left(\mathbf{a}_1^1 A_1\right)_{\xi_1}^{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0000 \\ 1000 \\ 0100 \\ 1100 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix} = (L_3\,0) \,\square\, (L_3^*\,(1)\ 0) \,\square\, L_4^*\,(1)\,, \tag{5.21}$$

де σ_1 — тотожна підстановка.

Аналогічно, точка $\mathbf{a}_1^2 = (0,0,0,0)$ задає повну систему точок розкладу зображення A_2' у нейробазисі, оскільки:

$$p\left(\mathbf{a}_1^2 A_2\right)_{\xi_2}^{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0000 \\ 1000 \\ 0100 \\ 1100 \\ 0010 \\ 1010 \\ 0110 \\ 0001 \\ 1001 \end{pmatrix} = (L_3\,0) \,\square\, (L_3^*\,(3)\ 0) \,\square L_4^*\,(2)\,, \tag{5.22}$$

де σ_2 — тотожна підстановка.

Згідно з рівностями (5.21), (5.22) маємо:

$$\Delta\,(A_1') = \mathbf{v}_1^1; \quad \Delta\,(A_2') = \mathbf{v}_1^2,$$

де $\mathbf{v}_1^1 = (0,0)\,;\ \ \mathbf{v}_1^2 = (2,1)$. Нехай B_1', B_2' — двовимірні бінарні зображення:

		0	1	0	1
		0	0	1	1
0	0	*	*	*	
0	1	*	*		
1	0	*		*	*
1	1	*	*		

Рис. 5.5. Зображення B_1'

		0	1	0	1
		0	0	1	1
0	0	*	*	*	
0	1	*	*		*
1	0	*	*	*	*
1	1	*			*

Рис. 5.6. Зображення B_2'

відносно яких треба приймати рішення про їх належність до одного з класів зображень, заданих еталонними зображеннями A_1', A_2'.

Будуємо відповідні множини B_1, B_2 для бінарних зображень B_1', B_2':

$$B_1 = \{(0,0,0,0)\,,\ (0,1,0,0)\,,\ (1,0,0,0)\,,\ (1,1,0,0)\,,(0,0,0,1)\,,\\ (0,1,0,1)\,,(1,1,0,1)\,,(0,0,1,0)\,,(1,0,1,0)\,,(1,0,1,1)\}\\ B_2 = \{(0,0,0,0)\,,\ (0,1,0,0)\,,\ (1,0,0,0)\,,\ (1,1,0,0)\,,(0,0,0,1)\,,\\ (0,1,0,1)\,,(1,0,0,1)\,,(0,0,1,0)\,,(1,0,1,0)\,,(0,1,1,1)\,,(1,0,1,1),\\ (1,1,1,1)\}$$

і знаходимо їх p-підмножини відносно точки $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^1 = \mathbf{a}_2^1 = (0,0,0,0)$ з міткою $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$:

$$p\,(\mathbf{a}_1 B_1)_{\tau_1}^{\sigma} = (L_3\,0)\ \square\ (L_3^*\,(2)\ 0)\ \square\, L_4^*\,(1)\,, \tag{5.23}$$

$$p\,(\mathbf{a}_1 B_2)_{\tau_2}^{\sigma} = (L_3\,0)\ \square\ (L_3^*\,(2)\ 0)\ \square\, L_4^*\,(2)\,. \tag{5.24}$$

На основі рівностей (5.23), (5.24) знаходимо представлення $\Delta\,(B_1')$; $\Delta\,(B_2')$ бінарних зображень B_1', B_2' у просторі інформаційних векторів:

$$\Delta\,(B_1') = \mathbf{u}_1^1 = (1,0)\,;\quad \Delta\,(B_2') = \mathbf{u}_1^2 = (1,1)\,.$$

Спочатку приймаємо рішення відносно зображення B_1'. Для цього будуємо матрицю $G = (g_{ji})$ $(i=1;\ j=1,2)$, де $g_{ji} = \mu^*\left(\mathbf{v}_i^j, \mathbf{u}_i^1\right)$:

$$g_{11} = \mu^*\left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{u}_1^1\right) = \frac{\nu\left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{u}_1^1\right)}{\mu\left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{u}_1^1\right) + \nu\left(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{u}_1^1\right)} = \frac{7}{8},$$

$$g_{21} = \mu^*\left(\mathbf{v}_1^2, \mathbf{u}_1^1\right) = \frac{7}{9}$$

і на її основі, згідно з алгоритмом, формуємо $G^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Знаходимо суму елементів у кожному рядку матриці G^* і визначаємо номер рядка з максимальною сумою. Як бачимо, таким рядком є перший рядок, а це означає, що зображення B_1' відноситься до класу, що задається еталонним зображенням A_1'.

Аналогічно будуємо матрицю $G = (g_{ji})$ для зображення B_2' $\left(g_{ji} = \mu^*\left(\mathbf{v}_i^j, \mathbf{u}_i^2\right)\right)$, $i = 1; j = 1, 2$:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow G^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Максимальна сума для елементів матриці G^* досягається у другому рядку, а це означає, що зображення B_2' відноситься до класу, що задається еталонним зображенням A_2'.

5.4.2. Ознакові відношення толерантності в задачах розпізнавання двовимірних бінарних зображень

Нехай $K_1 = \left\{A_{11}', A_{12}', \ldots, A_{1k_1}'\right\}$, $K_2 = \left\{A_{21}', A_{22}', \ldots, A_{2k_2}'\right\}$, $\ldots, K_t = \left\{A_{t1}', A_{t2}', \ldots, A_{tk_t}'\right\}$ — навчальна вибірка нормалізованих двовимірних бінарних зображень для класів $K_1', K_2', \ldots, K_t'$, які можуть перетинатися. Розглянемо наступну задачу: побудувати алгоритм, який на основі навчальної вибірки $K_1, K_2, ..., K_t$ $(K_i \subset K_i')$ довільний об'єкт $B \in \bigcup\limits_{i=1}^{t} K_i'$ відносить до одного з класів зображень K_i'.

Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати представлення двовимірних бінарних зображень у просторі інформаційних векторів і властивості функціоналу μ^*.

Нехай $\mathbf{a}_1^i, \mathbf{a}_2^i, ..., \mathbf{a}_{n_i}^i$ — такі точки розкладу бінарних зображень $A_{i1}', A_{i2}', \ldots, A_{ik_i}'$ класу K_i, що для будь-якого $j \in$ $\in \{1, 2, ..., k_i\}$ точність представлення зображення A_{ij}' у просторі інформаційних векторів не менша за число $\delta \in (0,\ 1]$, тобто:

$$\frac{\left|P_{A_{ij}}\left(A_{ij}; \mathbf{a}_1^i, \mathbf{a}_2^i, ..., \mathbf{a}_{n_i}^i\right)\right|}{|A_{ij}|} \geq \delta,$$

де $A_{ij} = \varphi\left(A_{ij}'\right)$, $i = 1, 2, ..., t$. Відносно заданих точок розкладу $\mathbf{a}_1^i, \mathbf{a}_2^i, ..., \mathbf{a}_{n_i}^i$ з відповідними параметрами $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \ldots$

$..., \sigma^i_{n_i}$ для кожного зображення $A'_{i1}, A'_{i2}, \ldots, A'_{ik_i}$ знаходимо $\Delta\left(A'_{i1}\right), \Delta\left(A'_{i2}\right), \ldots, \Delta\left(A'_{ik_i}\right)$ і будуємо матрицю:

$$\Delta\left(K_i\right) = \begin{pmatrix} \Delta\left(A'_{i1}\right) \\ \Delta\left(A'_{i2}\right) \\ \ldots, \\ \Delta\left(A'_{ik_i}\right) \end{pmatrix},$$

яка задає представлення класу нормалізованих бінарних зображень K_i у просторі інформаційних векторів відносно точок $\mathbf{a}^i_1, \mathbf{a}^i_2, ..., \mathbf{a}^i_{n_i}$. Оскільки $\Delta\left(A'_{ij}\right) = \left(\mathbf{v}^j_{i1}, \mathbf{v}^j_{i2}, ..., \mathbf{v}^j_{in_i}\right)$, то $\Delta\left(K_i\right)$ — прямокутна матриця, елементами якої є інформаційні вектори p-фрагментів зображення A'_{ij}, і в розгорнутому вигляді вона матиме такий вигляд:

$$\Delta\left(K_i\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1_{i1}, \mathbf{v}^1_{i2}, ..., \mathbf{v}^1_{in_i} \\ \mathbf{v}^2_{i1}, \mathbf{v}^2_{i2}, ..., \mathbf{v}^2_{in_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}^{k_i}_{i1}, \mathbf{v}^{k_i}_{i2}, ..., \mathbf{v}^{k_i}_{in_i} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Як бачимо, перший стовпчик матриці $\Delta\left(K_i\right)$ характеризує всі зображення A'_{ij} класу K_i за першим p-фрагментом відносно точки розкладу $\mathbf{a}^i_1$, другий стовпчик матриці за другим p-фрагментом відносно точки розкладу $\mathbf{a}^i_2$ і т.д. Таким чином, стовпчики матриці $\Delta\left(K_i\right)$ можна вважати ознаками бінарних зображень класу K_i. Позначимо перший стовпчик матриці $\Delta\left(K_i\right)$ через $\mathbf{v}_{i1}$, другий стовпчик — через $\mathbf{v}_{i2}$, $\ldots$, останній стовпчик — через $\mathbf{v}_{in_i}$ і визначимо ознакове відношення толерантності $\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}$ над множиною рядків матриці $\Delta\left(K_i\right)$ наступним чином: два рядки $\Delta\left(A'_{ir}\right) = \left(\mathbf{v}^r_{i1}, \mathbf{v}^r_{i2}, ..., \mathbf{v}^r_{in_i}\right)$, $\Delta(A'_{is}) = \left(\mathbf{v}^s_{i1}, \mathbf{v}^s_{i2}, ..., \mathbf{v}^s_{in_i}\right)$ матриці $\Delta\left(K_i\right)$ будемо називати толерантними відносно $\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}$, якщо існує такий номер $j \in \{1, 2, ..., n_i\}$, що $\mu^*\left(\mathbf{v}^r_{ij}, \mathbf{v}^s_{ij}\right) \geq \varepsilon$, де $\varepsilon \in (0, 1]$ задає міру "подібності" p-фрагментів зображень A'_{ir}, A'_{is} відносно точки розкладу $\mathbf{a}^i_j$.

Два зображення A'_{ir}, A'_{is} з класу K_i будемо називати толерантними відносно $\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}$, якщо толерантні їх представлення $\Delta\left(A'_{ir}\right)$, $\Delta\left(A'_{is}\right)$ у просторі інформаційних векторів. Якщо зображення A'_{ir}, A'_{is} толерантні відносно $\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}$, то позначаємо це так: $A'_{ir}\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}A'_{is}$, а в протилежному випадку — A'_{ir} не $\tau_{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{in_i}}$ A'_{is}. Ознакове відношення толерантності $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},...,\mathbf{v}_{ij_m}}$ на класі зображень K_i будемо називати тупиковим, якщо воно задовольняє наступні умови:

1) всі зображення з K_i попарно толерантні відносно $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},...,\mathbf{v}_{ij_m}}$,

2) для будь-якої власної підмножини ознак $\left\{\mathbf{v}_{iz_1},\mathbf{v}_{iz_2},....,\mathbf{v}_{iz_p}\right\} \subset \left\{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}\right\}$ знайдуться такі два зображення A'_{ir}, A'_{is} у класі K_i, що A'_{ir} не $\tau_{\mathbf{v}_{iz_1},\mathbf{v}_{iz_2},....,\mathbf{v}_{iz_p}} A'_{is}$.

Нехай $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}}$ — тупикове відношення толерантності класу зображень K_i і A'_{ir}, A'_{is} — довільні зображення з цього класу. Зображення A'_{ir}, A'_{is} будемо називати ε-толерантними за p-фрагментом H_j відносно $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}}$, якщо:

1) $j \in \{j_1, j_2, ..., j_m\}$;

2) інформаційні вектори $\mathbf{v}^r_{ij}$, $\mathbf{v}^s_{ij}$ відповідних p-підмножин $p\left(\mathbf{a}_j A_{ir}\right)$, $p\left(\mathbf{a}_j A_{is}\right)$ задовольняють умову $\mu^*\left(\mathbf{v}^r_{ij},\ \mathbf{v}^s_{ij}\right) \geq \varepsilon$, де $\varepsilon \in (0,\ 1]$ задає міру "подібності" p-фрагментів.

Під толерантною мірою двох зображень A'_{ir}, A'_{is} з точністю ε відносно $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}}$ будемо розуміти кількість p-фрагментів цих зображень відносно ознак $\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}$ за якими вони є ε-толерантними.

Надалі для спрощення позначення тупикового відношення толерантності $\tau_{\mathbf{v}_{ij_1},\mathbf{v}_{ij_2},....,\mathbf{v}_{ij_m}}$ будемо використовувати просту нумерацію τ_k і під $|\tau_k| = m$ будемо розуміти кількість ознак відношення τ_k.

Алгоритм розпізнавання бінарних зображень

Крок 1. Нормалізуємо всі бінарні зображення A'_{ij} $(j = 1, 2, ..., k_i)$ кожного класу K_i $(i = 1, 2, ..., t)$ і зображення B', відносно якого треба приймати рішення.

Крок 2. Задаємо точність представлення $\delta = \delta_0$ бінарних зображень у просторі інформаційних векторів.

Крок 3. Відносно δ знаходимо точки розкладу $\mathbf{a}^i_1, \mathbf{a}^i_2, ..., \mathbf{a}^i_{n_i}$ зображень для кожного класу K_i і їх представлення $\Delta\left(K_i\right)$ $(i = 1, 2, ..., t)$ у просторі інформаційних векторів.

Крок 4. Задаємо міру "подібності" p-фрагментів $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Крок 5. Для кожного класу K_i знаходимо усі тупикові відношення толерантності, перенумеровуємо їх певним чином та утворюємо множину тупикових відношень толерантності $T_i = \left\{\tau_1^i, \tau_2^i, ..., \tau_{p_i}^i\right\}$ класу K_i.

Крок 6. $i = 1$.

Крок 7. Знаходимо $\Delta(B') = \left(\mathbf{u}_1^i, \mathbf{u}_2^i, ..., \mathbf{u}_{n_i}^i\right)$ відносно точок розкладу $\mathbf{a}_1^i, \mathbf{a}_2^i, ..., \mathbf{a}_{n_i}^i$ і побудуємо матрицю $C_i = \left(c_{rs}^i\right)$ наступним чином:

$$c_{rs}^i = \begin{cases} q_{rs}^i, & \text{якщо } B'\tau_s^i A'_{ir}, \\ 0, & \text{якщо } B' \text{ не } \tau_s^i A'_{ir}, \end{cases}$$

де A'_{ir} пробігає всі елементи класу K_i, τ_s^i пробігає всі елементи множини T_i $(s = 1, 2, ..., p_i)$, q_{rs}^i — толерантна міра зображень B' і A'_{ir} відносно τ_s^i. Визначаємо:

$$F_i = \frac{\sum\limits_{r=1}^{k_i}\sum\limits_{s=1}^{p_i} c_{rs}^i}{k_i \sum\limits_{s=1}^{p_i} |\tau_s^i|},$$

де $\left|\tau_s^i\right|$ — кількість ознак тупикового відношення толерантності τ_s^i.

Крок 8. Якщо $i < t$, то $i = i + 1$ і переходимо до кроку 7, а в протилежному випадку до кроку 9.

Крок 9. Знаходимо $F_{\max} = \max\{F_i|\ i = 1, 2, ..., t\}$ і $I = \{i \in \{1, 2, ..., t\}\,|F_i = F_{\max}\}$. Якщо $F_{\max} \geq \eta$ (η — поріг (якість) розпізнавання, $\eta \in (0;\,1]$), то бінарне зображення B' відносимо до класів K_i, $i \in I$ (за припущенням класи K_i, K_j $(i \neq j)$ можуть перетинатися), а в протилежному випадку рішення про належність B' до одного з класів зображень K_i відносно параметрів δ, ε і η не приймаємо і вважаємо алгоритм закінченим.

Зауваження. Як бачимо, точність розпізнавання алгоритму залежить від трьох параметрів δ, ε і η. Якщо задана екзаменаційна вибірка, то підбираємо значення δ, ε і η шляхом їх варіювання так, щоб мінімізувати похибку на цій вибірці. Ці оптимальні значення параметрів $\delta = \delta^*, \varepsilon = \varepsilon^*, \eta = \eta^*$ використовуємо в алгоритмі розпізнавання.

5.4.3. Ознакові відношення толерантності в задачах розпізнавання дискретних та неперервних сигналів

Розглянемо наступну задачу розпізнавання сигналів: на основі відомої навчальної вибірки $\{S_1, S_2, ..., S_t\}$ (S_i — підмножина деякої реальної множини S_i') треба побудувати алгоритм, який відносить довільний об'єкт

$a \in \bigcup_{i=1}^{t} S'_i$ до одного з класів об'єктів S'_k або до групи класів $S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_s}$ у випадку, коли елементи навчальної вибірки S_i, S_j перетинаються при $i \neq j$.

Нехай $\mathbb{Z}_{k_i} = \{0, 1, ..., k_i - 1\}$ і $E = \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{k_n}$ і $\{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ — навчальна вибірка ($S_i \subset E$) класів об'єктів $\{S'_1, S'_2, \ldots, S'_t\}$.

Визначимо на множині E відображення $x_i : E \to Z_{k_i}$ за наступним правилом: $\forall \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in E\ x_i : \mathbf{a} \to x_i(\mathbf{a}) = \alpha_i$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ і $x_i(\mathbf{a})$ будемо називати i-ою ознакою елемента $\mathbf{a}$. При розв'язуванні прикладних задач відображення $x_i : \mathbf{a} \to x_i(\mathbf{a})$ має конкретний зміст. Наприклад, у медичній діагностиці воно може визначити присутність $(x_i(\mathbf{a}) = 1)$ або відсутність $(x_i(\mathbf{a}) = 0)$ певного симптому. Той факт, що ознака $x_i(\mathbf{a})$ має певне змістовне значення, є дуже важливим, оскільки в дійсності реальні об'єкти замінюються векторами з E, (кодуємо їх), але не можна кодувати об'єкти довільним чином, встановлюючи довільну взаємно-однозначну відповідність між об'єктами та векторами з E, тому що нам необхідно зберегти "подібність" та "відмінність" між реальними об'єктами. Наприклад, навчальна вибірка, створена на базі реальних об'єктів, така, що до одного класу увійшли всі об'єкти, у яких значення певної ознаки $x_i(\mathbf{a}) \leq \alpha$, а в другий ті, у яких $x_i(\mathbf{a}) > \alpha$. Зрозуміло, що при довільному кодуванні об'єктів, зазначену дуже важливу властивість для розпізнавання буде втрачено.

Визначимо на множині E ознакове відношення толерантності $\tau_{x_1, x_2, ..., x_n}$ так: вектори $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ і $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ знаходяться у відношенні $\tau_{x_1, x_2, ..., x_n}$, якщо існує таке число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, що $x_i(\mathbf{a}) = x_i(\mathbf{b})$.

Якщо $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ толерантні відносно $\tau_{x_1, x_2, ..., x_n}$, то позначаємо це так: $\mathbf{a}\, \tau_{x_1, x_2, ..., x_n} \mathbf{b}$.

Ознакове відношення толерантності $\tau_{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}}$ на E будемо називати тупиковим, якщо елементи з E попарно толерантні відносно $\tau_{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}}$, і для будь-якої власної підмножини $\{x_{j_1}, ..., x_{j_r}\} \subset \{x_{i_1}, ..., x_{i_m}\}$ знайдуться такі елементи $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$, що $\mathbf{a}$ не $\tau_{x_{j_1}, x_{j2}, ..., x_{j_r}} \mathbf{b}$.

Під толерантною мірою двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ відносно $\tau_{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}}$ будемо розуміти кількість ознак із множини $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}\}$, за якими вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ співпадають.

Алгоритм розпізнавання дискретних сигналів

Крок 1. Нехай $\{S_1, S_2, ..., S_t\}$ — навчальна вибірка класів об'єктів $\{S'_1, S'_2, \ldots, S'_t\}$ і $\mathbf{a} \in \bigcup\limits_{i=1}^{t} S'_i$ — елемент, відносно якого треба приймати рішення про його належність до одного з класів S'_i, або до групи класів $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots, S'_{i_p}$, коли класи $S_i,\ S_j$ перетинаються при $i \neq j$. Знаходимо всі тупикові відношення толерантності τ класу S_i, певним чином їх перенумеровуємо і утворюємо множину $T_i = \left\{\tau_1^i, \tau_2^i, ..., \tau_{p_i}^i\right\}$ $(i = 1, 2, ..., t)$.

Крок 2. $i = 1$.

Крок 3. Побудуємо матрицю $C_i = \left(c_{rs}^i\right)$ так:

$$c_{rs}^i = \begin{cases} q_{rs}^i, & \text{якщо } \mathbf{a}\tau_s^i\mathbf{b}_r, \\ 0, & \text{якщо } \mathbf{a} \text{ не } \tau_s^i\mathbf{b}_r, \end{cases}$$

де $\mathbf{b}_r$ пробігає всі елементи класу S_i, τ_s^i пробігає всі елементи множини T_i, а q_{rs}^i — толерантна міра векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}_r$ відносно τ_s^i.

Визначимо:

$$F_i = \frac{\sum\limits_{r=1}^{n_i}\sum\limits_{s=1}^{p_i} c_{rs}^i}{k_i \sum\limits_{s=1}^{p_i} |\tau_s^i|},$$

де n_i — кількість елементів класу S_i, $\left|\tau_s^i\right|$ — кількість ознак тупикового відношення толерантності τ_s^i.

Крок 4. Якщо $i < t$, то $i = i + 1$, і переходимо до кроку 3, а в протилежному випадку до кроку 5.

Крок 5. Знаходимо $F_{\max} = \max\{F_i|\ i = 12, ..., t\}$ і $I = \{i \in \{1, 2, ..., t\}\,|F_i = F_{\max}\}$. Якщо $F_{\max} \geq \eta$ (η — поріг розпізнавання, $\eta \in (0; 1]$), то об'єкт з кодом $\mathbf{a}$ відносимо до класів S'_i, $i \in I$, а в протилежному випадку рішення про даний об'єкт не приймаємо і вважаємо алгоритм закінченим.

Результат роботи алгоритму, як бачимо, залежить від параметра η. Якщо нам задана екзаменаційна вибірка, то шляхом варіювання значення η знаходимо таке значення $\eta = \eta^*$, при якому мінімізується похибка на цій вибірці.

Зауваження. Отримані вище результати можуть бути узагальнені на той випадок, коли деякі ознаки x_i на множині E є неперервними, тобто при побудові множини замість $\mathbb{Z}_{k_i}$ береться інтервал (c_i, d_i). У такому випадку інтервал (c_i, d_i) розбивається на k_i інтервалів $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{k_i}$ так, щоб зберегти важливі властивості ознаки x_i, що використовуються при кодуванні об'єктів. У даному випадку відношення толерантності $\tau_{x_1,x_2,...,x_n}$ векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$ визначаємо так:

1) якщо x_i — дискретна ознака $(x_i : E \to Z_{k_i})$, то вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$ толерантні за x_i, якщо $x_i(\mathbf{a}) = x_i(\mathbf{b})$;

2) якщо x_i — неперервна ознака $(x_i : E \to (c_i, d_i))$, то вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$ толерантні за x_i, якщо $\exists j \in \{1, 2, ..., k_i\}$, що $x_i(\mathbf{a}),\ x_i(\mathbf{b}) \in \delta_j$.

5.5. Обробка багатовимірних та багатоградаційних зображень у нейробазисі

У даному підрозділі покажемо можливість узагальнення методів представлення та розпізнавання бінарних двовимірних зображень, розроблених у попередніх підрозділах, на випадок багатовимірних та багатоградаційних зображень. Для того, щоб використовувати методи попередніх підрозділів для багатовимірних дискретних зображень A', ми повинні їх закодувати множиною бульових векторів A, або упорядкованою множиною бульових векторів $(A_1, A_2, ..., A_s)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли A' — тривимірне бінарне зображення.

Нехай $P_n(A')$ $(n \geq 3)$ — n-вимірний куб, що містить n-вимірне бінарне зображення A'. Зафіксуємо одну з його вершин і через $l_1, l_2, ..., l_n$ позначимо ребра, які виходять із цієї вершини. Кожне ребро рівномірно поділимо точками $a_0^i, a_1^i, \ldots, a_k^i$, де $k = 2^m - 1$. Під рецепторним полем у n-вимірному векторному просторі будемо розуміти сукупність точок із координатами $\left(a_{t_1}^1, a_{t_2}^2, ..., a_{t_n}^n\right)$ $(t_r = 0, 1, ..., k;\ r = 1, 2, ..., n)$. Кожній точці a_j^i однозначно ставимо у відповідність m-вимірний бульовий вектор $\mathbf{a}_j^i = \left(\alpha_{j_1}^i, \alpha_{j_2}^i, ..., \alpha_{j_m}^i\right)$, де $\left(\alpha_{j_1}^i, \alpha_{j_2}^i, ..., \alpha_{j_m}^i\right)$ — двійковий код числа j, тобто $j = \alpha_{j_1}^i 2^{m-1} + \alpha_{j_2}^i 2^{m-2} + \ldots + \alpha_{j_m}^i$. Отже, кожна точка рецепторного поля однозначно задається $r = nm$-вимірним бульовим вектором $\left(\alpha_{j_1}^1, \alpha_{j_2}^1, ..., \alpha_{j_m}^1, \alpha_{j_1}^2, \alpha_{j_2}^2, ..., \alpha_{j_m}^2, ..., \alpha_{j_1}^n, \alpha_{j_2}^n, ..., \alpha_{j_m}^n\right)$. Якщо через A позначимо множину точок рецепторного поля, які зайняті зображенням A', то очевидно, що $A \subset Z_2^r$ і до зображення A' можна застосувати методи, які наведені у попередніх підрозділах.

Нехай $P_2(A')$ — квадрат, що містить двовимірне багатоградаційне зображення A'. Зафіксуємо одну із вершин квадрата і через $l_1,\ l_2$ відповідно позначимо сторони квадрата, які виходять із цієї вершини. Кожну сторону $l_i\ \ (i=1,2)$ квадрата рівномірно розбиваємо точками $a_0^i, a_1^i, ..., a_k^i$, де $k = 2^m - 1$. Тоді рецепторне поле задається упорядкованою парою точок $\left(a_{j_1}^1, a_{j_2}^2\right)\ (j_i = 0,1,...,k; i=1,2)$. Аналогічно до вищенаведеного, кожній точці a_j^i однозначно ставиться у відповідність m-вимірний бульовий вектор, $\mathbf{a}_j^i = \left(\alpha_{j_1}^i, \alpha_{j_2}^i, ..., \alpha_{j_m}^i\right)$ і таким чином точки рецепторного поля однозначно будуть закодовані елементами з $Z_2^r\ \ (r=2m)$. Якщо через A позначити точки рецепторного поля, які зайняті зображенням A', то багатоградаційне зображення A' однозначно задається множиною $\{(f(\mathbf{a}), \mathbf{a})\,|\mathbf{a}\in A, f(\mathbf{a})\in\{1,2,...,2^s-1\}\}$, де $f(\mathbf{a})$ — інтенсивність зображення в точці $\mathbf{a}$. Знаходимо двійковий код величини $f(\mathbf{a})$: $f(\mathbf{a}) \to (\alpha_1(\mathbf{a}), \alpha_2(\mathbf{a}), ..., \alpha_s(\mathbf{a}))\ \ \left(f(\mathbf{a}) = \alpha_1(\mathbf{a})\,2^{s-1} + \alpha_2(\mathbf{a})\,2^{s-2} + ... + \alpha_s(\mathbf{a})\right)$ і утворюємо наступну систему бінарних множин: $A_1 = \{\mathbf{a}\in A|\,\alpha_1(\mathbf{a})\neq 0\}$, $A_2 = \{\mathbf{a}\in A|\,\alpha_2(\mathbf{a})\neq 0\}, ..., A_s = \{\mathbf{a}\in A|\,\alpha_s(\mathbf{a})\neq 0\}$, які є кодами відповідних бінарних зображень $A_1', A_2', \ldots, A_s'$. Таким чином двовимірному багатоградаційному зображенню A' однозначно ставиться у відповідність упорядкована система $(A_1', A_2', \ldots, A_s')$ бінарних зображень. Для кожного бінарного зображення A_i' можна використовувати методи представлення та розпізнавання попередніх підрозділів, у тому числі до багатоградаційного зображення A'.

Якщо A' є n-вимірним багатоградаційним зображенням, то як було зазначено вище, для n-вимірних бінарних зображень вводиться поняття рецепторного поля, і зображення A' задаємо упорядкованою системою $(A_1', A_2', \ldots, A_s')$ бінарних зображень, які обробляються методами, наведеними у попередніх підрозділах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Омату, С. Нейроуправление и его приложения / С. Омату, М. Халид, Р. Юсоф. – М. : ИПРЖ, 2000. – 272 с.
2. Галушкин, А. И. Теория нейронных сетей. Кн. 1/ под ред. А. И. Галушкина. – М. : ИПРЖ, 2000. – 416 с.
3. Галушкин, А. И. Нейрокомпьютеры. Кн. 3 / общая ред. А. И. Галушкина – М. : ИПРЖ, 2000. – 532 с.
4. Комарцова, Л. Г. Нейрокомпьютеры / Л. Г. Комарцова, А. В. Максимов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 318 с.
5. Фролов, А. А. Нейронные модели ассоциативной памяти / А. А. Фролов, И. П. Муравьев. – М. : Наука, 1987. – 160 с.
6. Уоссерман, Ф. Нейрокомпьютерная техника / Ф. Уоссерман. – М. : Мир, 1992. – 240 с.
7. Комашинский, В. И. Нейронные сети и их применение в системе управления и связи / В. И. Комашинский, Д. А. Смирнов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2002. – 96 с.
8. Минаев, Ю. Методы и алгоритмы решения задач идентификации и прогнозирования в условиях неопределенности в нейросетевом логическом базисе / Ю. Минаев, О. Филимонова, Л. Бенамеур. – М. : Горячая линия-Телеком, 2005. – 205 с.
9. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – 2-е изд. – М. : Вильямс-Телеком, 2006. – 1104 с.
10. Ткаченко, Р. О. Акселератор для реалізації штучних нейронних мереж на основі нейропарадигми "функціонал на множині табличних функцій"/ Р. О. Ткаченко, І. Г. Цмоць // Збірник наукових праць інституту проблем моделювання в енергетиці НАН України. – К., 1999. – Вип. 7. – С. 20-28.
11. Гече, Ф. Э. Синтез порогово-дизьюнктивной сети /Ф. Э. Гече // Оптимизация вычислений : сб. – К. : ИК АН УССР, 1979. – С. 13-21.
12. Айзенберг, Н. Н. Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики / Н. Н. Айзенберг, А. А. Бовди, Э. Й. Герго, Ф. Э. Гече // Кибернетика. – К. – 1980. – № 2. – С. 26-30.
13. Гече, Ф. Э. Реализация функций алгебры логики на пороговых элементах / Ф. Э. Гече, В. П. Поливко, В. И. Роботишин // Кибернетика. – К. – 1983. – № 6. – С. 62-67.
14. Батюк, А. Е. Синтез высокопроизводительных специализированных структур для анализа и обработки изображений в пороговом базисе: Гл. 4 / А. Е. Батюк, В. В. Грицык, Ф. Э. Гече [и др.] // Параллельная обработка информации: монография. В 5 т. Т. 5 / [авт. коллектив]: ред.: Б. Н. Малиновский, В. В. Грицык. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 319-363.

15. Гече, Ф. Э. Представление и классификация изображений в пороговом базисе / Ф. Э. Гече, А. В. Ануфриев // Кибернетика. – К. – 1990. – № 5. – С. 90-96.

16. Geche, F. E. Organization of Computational process for Digital Image Representation by informational vectors / F. E. Geche, A. E. Batyuk // Theses reports in International Conference "Information Technologies in Analysis of Images and Images Recognition". – Lviv : PMI Ukr. Akad. of Sci., 1990. – PP. 253-259.

17. Geche, F. E. Synthesis of Discrete Devices and Image Representation and Image Analysis / F. E. Geche, A. E. Batyuk // Наука : Interperiodica Publishing (Russia). – M., 1994. – Vol. 4. – № 3. – PP. 248-259.

18. Айзенберг, Н. Н. Нейронные елементы и многозначные пороговые функции над полем Галуа / Н. Н. Айзенберг, Ф. Э. Гече // Друга українська конференція з автоматичного керування: тези доп. – Львів, 1995. – С. 9-11.

19. Geche, F. Synthesis of Combinational Schemes and Processing of Discrete Images in Threshold Basis / F. Geche, A. Lutsik // Application of Artificial Neural Networks in Image Processing. – San Jose, [USA], 1996. – Vol. 2664. – PP. 103-113.

20. The Neural and Neural Like Networks: Synthesis, Realization, Application and Future / V. V. Hrytsyk, N. N. Aizenberg, R. A. Bun, O. V. Danyliuk, F. E. Geche, B. V. Kysil, B. Ya. Oleksiv, Yu. V. Opotiak, S. P. Striamets, R. O. Tkachenko, V. A. Valkovskii, K. S. Voichyshyn // Інформаційні технології і системи. – Львів – 1998. – № 1/2. – С. 15-55.

21. Гече, Ф. Э. Нейронные елементы над конечными полями / Ф. Э. Гече // Інформаційні технології і системи. – Львів – 1998. – №1/2. – С. 100-104.

22. Гече, Ф. Э. Реализация булевых функций на одном нейронном елементе и сумматорах по mod 2 / Ф. Э. Гече // Інформаційні технології і системи. – Львів – 1998. – № 1/2. – С. 105-109.

23. Гече, Ф. Э. Обработка дискретных космических изображений в расширенном пороговом базисе / Ф. Э. Гече // Космічна наука і технологія. – К., 1998. – Т. 4. – № 3, 4. – С. 74-80.

24. Гече, Ф. Э. Синтез двукаскадной сети из многозначных нейронных елементов над конечным полем Галуа / Ф. Э. Гече // Науковий вісник УжДУ. Сер. : Математика. – Ужгород, 1998. – Вип. 3. – С. 42-48.

25. Гече, Ф. Е. Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах / Ф. Е. Гече // Науковий вісник УжДУ. Сер. : Математика. – Ужгород, 1999. – Вип. 4. – С. 17-25.

26. Гече, Ф. Е. Про деякі властивості бульових функцій, які реалізуються на одному нейронному елементі / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Сер. : Математика. – Ужгород, 1999. – Вип. 4. – С. 25-29.

27. Гече, Ф. Е. Модифікація критеріїв пороговості бульових функцій на основі властивостей характерестичних векторів / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Науковий вісник УжДУ. Сер. : Математика. – Ужгород, 1999. – Вип. 5. – С. 16-21.

28. Гече, Ф. Реалізація дискретних функцій на багатозначному нейронному елементі над полем Галуа / Ф. Гече, А. Батюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2000. – № 413. – С. 112-117.

29. Гече, Ф. Э. Алгебраические свойства нейробазиса булевых функций / Ф. Е. Гече // Міжнародна конференція з управління "Автоматика - 2000": тез. доп. – Львів, 2000. – Т. 7. – С. 105-109.

30. Гече, Ф. Е. Критерій реалізованості дискретних функцій одним багатозначним нейронним елементом над полем комплексних чисел / Ф. Е. Гече, А. Є. Батюк // Інформаційні технології і системи. – Львів, 2001. – № 1-2. – С. 44-46.

31. Гече, Ф. Про деякі критерії пороговості булевих функцій / Ф. Гече, В. Коцовський, А. Батюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2001. – № 433. – С. 160-165.

32. Гече, Ф. Властивості бульових функцій реалізовних на двопорогових елементах / Ф. Гече, А. Батюк, В. Коцовський // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2001. – № 438. – С. 22-25.

33. Гече, Ф. Е. Задання предикатів із скінченною областю визначення за допомогою багатопорогових нейронних елементів / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2001. – Вип. 6. – С. 32-37.

34. Гече, Ф. Е. Оцінка числа бульових функцій, реалізовних на нейронних елементах / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2002. – Вип. 7. – С. 32-37.

35. Гече, Ф. Про будову ядра нейрофункції / Ф. Гече, А. Батюк // Технічні вісті. – Львів – 2002/1(14), 2(15). – С. 80-83.

36. Гече, Ф. Е. Про представлення множин бульових векторів матрицями толерантності / Ф. Е. Гече // Міжнародна конференція з індуктивного моделювання "ICIM-2002": тез. доп. – Львів, 2002. – Т. 4-5. – С. 255-260.

37. Грицик, В. В. Реалізація бульових та багатозначних логічних функцій на нейронних елементах / В. В. Грицик, Ф. Е. Гече // Доповіді Національної академії наук України. Кібернетика та обчислювальна техніка. – К. – 2004. – № 5. – С. 65-68.

38. Гече, Ф. Е. Нейронні елементи над кільцем Z_{p^m} / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Доповіді Національної академії наук України. Кібернетика та обчислювальна техніка. – К. – 2004. – № 6. – С. 70-72.

39. Гече, Ф. Е. Достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності / Ф. Е. Гече, С. А. Ковальов // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2005. – Вип. 10-11. – С. 44-49.

40. Гече, Ф. Е. Алгоритми навчання узагальнених нейронних елементів відносно системи характерів / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський, А. Є. Батюк // Збірник наукових праць інституту проблем моделювання в енергетиці НАН України. – К., 2007. – Вип. 41. – С. 124-136.

41. Гече, Ф. Бульові нейрофункції і синтез розпізнавального пристрою у нейробазисі / Ф. Гече, В. Коцовський, С. Ковальов, А. Батюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2007. – № 598. – С. 44-50.

42. Гече, Ф. Э. Нейрофункции и логические схемы в нейробазисе / Ф. Э. Гече // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2008. – Вип. 17. – С. 66-74.

43. Лейхтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М. : Наука, 1985. – 335 с.

44. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Наука, 1986. – 285 с.

45. Яджима, С. Нижняя оценка числа пороговых функций / С. Яджима, Т. Ибараки // Кибернитический сборник : новая серия. – М. : Мир, 1969. – Вып. 6. – С. 72-81.

46. Дертоузос, М. Пороговая логика / М. Дертоузос. – М. : Мир, 1967. – 342 с.

47. Paul, M. C. Boolean Functions Realizable with Single Threshold Devices / M. C. Paul, E. J. McCluskey // Proc. IRE-48. – 1960. – PP. 1335-1337.

48. Залманзон, Л. А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение / Л. А. Залманзон. – М. : Наука, 1989. – 493 с.

49. Ярославский, Л. П. Введение в цифровую обработку изображений / Л. П. Ярославский. – М. : Советское радио, 1979. – 312 с.

50. Кертис, Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кертис, И. Райнер. – М. : Наука, 1969. – 667 с.

51. Курош, А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

52. Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – М. : Наука, 1979. – 623 с.

53. Айзенберг, Н. Н. Об одном обобщении пороговой функции / Н. Н. Айзенберг, Ю. Л. Иваськив, Д. А. Поспелов // Доклады АН СССР. – М. – 1971. – Т. 196. – № 6. – С. 1287-1290.

54. Блюмин, С. А. Пороговые многозначные функции / С. А. Блюмин // Известия АН СССР. Сер. : Техническая кибернетика. – М. – 1971. – №1. – С. 101-108.

55. Карповский, М. Г. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств / М. Г. Карповский, Э. С. Москалев. – М. : Энергия, 1973. – 139 с.

56. Лабунец, В. Г. Гармонический анализ булевых функций и функций k-значной логики над конечными полями / В. Г. Лабунец, О. П. Ситников // Известия АН СССР. Сер. : Техническая кибернетика. – М. – 1975. – № 1. – С. 141-148.

57. Берлекемп, Э. Алгебраическая теория кодирования / Э. Берлекемп. – М. : Мир, 1971. – 477 с.

58. Eichner L. Homomorphe Darstellungen endlicher Automaten in linearen Automaten / L. Eichner. – EIK. – 1973. – T. 9. – № 10. – PP. 67-76.

59. Айзенберг, Н. Н. Многозначная пороговая логика / Н. Н. Айзенберг, Ю. Л. Иваськив. – К. : Наук. думка, 1977. – 145 с.

60. Айзенберг, Н. Н. Многозначные пороговые функции II. Синтез многозначных пороговых елементов / Н. Н. Айзенберг, Ю. Л. Иваськив, Д. А. Поспелов, Г. Ф. Худяков // Кибернетика. – К. – 1971. – № 1. – С. 53-66.

61. Журавлев, Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач разпознавания или классификации / Ю. И. Журавлев // Проблемы кибернетики : сб. – М. : Наука, 1978. – Вып. 33. – С. 5-68.

62. Прэтт, У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт. – М. : Мир, 1982. – Т. 1. – 480 с.

63. Ту, Дж. Принципы разпознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес. – М. : Мир, 1978. – 411 с.

64. Анисимов, Б. В. Распознавание и цифровая обработка изображений / Б. В. Анисимов, В. Д. Курганов, В. К. Злобин. – М. : Высш. шк., 1983. – 295 с.

65. Васильев В. И. Распознающие системы. Справочник / В. И. Васильев. – К. : Наук. думка, 1983. – 422 с.