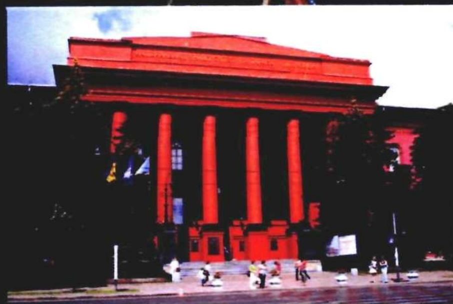

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2012

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, випуск №2, 2012
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 2

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.2

Ю.Ю. Млавець, аспірант

$\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ

Yu. Yu. Mlavets, Postgraduate

$\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – spaces of random variables with exponential function ψ

Досліджуються властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ з експоненціальною функцією ψ.

Ключові слова: простори Банаха випадкових величин, випадкові процеси, моментні норми, мажоруюча характеристика.

The properties of random variables and processes from spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ are investigated with exponential function ψ.

Key Words: Banach spaces of random variables, random processes, moment norms, majorant characteristic.

E-mail: yura-mlavec@ukr.net
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі вивчаються простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин з функцією $\psi(u) = e^{au^\beta}$. Простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ були введені в роботі [1], а в [2] вивчались загальні властивості цих просторів.

2 $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 2.1 ([2]). Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geqslant 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$, якщо $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup\limits_{u \geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty$.

Теорема 1 ([1]). *Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geqslant 1} \frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}. \qquad (1)$$

Теорема 2 ([2]). *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi| > x\} \leqslant \inf_{u \geqslant 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u\,(\psi(u))^u}{x^u}. \qquad (2)$$

Теорема 3. *Нехай випадкова величина ξ належить $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi| > x\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{x}{\|\xi\|_\psi}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

якщо $x > \|\xi\|_\psi$.

Доведення. Дійсно, використовуючи попередню теорему, позначимо, що $b = \frac{\|\xi\|_\psi}{x}$. Мінімум виразу $b^u e^{au^{\beta+1}}$ набувається в точці $u = \left(\frac{\ln 1/b}{a(\beta+1)}\right)^{1/\beta}$, то, підставляючи значення в (2), отримаємо потрібне.

Означення 2.2 ([2]). Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\varkappa(n), n \geqslant 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ з цього простору виконується нерівність

$$\left\|\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|\right\|_\psi \leqslant \varkappa(n) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 4 ([2]). *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u \geqslant 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \qquad (3)$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 5. *Послідовність* $\varkappa(n) = \frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)(\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}$, *де* $S(a,\beta) = (\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}}(\beta^{-1}+1)$ *є M - характеристикою простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$.*

Доведення. Використовуючи попередню теорему та знайшовши мінімум виразу $n^{\frac{1}{u+v}} e^{a(u+v)^\beta - au^\beta}$, який набуває в точці $v = \left(\frac{\ln n}{a\beta}\right)^{1/\beta+1} - u$ та дорівнює $n^{\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{1/\beta+1}} e^{a\left(\frac{a\beta}{\ln n}\right)^{1/\beta+1} - au^\beta}$. Підставляючи це значення в (3) і обчислити супремум, отримаємо шукане.

Означення 2.3 ([2]). Нехай S_k монотонно зростаюча послідовність ($S_k \geqslant 1$) і $S_k \to \infty$, коли $k \to \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geqslant 1$, така що $\psi(u) \to \infty$ коли $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup\limits_{k\geqslant r} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty$.

Простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k\geqslant r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Теорема 6 ([2]). *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\left\{|\xi| > x\right\} \leqslant \inf_{k\geqslant r} \frac{\|\xi\|^{S_k}_{S_k,\psi,r}\left(\psi(S_k)\right)^{S_k}}{x^{S_k}}. \quad (4)$$

Теорема 7 ([2]). *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{k\geqslant r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \quad (5)$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$.

Означення 2.4 ([2]). Простір Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин має властивість $\mathbf{H}$, якщо існує абсолютна константа C_B, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з $B(\Omega)$ виконується умова

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^2 \leqslant C_B \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2.$$

Теорема 8 ([2]). *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k – симетричні випадкові величини, де $k \geqslant \max(r,2)$ і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l}\left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant C_k^l, \quad (6)$$

$l = \overline{1, k-1}$, то має місце нерівність

$$\theta^2_{2,r}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \theta^2_{2,r}\left(\xi_i\right).$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (6), *виконується нерівність*

$$\theta^2_{2,r}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} \theta^2_{2,r}\left(\xi_i\right).$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l}\left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l}\left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant C_k^l,$$

$l = \overline{1, k-1}$, то маємо нерівність

$$\theta^2_{2,r}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \theta^2_{2,r}\left(\xi_i\right).$$

Лема 1. *При $k \geqslant 2$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$ має місце нерівність*

$$C_{2k}^{2l} \leqslant C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}} \quad (7)$$

Доведення. Лема випливає з леми 2.2 з [2], оскільки $\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\} \leqslant 1$, $k \geqslant 2$.

Теорема 9. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u)$, $u \geqslant 1$ така що $\varphi(u) = \frac{\psi(u)}{u^{1/2}}$ – строго монотонна при $u \geqslant u_0$. Якщо $u_0 \leqslant 1$, то для $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується властивість $\mathbf{H}$ з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується властивість $\mathbf{H}$ з константою $C_\psi = S_\psi \cdot S_{\hat{\psi}}$, де*

$$S_\psi = \max\left(1, \sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\psi\left(u_0\right)}{\psi(u)}\left(\frac{u}{u_0}\right)^{1/2}\right),$$

$$S_{\hat{\psi}} = \max\left(1, \sup_{1\leqslant u<u_0} \frac{\psi\left(u\right)}{\psi(u_0)}\left(\frac{u_0}{u}\right)^{1/2}\right).$$

Доведення. Спочатку доведемо теорему, коли $u_0 \leqslant 1$. Перевіримо умову (6). З леми 1 випливає

$$C_{2k}^{2l} \frac{\left(\psi(2l)\right)^{2l}\left(\psi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\psi(2k)\right)^{2k}} \leqslant$$

$$C_k^l \frac{\frac{(\psi(2l))^{2l}}{(2l)^l} \cdot \frac{(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(2k-2l)^{k-l}}}{\frac{(\psi(2k))^{2k}}{(2k)^k}} =$$

$$C_k^l \frac{\left(\varphi(2l)\right)^{2l}\left(\varphi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\varphi(2k)\right)^{2k}}.$$

Оскільки

$$\frac{\left(\varphi(2l)\right)^{2l}\left(\varphi(2k-2l)\right)^{2k-2l}}{\left(\varphi(2k)\right)^{2k}} =$$

$$\left(\frac{\varphi(2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2l}\left(\frac{\varphi(2k-2l)}{\varphi 2k}\right)^{2k-2l}\leqslant 1$$

Отже, функція $\varphi(u)$ монотонно зростає, при $u \geqslant 1$, то теорема в цьому випадку доведена.

Доведемо теорему у випадку $u_0 > 1$. Розглянемо два простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\mathbf{F}_{\hat\psi}(\Omega)$, де

$$\hat\psi(u)=\begin{cases}\psi(u), & \text{якщо } u\geqslant u_0;\\ \frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}, & \text{якщо } 1\leqslant u<u_0.\end{cases}$$

Оскільки

$$\|\xi\|_\psi=\max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},\sup_{u\geqslant u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\right),$$

$$\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}=\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}}\cdot\frac{\psi(u_0)u^{1/2}}{\psi(u)u_o^{1/2}},$$

тоді $\|\xi\|_\psi \leqslant$

$$S_\psi\max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}},\sup_{u\geqslant u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\right),$$

тобто $\|\xi\|_\psi \leqslant S_\psi \|\xi\|_{\hat\psi}$. Тепер розглянемо

$$\|\xi\|_{\hat\psi}=\max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}},\sup_{u\geqslant u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\right).$$

Оскільки

$$\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_o^{1/2}}u^{1/2}}=\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\cdot\frac{\psi(u)u_o^{1/2}}{\psi(u_0)u^{1/2}},$$

то $\|\xi\|_{\hat\psi} \leqslant$

$$S_{\hat\psi}\max\left(\sup_{1\leqslant u<u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},\sup_{u\geqslant u_0}\frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}\right),$$

тобто $\|\xi\|_{\hat\psi} \leqslant S_{\hat\psi}\|\xi\|_\psi$.

Отже, простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\mathbf{F}_{\hat\psi}(\Omega)$ містять одні й тіж елементи і норми в цих просторах еквівалентні.

Із означення 2.4 маємо, що

$$\left\|\sum_{i=1}^n\xi_i\right\|_\psi^2\leqslant S_\psi\left\|\sum_{i=1}^n\xi_i\right\|_{\hat\psi}^2\leqslant$$
$$S_\psi\sum_{i=1}^n\|\xi_i\|_{\hat\psi}^2\leqslant S_\psi S_{\hat\psi}\sum_{i=1}^n\|\xi_i\|_\psi^2.$$

Отже, з останьої нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Легко бачити, що $S_\psi \leqslant \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)}$ і $S_{\hat\psi} \leqslant (u_0)^{1/2}$.

Наслідок 1. *Якщо при $u \leqslant u_0$ функція $\varphi(u)$ монотонно спададає, то $S_\psi = 1$, а $S_{\hat\psi} = \max\left(1, \frac{\psi(1)}{\psi(u_0)}u_0^{1/2}\right)$.*

Доведення наслідку очевидне.

Теорема 10. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Якщо $u_0 \leqslant 1$, то для $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується властивість **H** з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується властивість **H** з константою $C_\psi = \max\left(1, \frac{e^{a-\frac{1}{2\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}}\right)$.*

Доведення Легко бачити, що для функції $\psi(u) = e^{au^\beta}$ $u_0 = \frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}$, то із попереднього наслідку справджується твердження теореми.

3 Випадкові процеси

Нехай $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{T}\}$ – випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ – компактний метричний простір, ρ – метрика. Розглянемо $N(u)$– метричну масивність простору $(\mathbf{T}, \rho)$ [2] і $\gamma = \sigma\left(\sup_{t,s\in\mathbf{T}}\rho(t,s)\right)$.

Означення 3.1 ([2]). Випадковий процес $X \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 11 ([2]). *Нехай $X(t)$ – сепарабельний процес на $(\mathbf{T}, \rho)$ з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і виконується умова $\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\|X(t) - X(s)\|_\psi \leqslant \sigma(h)$, де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $z > 0$ виконується умова*

$$\int_0^z \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty$$

та $\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то $\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant B(p)$, де $B(p) = \inf_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_\psi +$

$$+\quad\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du,$$

$\varkappa(n)$ – *мажоруюча характеристика,* $\sigma^{(-1)}(u)$ – *обернена функції до* $\sigma(u)$, $p \in (0,1)$. *Також для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1}\frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 12. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{T}\}$ – *випадковий процес,* $\psi(u) = e^{au^\beta}$ *і для будь-якого* $z > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^z \frac{1}{e^a} e^{\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}} du < \infty$$

та $\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *то для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність* $P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant$

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{B(p)}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\},$$

де $B(p) = \inf_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)}\times$
$\int_0^{\gamma p}\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}du.$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 11.

Теорема 13 ([2]). *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in [0,T]\}$, *де* $T > 0$ *сепарабельний процес з простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. *Нехай для деякого* $\omega < 1$ *виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h}\|X(t) - X(s)\|_\psi \leqslant C\left(\varkappa\left(\frac{T}{2u}+1\right)\right)^{-1/\omega}.$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *та справджується нерівність*

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant \inf_{t\in[0,T]}\|X(t)\|_\psi + B(\omega) = \widetilde{B},$$

де $B(\omega) = \frac{C^\omega}{(1-\omega)}\left(\frac{C^\omega}{\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{(1-\omega)/\omega}\frac{(1+\omega)^{\omega+1}}{\omega^\omega}$. *Крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \inf_{u\geqslant 1}\frac{\widetilde{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 14. *Нехай виконуються умови попередньої теореми і* $\psi(u) = e^{au^\beta}$, *де* $a > 0$, $\beta > 0$, *то* $\sigma(h) =$

$$= C\left(\frac{1}{e^a}\exp\left\{S(a,\beta)\left(\ln\left(\frac{T}{2u}+1\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{-1/\omega},$$

тоді $\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\|_\psi \leqslant$

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{u\geqslant 1}\frac{(\mathsf{E}|X(t)|^u)^{1/u}}{e^{au^\beta}} + B(\omega) = B_{e^{au^\beta}}.$$

Також для будь-якого $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta}{a^{1/\beta}}\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{B_{e^{au^\beta}}}}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 13.

4 Висновки

В роботі вивчені випадкові процеси з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Знайдено норми випадкових величин, мажоруючу характеристику цих просторів з експонеціальною функцією ψ. Ці результати можна використати для підрахунку кратних інтегралів із заданою точністю і надійністю методом Монте-Карло.

Список використаних джерел

1. *С.В. Ермаков, Е.И. Островский* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей, Деп. в ВИНИТИ – 1986. – №3752-В.86.0. – 42.

2. *Козаченко Ю. В., Млавецъ Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 61-76.

Надійшла до редколегії 04.01.12