

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

серія

**МАТЕМАТИКА І
ІНФОРМАТИКА**

випуск 25 №1

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 25 № 1

Ужгород 2014

ББК 22.1+72.4 (4УКР)

У-33

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В.В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2014. – Вип. 25, № 1. – 151 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В.В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Король І.І., доктор фізико-математичних наук, професор.
Відповідальний секретар — Погоріляк О.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бабич М. Д., доктор фізико-математичних наук, професор;
Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор;
Бондаренко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор;
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор;
Гече Ф. Е., доктор технічних наук, професор;
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор;
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор;
Задирака В.К., член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор;
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Моца А. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;
Ронто А.М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М.Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Шапочка І.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного університету, протокол № 10-2013/2014 від 19-20.06.2014 р.

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

© В.В. Маринець,
О.О. Погоріляк, упорядкування, 2014

© Ужгородський національний університет,
2014

ЗМІСТ

1. Поляк С. С. Мирон Онуфрійович Зарицький (до 125-річчя від дня його народження)	5
2. Барабаш Г. М., Холявка Я. М. Про арифметичні властивості рекурентних послідовностей на кривих Лежандра	11
3. Бортош М. Ю. Про один клас звідних номіальних матриць над комутативними кільцями	15
4. Боярищєва Т. В. Дослідження швидкості збіжності сум незалежних випадкових величин	21
5. Брила А. Ю., Гренджа В. І. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівських задач про максимальний потік з альтернативними критеріями та альтернативними групами критеріїв	28
6. Власій О. Д., Гой Т. П., Савка І. Я. Крайова задача з нелокальними умовами другого роду для гіперболічного факторизованого оператора	33
7. Глебєна М. І. До питання точності апроксимації функції двох дійсних змінних некласичною мажорантою Ньютона.	47
8. Гудивок Т. В., Погоріляк О. О. Про моделювання деяких випадкових процесів із заданою кореляційною функцією	53
9. Журавльов В. П. Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі	57
10. Король Ю. Ю. Стійкість розв'язків диференціально-алгебраїчних систем з виродженими імпульсами в фіксовані моменти часу.	70
11. Млавець Ю. Ю. Зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $F_{\psi}(\Omega)$	77
12. Нитребич З. М. Диференціально-символьний метод розв'язування задачі Коші для однорідної системи рівнянь із частинними похідними	85
13. Нитребич З. М., Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смужі	94
14. Пашко А. О. Точність моделювання субгауссового дробового броунівського руху	106
15. Перегуда Ю. М. Про частково впорядковані множини, повні відносно 1-стабільних елементів	114
16. Попович Р. Б. Нижня межа для мультиплікативного порядку елементів у вежах скінченних полів характеристики $p \geq 3$	120
17. Семенюта М. Ф., Черноусова Ж. Т. О дистанционной магической разметке определённых конструкций графов	124
18. Хома-Могильська С. Г. Представлення розв'язку крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку	133
19. Ясинський В. К., Юрченко І. В. Асимптотика рішення лінійного неавтономного стохастического уравнения в частных производных с марковскими параметрами	137

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

ЗВ'ЯЗОК ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ПРОСТОРАМИ $F_\psi(\Omega)$ A relationship between the spaces $F_\psi(\Omega)$ and Orlicz spaces random variables are studied.Досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $F_\psi(\Omega)$.

Вступ. Простори випадкових величин $F_\psi(\Omega)$ були введені Єрмаковим і Островським в роботі [1]. Робота [2], присвячена детальному вивченню цих просторів. Дана стаття є продовженням роботи [2]. Тут досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $F_\psi(\Omega)$ та знаходяться умови за яких для просторів Орліча випадкових величин виконується умова Н.

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів $F_\psi(\Omega)$. В другому розділі розглядаються основні властивості просторів Орліча випадкових величин. В третьому розділі досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $F_\psi(\Omega)$.

1. $F_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 1 (див. [2]). Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(E |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [1]. Але в ній вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in F_\psi(\Omega)$. Крім того розглядалися випадкові величини, такі що $E |\xi|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Доведено [1], що $F_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Зауваження 1. Простір $F_\psi(\Omega)$, очевидно, є лінійним нормованим простором, і те, що він є простором Банаха, доводиться аналогічно доведенню, що простір Орліча випадкових величин є банаховим [1].

Теорема 1 (див. [2]). Якщо випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P \{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Означення 2 (див. [2]). Додатно неспадна числова послідовність $\kappa(n)$, $n \geq 1$ називається M -характеристикою (мажоруючою характеристикою)

простору $F_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ із цього простору виконується нерівність:

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \kappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Означення 3 (див. [2]). Простір $F_\psi(\Omega)$ будемо називати простором $\tilde{F}_\psi(\Omega)$, якщо для функції $\psi(u)$ виконується умова:

$$\sup_{u \geq 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} < \infty,$$

де $v > 0$ – будь-яке число.

Означення 4 (див. [2]). Нехай S_k – зростаюча числова послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ таку, що $\psi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$, якщо виконується умова:

$$\sup_{k \geq r} \frac{(E |\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty,$$

де число r – таке, що $S_r \geq 1$.

Як і в попередньому випадку легко довести, що простори $F_{S_k, \psi, r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k, \psi, r} = \sup_{k \geq r} \frac{(E |\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Означення 5 (див. [2]). Скажемо, що для просторів Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин виконується умова **H**, якщо існує абсолютна константа C_B така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із $B(\Omega)$ виконується нерівність:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \leq C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2.$$

Константу C_B назвемо масштабною константою простору $B(\Omega)$. Для всіх просторів $F_\psi(\Omega)$ константу $C_{F_\psi(\Omega)}$ будемо позначати C_ψ .

Наслідок 1 (див. [2]). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $\tilde{F}_\psi(\Omega)$. Якщо ξ_i – симетричні випадкові величини і при $k \geq \max(r, 2)$ виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad l = \overline{1, k-1}, \quad (1)$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq \psi_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{F}_\psi(\Omega)$ виконується умова **H** із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$, де $\widehat{\psi}_r = \max(\overline{\psi}_r, \widetilde{C}_r)$, $\overline{\psi}_r = \sup_{u \geq r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)}$, $\widetilde{C}_r = \sup_{1 \leq u \leq S_r} \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)}$.

Якщо відмовитись від умови симетричності, тоді при умові (1) справедлива нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{\psi}^2 \leq 4\widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\psi}^2$$

і в цьому випадку для простору $\check{F}_\psi(\Omega)$ теж виконується умова **H** із константою $C_\psi = 4\widehat{\psi}_r^2$.

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad l = \overline{1, k-1},$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{\psi}^2 \leq \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\psi}^2,$$

або, аналогічно попереднім випадкам, для простору $\check{F}_\psi(\Omega)$ виконується умова **H** із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$.

Лема 1. Нерівність

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}}$$

справедлива при $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$.

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}.$$

За формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} &= \frac{(2k)!!(k-l)!}{(2l)!(2k-2l)!k!} = \frac{k^{2k} l^l (k-l)^{k-l}}{\sqrt{2} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} k^k} \exp\{\theta_{2k} + \theta_{2l} + \theta_k + \theta_l + \theta_{k-l}\} \leq \\ &\leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{24k} + \frac{1}{24l} + \frac{1}{24(k-l)} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{12l} + \frac{1}{12(k-l)}\right\} \leq \\ &\leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\} \leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

Приклад 1. Розглянемо простір $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\theta$, $\theta \geq \frac{1}{2}$. Доведемо, що в цьому випадку виконується умова (1). Оскільки

$$\begin{aligned} C_{2k}^{2l} \frac{(2l)^{2l\theta} (2k-2l)^{(2k-2l)\theta}}{(2k)^{2k\theta}} &= C_{2k}^{2l} \left(\frac{l^{2l} (k-l)^{(2k-2l)\theta}}{k^{2k}} \right)^\theta \leq \\ &\leq C_k^l \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \left(\frac{l^{2l} (k-l)^{(2k-2l)\theta}}{k^{2k}} \right)^\theta = C_k^l \left(\frac{l^l (k-l)^{k-l}}{k^k} \right)^{2\theta-1}, \end{aligned}$$

а також

$$\left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1} = \left(\frac{l^l}{k^l} \frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leq 1,$$

тоді при $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$ маємо, що $\left(\frac{l^l}{k^l}\right)^{2\theta-1} \leq 1$ і $\left(\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leq 1$.

Очевидно, що при $\theta \geq \frac{1}{2}$ і $k > 2$ має місце нерівність (1). Тобто для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\theta$ виконується умова **H** і справджується така нерівність:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{\psi}^2 \leq 4 \cdot 9^\theta \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{\psi}^2.$$

Зауважимо, що при $\theta < \frac{1}{2}$ для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ умова **H** не виконується.

2. Основні властивості просторів Орліча

Означення 6 (див. [3]). Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *C-функцією*, якщо $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$ і $U(0) = 0$.

Приклад 2. Прикладами *C-функцій Орліча* є такі функції:

- 1) $U(x) = A|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $\alpha \geq 1$;
- 2) $U(x) = C(\exp\{B|x|^\beta\} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $C > 0$, $B > 0$, $\beta \geq 1$;
- 3) $U(x) = C(\exp\{\varphi(x)\} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $C > 0$ та $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – довільна *C-функція*;
- 4) $U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$;
- 5) $U(x) = D|x|^\alpha \ln(|x| + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $D > 0$, $\alpha \geq 1$.

Означення 7 (див. [3]). Нехай U – довільна *C-функція*. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я таких випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$, для якої виконується умова:

$$EU \left(\frac{\xi}{r_\xi} \right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf \left\{ r > 0 : EU \left(\frac{\xi}{r} \right) \leq 1 \right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Лема 2 (див. [3]). Нехай $\xi \in L_U(\Omega)$ і $\|\xi\|_U > 0$. Тоді для всіх $x > 0$ справедлива нерівність

$$P \{ |\xi| \geq x \} \leq \frac{1}{U(x/\|\xi\|_U)}.$$

Означення 8 (див. [3]). Скажемо, що C -функція U задовольняє g -умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ має місце нерівність:

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Означення 9 (див. [3]). C -функція Орліча $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча (N -функція), якщо виконуються такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 10 (див. [3]). Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – N -функція. Функція φ^* , яка визначається умовою

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$$

називається перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ .

Приклад 3 (див. [4]). Функція $U(x) = a|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \geq 1$ задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$.

C -функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, де $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – довільна C -функція, яка задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = 1$, $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geq 1$, тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Лема 3 (див. [4]). Нехай m – деяка константа. Тоді для будь-якого простору Орліча $m \in L_U(\Omega)$ і $\|m\|_U = \frac{|m|}{U^{(-1)}(1)}$.

Лема 4 (див. [4]). Нехай ξ належить простору $L_U(\Omega)$. Тоді існує така константа d_U , що $E|\xi| \leq d_U \|\xi\|_U$.

Приклад 4 (див. [4]). Для функції $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ маємо $d_U = 1$. Для $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$ є N -функцією, маємо $d_U = \frac{2}{\varphi^{*(-1)}(1)}$. Тут $\varphi^{*(-1)}(x)$ – обернена функція до $\varphi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$ є перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi(x)$.

Наприклад: якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$, тоді $\varphi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, $\varphi^{*(-1)}(x) = (x\beta)^{1/\beta}$ і $\varphi^{*(-1)}(1) = (\beta)^{1/\beta}$. Якщо $\alpha = 2$, тоді $\beta = 2$ і $d_U = \sqrt{2}$. Якщо $\alpha = 4$, тоді $\beta = \frac{4}{3}$ і $d_U = \frac{3^{3/4}}{4^{1/4}}$.

Наслідок 2 (див. [3]). Нехай C -функція задовольняє g -умову з константами A , K і z_0 . Послідовність $(\kappa(n), n \geq 1)$ є мажоруючою характеристикою простору $L_U(\Omega)$, якщо

$$\kappa(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо } n \leq U(z_0), \\ K(1 + U(z_0)) \max\{1, A\} U^{(-1)}(n), & \text{якщо } n > U(z_0). \end{cases}$$

3. Зв'язок просторів $F_\psi(\Omega)$ з просторами Орліча

Означення 11 (див. [4]). Скажемо, що для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова **H**, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із простору $L_U(\Omega)$ виконується така нерівність:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, для яких має місце умова **H** [4]:

- простори $L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, де $C_U = C_p = \sqrt{2} (\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi})^{1/p}$;
- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C -функції, що існують $p > q \geq 2$, для яких $U(\sqrt[q]{x})$ – опукла, а $U(\sqrt[p]{x})$ – увігнута і $C_U = 2B_p$, де $B_p = 2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p ;
- простори Орліча породжені C -функцією $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, де $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha \geq 2$ для цих просторів умова **H** не виконується.

Доведемо, що умова **H** виконується для таких просторів Орліча $L_U(\Omega)$, у яких функція $U(x)$ зростає як експонента при $x \rightarrow \infty$.

Розглянемо C -функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \leq x_\alpha; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \quad (2)$$

де $x_\alpha = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ – простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$. Позначимо символом $\mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ – сім'ю ξ , для яких існує r така, що виконується $EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} = \inf \left\{ r > 0; EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2 \right\}.$$

Лема 5 (див. [2]). Для того щоб $\xi \in L_U(\Omega)$, необхідно й достатньо, щоб $\xi \in \mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ і справджувалися нерівності:

$$\|\xi\|_U \leq (e^{2/\alpha+2}) \langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1},$$

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \leq \|\xi\|_U (e^{2/\alpha} + 1)^{1/\alpha}.$$

Лема 6 (див. [2]). Справедлива нерівність

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \geq \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \right)$$

при $0 < \alpha < 1$.

Лема 7 (див. [2]). При $0 < \alpha < 1$ має місце нерівність

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \leq \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \right).$$

Теорема 2. Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана у вигляді (2), містять ті ж самі елементи, що і простори $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, причому норми в цих просторах – еквівалентні та мають місце нерівності:

$$\|\xi\|_U \leq C_{\psi U} \|\xi\|_\psi, \quad (3)$$

$$\|\xi\|_U \geq C_{U\psi} \|\xi\|_\psi, \quad (4)$$

де $C_{\psi U} = e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$, $C_{U\psi} = \frac{1}{2^{1/\alpha}} (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$.

Доведення. Теорема випливає з лем 5, 6 і 7. Із лем 5, 7 маємо, що

$$\|\xi\|_U \leq e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

а з лем 5, 6 випливає нерівність

$$\|\xi\|_U \geq (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Легко бачити, що $\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \leq \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} = \|\xi\|_\psi$. Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} &\leq \sup_{n \geq 2} \sup_{n-1 \leq u \leq n} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leq \\ &\leq \sup_{n \geq 2} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{(n-1)^{1/\alpha}} \leq 2^{1/\alpha} \sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}, \end{aligned}$$

тому справджуються нерівності (3) і (4).

Теорема 3. Для простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задана у вигляді (2), справджується умова **H** із константою

$$C_U = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{C_{\psi U}}{C_{U\psi}}\right)^2,$$

де $C_{\psi U}$ та $C_{U\psi}$ визначені у теоремі 2.

Доведення. Нехай ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ – незалежні випадкові величини з простору Орліча $L_U(\Omega)$, тоді з теореми 2 випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_\psi^2, \quad (5)$$

де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$. Із викладок у прикладі 1 маємо:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2. \quad (6)$$

Із теореми 2 та нерівностей (5) і (6) випливає нерівність:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2 \cdot 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{C_{U\psi}^2} \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2,$$

що й треба було довести.

Висновки. В роботі сформульовані деякі відомості з теорії просторів $F_\psi(\Omega)$ і властивості просторів Орліча. Встановлено зв'язок між просторами Орліча і просторами $F_\psi(\Omega)$. Знайдено умови при яких для досліджуваного простору Орліча виконується умова Н.

1. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНТИ, №3752-В.86.0.
2. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $F_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С. 92-107.
3. *V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes, AMS, Providence, RI, 2000.
4. *Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – P. 155-168.

Одержано 04.06.2014