

ISSN 1025-6415

Д

ОПОВІДІ

НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

ГОЛОВНИЙ
РЕДАКТОР ЖУРНАЛУ
академік НАН УКРАЇНИ
А.Г. НАУМОВЕЦЬ

8

2011



Д О П О В І Д І
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2011

Науково-теоретичний журнал Президії Національної академії наук України

Заснований у 1939 р.

Виходить щомісяця

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ ЖУРНАЛУ

А. Г. НАУМОВЕЦЬ (головний редактор), П. І. АНДОН, С. А. АНДРОНАТІ, Л. А. БУЛАВІН,
А. Ф. БУЛАТ, Г. М. ГАВРИЧКОВА (заст. головного редактора), В. М. ГЕСЕЦЬ (заст. голов-
ного редактора з наук. питань), В. В. ГОНЧАРУК, В. Т. ГРІНЧЕНКО, Я. М. ГРИГОРЕНКО,
Д. М. ГРОДЗИНСЬКИЙ, В. М. ЄРЕМЕЄВ, В. О. ІВАНОВ, І. М. КОВАЛЕНКО,
С. В. КОМІСАРЕНКО, В. П. КУХАР, В. М. ЛОКТЕВ, О. О. МОЙБЕНКО, В. В. МОРГУН,
І. М. НЕКЛЮДОВ, Г. Г. ПОЛКАРПОВ, В. Д. ПОХОДЕНКО, І. К. ПОХОДНЯ,
А. М. САМОЙЛЕНКО, В. П. СЕМИНОЖЕНКО, І. В. СЕРГІЄНКО, В. І. СТАРОСТЕНКО,
В. С. СТОГНІЙ, В. М. ШЕСТОПАЛОВ, А. П. ШПАК, Я. С. ЯЦКІВ

Зміст

Математика

<i>Афанасьєва Е. С.</i> О граничном поведении кольцевых Q -гомеоморфизмов на римановых многообразиях	7
<i>Качурівський Р. І., Пелюх Г. П.</i> Про обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язки диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу	13
<i>Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.</i> Точність та надійність підрахунку інтегралів методом Монте-Карло	18
<i>Колодяжний В. М., Лісіна О. Ю.</i> Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій	21
<i>Мартынюк-Черниенко Ю. А.</i> О глобальном существовании решений множества дифференциальных уравнений	28

Інформатика та кібернетика

<i>Грицик В. В., Дронюк І. М., Назаркевич М. А.</i> Ідентифікація інформації на основі функціональних перетворень періодичних Атеб-функцій	33
<i>Матичин І. І.</i> Управление системами с дробными производными в условиях конфликта	38
<i>Михалевич В. М.</i> Многократный выбор решения при наличии одной из форм принципа гарантированного результата	43

Механіка

<i>Глухов Ю. П.</i> Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании	48
<i>Ефимова Т. Л.</i> Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных пластин из градиентных материалов	54
<i>Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Тарлаковський Д. В.</i> Действие нестационарной нагрузки на поверхность упругой полосы	59
<i>Мазнев А. В.</i> Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил	66

Фізика

<i>Вахненко В. О.</i> Застосування методу оберненої задачі розсіювання до рівняння Вахненка-Паркеса для опису взаємодії солітону з періодичною хвилею	73
---	----

Енергетика

<i>Жуйков В. Я., Кириленко А. В., Количенко М. Е.</i> Особенности перемежающихся хаотических процессов в кусочно-непрерывных системах	80
---	----

Матеріалознавство

<i>Іванов М. І., Березуцький В. В., Шевченко М. О., Кудін В. Г., Судаєцова В. С.</i> Термодинамічні властивості розплавів систем Al-Y (La, Eu, Yb)	85
--	----

Медицина

Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Копытко М. Ф., Москаленко А. Н., Хоменко Л. А. Математическое моделирование функциональной нагрузки при поражении твердых тканей зуба кариесом 177

Сергеева И. С., Брюзгина Т. С. Порівняльна характеристика жирнокислотного спектра в діагностичних фізіологічних середовищах хворих на генералізований пародонтит 183

Contents

Mathematics

Afanas'eva E. S. About the boundary behavior of ring Q -homeomorphisms on Riemannian manifolds 7

Kachurivsky R. I., Pelyukh G. P. On solutions of differential-functional equations of the neutral type bounded at $t \in \mathbb{R}^+$ 13

Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. The accuracy and reliability of the calculation of integrals by the Monte Carlo method 18

Kolodyazhny V. M., Lisina O. U. On the formation of the families of atomic radial basis functions 21

Martyniuk-Chernienko Yu. A. About the global existence of solutions of a set of differential equations 28

Information Science and Cybernetics

Hrytsyk V. V., Droniuk I. M., Nazarkevych M. A. Information identification on the basis of functional transformations of periodic Ateb-functions 33

Matychyn I. I. Control over systems with fractional derivatives under conflict conditions 38

Mykhalevich V. M. Multiple selection of a solution in the presence of one form of the principle of guaranteed result 43

Mechanics

Glukhov Yu. P. About one dynamic problem for a multilayered plate with rigid basis 48

Efimova T. L. Investigation of free vibrations of rectangular plates made of gradient materials 54

Kubenko V. D., Gavrilenko V. V., Tarlakovskii D. V. Action of a nonstationary load on the surface of an elastic strip 59

Maznyev A. V. Gyrostat regular precessions with variable gyrostat moment under the influence of potential and gyroscopic forces 66

Physics

Vakhnenko V. O. Applying the inverse scattering transform method to the Vakhnenko-Parkes equation to describe the interaction of a soliton and a periodic wave 73

Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець

Точність та надійність підрахунку інтегралів методом Монте-Карло

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Робота присвячена побудові методу Монте-Карло для обчислення інтегралів по обмеженій області, який дозволяє знаходити значення цих інтегралів із заданою точністю та надійністю, тобто побудові оцінок для цих інтегралів.

1. Випадкові процеси з просторів Орліча випадкових величин.

Означення 1 [1]. Парна неперервна опукла функція $U = (U(x), x \in \mathcal{R})$ називається \mathcal{C} -функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Означення 2 [1]. Нехай U — довільна \mathcal{C} -функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що $EU(\xi/r_\xi) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\|\xi\|_U = \inf\{r > 0; EU(\xi/r) \leq 1\}$, яка називається нормою Люксембурга.

Означення 3 [1]. Будемо говорити, що \mathcal{C} -функція задовольняє g -умову, якщо існують такі константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$ і $y \geq z_0$ виконується нерівність

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Приклад 1. Функція $U(x) = a|x|^\alpha$, $x \in \mathcal{R}$, $a > 0$, $\alpha \geq 1$ задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$. \mathcal{C} -функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $x \in \mathcal{R}$, що $\varphi = (\varphi(x), x \in \mathcal{R})$ довільна \mathcal{C} -функція задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = 1$ і $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geq 1$ тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Означення 4. Простір Орліча $L_U(\Omega)$ має властивість **H**, якщо для будь-яких центрованих, незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з простору $L_U(\Omega)$ виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_U^2,$$

де C_U — деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, що мають властивість **H**, наведені в роботах [1–4]. Зокрема, в роботі [2] показано, що цю властивість мають простори $L_p(\Omega)$ ($U(x) = |x|^p$), а в роботах [1, 3] показано, що цю властивість мають простори $L_U(\Omega)$, породжені функціями $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $1 \leq \alpha \leq 2$, $|x| > x_1$, де x_1 — деяка константа.

Означення 5. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес, \mathbf{T} — певна множина індексів, X — належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, коли при кожному $t \in \mathbf{T}$ випадкова величина $X(t) \in L_U(\Omega)$.

Нехай $\rho(t, s) = \|X(t) - X(s)\|_U$ — псевдометрика, що породжується в \mathbf{T} процесом $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\} \in L_U(\Omega)$. Розглянемо псевдометричний простір (\mathbf{T}, ρ) . Нехай $\mathbf{N}_\rho(v)$ — метрична масивність простору (\mathbf{T}, ρ) , тобто число замкнених куль радіуса v , що покривають множину \mathbf{T} .

2. Точність та надійність при обчисленні інтегралів методом Монте-Карло.

Нехай $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ — вимірний простір, μ — σ -скінченна міра, $p(s) \geq 0$, $s \in \mathcal{S}$ — така функція, що $\int_{\mathcal{S}} p(s) d\mu(s) = 1$. Нехай $m(A)$, $A \in \mathcal{A}$ — міра, яка визначається так: $m(A) = \int_A p(s) d\mu(s)$.

Оскільки $m(A)$ є ймовірнісною мірою, то простір $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ є ймовірнісним простором.

Нехай $f(s)$ — вимірна функція на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$. Розглянемо $\int_{\mathcal{S}} f(s)p(s) d\mu(s) = \mathcal{I}$ (вважається, що цей інтеграл існує). Ми можемо розглянути $f(s) = f$ як випадкові величини з $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ і $\int_{\mathcal{S}} f(s)p(s) d\mu(s) = \int_{\mathcal{S}} f(s) dm(s) = Ef$.

Нехай ξ_i , $i = 1, \dots, n$, — незалежні копії для випадкової величини f , $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, тоді $Z_n \rightarrow Ef_1 = \mathcal{I}$ з імовірністю одиниця. Розглянемо Z_n як оцінку для \mathcal{I} .

Означення 6. Z_n наближає \mathcal{I} з надійністю $1 - \delta$ ($0 < \delta < 1$) і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується така нерівність:

$$P\{|Z_n - \mathcal{I}| > \varepsilon\} \leq \delta.$$

Теорема 1. Нехай випадкова величина f належить простору $L_U(\Omega)$, який має властивість **H** з константою C_U . Тоді Z_n наближає \mathcal{I} з надійністю $1 - \delta$ і точністю ε , якщо виконується нерівність

$$n > \left(\frac{RU^{-1}(1/\delta)}{\varepsilon} \right)^2,$$

де $R = \left(1 + \frac{d_U}{U^{-1}(1)}\right) \|f\|_U$, d_U — константа з нерівності $E|\xi| \leq d_U \|\xi\|_U$ (див. теорему 2.3.2 з [1]).

3. Точність та надійність при обчисленні інтегралів, залежних від параметра, методом Монте-Карло. Розглянемо інтеграл $\int_{\mathcal{S}} f(s, t)p(s) d\mu(s) = \mathcal{I}(t)$. І нехай всі припущення в п. 2 вірні, але функція $f(s, t)$ залежить від $t \in \mathbf{T}$, де (\mathbf{T}, w) — компактний метричний простір. Нехай $f(s, t)$ — неперервна функція відносно t .

Розглянемо $\int_{\mathcal{S}} f(t, s)p(s) d\mu(s) = \mathcal{I}(t)$ і нехай цей інтеграл існує. Розглянемо $f(t, s)$ як випадковий процес на $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, m\}$ і $\mathcal{I}(t) = \int_{\mathcal{S}} f(t, s)p(s) d\mu(s) = \int_{\mathcal{S}} f(t, s) dm(s) = Ef(t)$.

Нехай $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — незалежні копії випадкового процесу $f(t)$, $Z_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(t)$, то $Z_n(t) \rightarrow Ef(t) = \mathcal{I}(t)$ з імовірністю одиниця для будь-якого $t \in \mathbf{T}$.

Означення 7. $Z_n(t)$ наближається до $\mathcal{I}(t)$ у просторі $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ з надійністю $1 - \delta > 0$ і точністю $\varepsilon > 0$, якщо виконується така нерівність:

$$P\left\{\sup_{t \in \mathbf{T}} |Z_n(t) - \mathcal{I}(t)| > \varepsilon\right\} \leq \delta.$$

Теорема 2. Нехай випадковий процес $f(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$, де $L_U(\Omega)$ має властивість **H** з константою C_U та функція U задовольняє умову **g**. Існує неперервна, зростаюча функція $\sigma = (\sigma(h), 0 \leq h \leq \delta_0)$, $\delta_0 = \sup_{t, s \in \mathbf{T}} \rho(t, s)$, що

$$\sup_{\rho(t, s) \leq h} \|f(t) - f(s)\|_U \leq \sigma(h)$$

$i \int_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N_w(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty$. Тоді $Z_n(t)$ наближає $\mathcal{I}(t)$ з надійністю $1 - \delta$ і точністю ε в просторі $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, якщо виконується така нерівність:

$$U\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\check{B}(t_0, \theta)}\right)^{-1} < \delta,$$

де

$$\check{B}(t_0, \theta) = \sup_{t \in \mathbf{T}} \|f(t) - \mathcal{I}(t)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\delta_0 \theta} \nu(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))) du,$$

$$\sigma_1(h) = \left(1 + \frac{d_U}{U^{-1}(1)}\right) \sigma(h), \quad \delta_0 = \sigma_1\left(\sup_{t,s \in \mathbf{T}} w(t,s)\right), \quad 0 < \theta < 1, \quad \nu(n)$$

мажоруюча характеристика $L_U(\Omega)$ (див. [1]).

Точність та надійність обчислення інтегралів за обмеженою областю вивчалися в роботі [5].

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: AMS, 2000. – 256 p.
2. *Мацак И. К., Пличко А. И.* Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах // Теория вероятностей и матем. статистика. – 1988. – № 38. – С. 81–88.
3. *Абжанов Е. А., Козаченко Ю. В.* Моментные нормы в некоторых пространствах Орлича // Там же. – 1989. – № 41. – С. 3–9.
4. *Багро С. В.* Некоторые вероятностные неравенства и центральная предельная теорема в функциональных пространствах // Там же. – 1991. – № 44. – С. 8–16.
5. *Kurbanmuradov O., Sabelfeld K.* Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields // Monte Carlo Methods and Appl. – 2006. – 12, No 3–4. – P. 211–229.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 10.11.2010

ДВНЗ “Ужгородський національний університет”

Yu. V. Kozachenko, Yu. Yu. Mlavets

The accuracy and reliability of the calculation of integrals by the Monte Carlo method

The paper is devoted to the Monte Carlo method construction for integrals over a limited area, which allows one to find the values of these integrals with given accuracy and reliability, that is to the construction of bounds for these integrals.