Київський університет ім. Тараса Шевченка

ISSN 0868-6904

ТЕОРІЯ ймовірностей та математична СТАТИСТИКА

86

2012

Видавництво ТВіМС

Зареєстрований 23 травня 2000 року.
Номер державної реєстрації КВ4229.
Засновники: Київський національний університет імені Тараса Шевченка та мале підприємство «ТВіМС».

Видавець: мале підприємство «ТВіМС»
Свідоцтво ДК110 від 05.07.2000 р.
Київ 03127, проспект Глушкова, 6

СКЛАД РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

Журнал *"Теорія ймовірностей та математична статистика"* виходить двічі на рік і перекладається на англійську мову Американським математичним товариством з 1970 року. У журналі публікуються оригінальні статті та огляди з різних питань теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів та полів, математичної статистики та їх застосувань. Рецензії на монографії та інформація відносно наукових подій публікуються як виключення. Всі матеріали, що надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ всі матеріали реферуються у "*Mathematical Reviews*" (AMS), "*Zentralblatt für Mathematik*" (Springer) та "*Statistical Methods and Applications*" (ISI).

Адреса редколегії: Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики
тел.: (044) 259–03–92
e-mail: tims@mail.univ.kiev.ua
http: probability.univ.kiev.ua/tims
http: www.ams.org/journals/tpms/

Журнал включено в каталог видань України ДП "Преса". Передплата здійснюється в усіх відділеннях "Укрпошти". Передплатний індекс 90216.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету.
Протокол № 8 від 24 квітня 2012 року.
Формат 70*108/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16.05.
Здано до друку 18.05.2012. Номер замовлення 12-142. Тираж 100 прим.

Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 86, 2012, стор. 92–107

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 86, 2012, pp. 92–107

ПРОСТОРИ БАНАХА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І Ю. Ю. МЛАВЕЦЬ

Анотація. Досліджуються властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Abstract. The properties of random variables and processes from spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ are investigated.

Аннотация. Исследования свойства случайных величин и процессов из пространства $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

1. Вступ

В роботі [1] (див. також роботу [2]) розглядався метод підрахунку інтегралів методом Монте-Карло

$$I(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} \dots \int f(t,\vec{x})p(\vec{x})\,dx, \qquad t \in \mathbf{T},$$

де $p(\vec{x})$ — щільність розподілу деякого вектора. Розглядались інтеграли, які залежать від параметра t, а в частинному випадку не залежить від нього. Знайдено умови, за яких ці інтеграли можна обчислити із заданою точністю та надійністю. При отриманні цих результатів використовувались методи теорії виадкових процесів з просторів Орліча.

Виявилось, що при застосуванні цих методів часто доцільно використовувати моментні норми, еквівалентні звичайним нормам в просторах Орліча, а саме, нормам Люксембурга. Для підрахунку багатьох інтегралів із заданою точністю та надійністю можна використовувати теорію просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, а саме банахових просторів з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонна зростаюча функція. Такі простори вводились в роботі [3].

Наша робота присвячена вивченню тих властивостей просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, які можна використати при дослідженні точності та надійності підрахунку інтегралів методом Монте-Карло. Крім того дослідження просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ мають самостійний інтерес. Їх можна використати при побудові моделей випадкових процесів, їх наближень і т. і. Далі передбачається опублікувати роботу, де результати цієї роботи будуть застосовуватись для дослідження точності та надійності методів Монте-Карло.

Робота складається з вступу та трьох розділів. В другому розділі вивчаються основні властивості просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі для певних просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ встановлено їх зв'язок з просторами Орліча. В четвертому розділі знайдено оцінки для розподілів супремумів процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 65C05.

Ключові слова і фрази. Простори Орліча, простори Банаха випадкових величин, випадкові процеси, моментні норми.

2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$-ПРОСТОРИ

Означення 2.1. Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ — монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$, якщо $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

В роботі ([3]) доведено, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}. \tag{1}$$

Зауваження 2.1. Твердження, що простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є лінійним нормованим простором, очевидне, а те, що він є простором Банаха доводиться аналогічно доведенню того, що простір Орліча випадкових величин є банаховим ([4]).

Теорема 2.1. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u\,(\psi(u))^u}{x^u}. \tag{2}$$

Доведення. З нерівності Чебишева випливає, що при $u > 0$ мають місце наступні нерівності

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^u}{x^u} \leq \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^u\,(\psi(u))^u}{(\psi(u))^u x^u} = \frac{\|\xi\|_\psi^u\,(\psi(u))^u}{x^u}. \quad \square$$

Приклад 2.1. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, то покажемо, що

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Дійсно, використовуючи попередню теорему, позначимо, що $b = \|\xi\|_\psi / x$. Мінімум виразу $b^u u^{\alpha u}$ набувається в точці $u = e^{-1} b^{-1/\alpha}$, то підставлючи це значення в формулу (2) отримаємо потрібне.

Приклад 2.2. Аналогічно попередньому прикладу отримаємо, якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^2}{4a}\right\},$$

якщо $x \geq \|\xi\|_\psi$.

Приклад 2.3. Якщо $\psi(u) = e^{u^2}$, то аналогічно попереднім прикладам отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{2\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\},$$

якщо $x \geq \|\xi\|_\psi$.

Означення 2.2. Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ будемо називати простором $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, якщо для функції $\psi(u)$ виконується умова

$$\sup_{u\geq 1}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}<\infty, \tag{3}$$

де $v>0$.

Зрозуміло, що умова (3) виконується для функцій:
1) $\psi(u)=e^{au^\beta}$, де $0<\beta\leq 1$, $a>0$,
2) $\psi(u)=Au^\alpha$, де $\alpha>0$, $A>0$.

Означення 2.3. ([5, 4]) Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\varkappa(n), n\geq 1)$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i=1,2,\dots,n$ з цього простору виконується нерівність

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right\|_\psi\leq\varkappa(n)\max_{1\leq i\leq n}\|\xi_i\|_\psi. \tag{4}$$

Теорема 2.2. *Послідовність*

$$\varkappa(n)=\sup_{u\geq 1}\inf_{v>0}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \tag{5}$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Нехай $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ випадкові величини з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $v>0$ виконується наступна нерівність

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right\|_\psi=\sup_{u\geq 1}\frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right)^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}\leq\sup_{u\geq 1}\frac{\left(\mathsf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|\right)^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u)}$$

$$\leq\sup_{u\geq 1}\max_{1\leq i\leq n}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{u+v}\right)^{\frac{1}{u+v}}}{\psi(u+v)}\cdot\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}\leq\max_{1\leq i\leq n}\|\xi_i\|_\psi\sup_{u\geq 1}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}.$$

Оскільки в останній нерівності v - будь-яке число ($v>0$), то з (4) випливає твердження теореми. □

Приклад 2.4. Для функції $\psi(u)=e^{u^2}$ мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n)=\exp\left\{\frac{3}{2^{2/3}}(\ln n)^{2/3}-1\right\}.$$

Використовуючи попередню теорему та знайшовши мінімум виразу $n^{\frac{1}{u+v}}e^{v^2+2uv}$, який набуває в точці $v=(\frac{1}{2}\ln n)^{1/3}-u$ і підставляючи в формулу (5), отримаємо шукане.

Для просторів $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ формулу для обчисислення мажоруючої характеристики $\varkappa(n)$ можна спростити.

Наслідок 2.1. *Послідовність*

$$\varkappa(n)=\inf_{v>0}z(v)n^{\frac{1}{v+1}}, \tag{6}$$

де $z(v)=\sup_{u\geq 1}\psi(u+v)/\psi(u)$ є мажоруючою характеристикою простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$.

Доведення. Дійсно, з (5) випливає

$$\sup_{u\geq 1}\inf_{v>0}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}\leq\inf_{v>0}\sup_{u\geq 1}n^{\frac{1}{u+v}}\frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}=\inf_{v>0}z(v)n^{\frac{1}{v+1}}.\quad\square$$

Приклад 2.5. Якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a \neq 0$, то мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n) = e^{2\sqrt{a\ln n} - a}.$$

Приклад 2.6. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то мажоруюча характеристика дорівнює

$$\varkappa(n) = (\ln n)^\alpha \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Мажоруючі характеристики для прикладів (2.5) і (2.6) мають однаковий вигляд, якщо використовувати формули (5) або (6).

Означення 2.4. Нехай S_k монотонно зростаюча послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \to \infty$, коли $k \to \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$, така що $\psi(u) \to \infty$ коли $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, якщо виконується умова

$$\sup_{k \geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty.$$

Як і в попередньому випадку, легко довести, що простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k \geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)}. \tag{7}$$

Теорема 2.3. *Якщо для функції ψ виконується умова (3) і існує $C_r > 0$ та справедливо*

$$\frac{\psi(S_k)}{\psi(S_{k-1})} \leq C_r, \qquad k \geq r,$$

то простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ містять ті ж самі елементи, що і простори $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, а норми (1) і (7) еквівалентні.

Доведення. Дійсно,

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} \leq \|\xi\|_\psi.$$

З другого боку з нерівності Ляпунова при $S_{k-1} \leq u \leq S_k$, де $k-1 \geq r$ справедливо, що

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} &\leq \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(u)} = \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \\ &\leq \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(u)} \leq \|\xi\|_{S_k,\psi,r} \cdot \frac{\psi(S_k)}{\psi(S_{k-1})} \leq C_r \|\xi\|_{S_k,\psi,r}. \end{aligned}$$

При $1 \leq u \leq S_r$ маємо, що

$$\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_r}\right)^{1/S_r}}{\psi(S_r)} \cdot \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)} \leq C_2 \|\xi\|_{S_k,\psi,r},$$

де $C_2 = \sup_{1 \leq u \leq S_r} \psi(S_r)/\psi(u)$, тоді

$$\|\xi\|_\psi \leq \max(C_2, C_r) \|\xi\|_{S_k,\psi,r}. \quad \square$$

Зауваження 2.2. Якщо умова теореми не виконується, то твердження теореми може бути невірним.

З просторів $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ найбільш важливим для нас є простір, де $S_k = 2k$. Позначимо норму в цьому просторі

$$\theta_{2,r}(\xi) = \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{2k}\right)^{1/2k}}{\psi(2k)}.$$

Зрозуміло, що у випадках, коли для ψ виконується умова (3), то простори $\check{\mathbf{F}}_{\psi}(\Omega)$ та $\mathbf{F}_{2k,\psi,r}(\Omega)$ співпадають і норми в цих просторах еквівалентні.

Дійсно, згідно попередньої теореми маємо, що

$$\theta_{2,r}(\xi) \leq \|\xi\|_{\psi}. \tag{8}$$

Зауважимо, що

$$\sup_{k\geq r} \frac{\psi(2k)}{\psi(2k-2)} = \sup_{k\geq r} \frac{\psi(2k-2+2)}{\psi(2k-2)} \leq \sup_{u\geq r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)} = \overline{\psi}_r < \infty,$$

тобто має місце

$$\|\xi\|_{\psi} \leq \overline{\psi}_r \theta_{2,r}(\xi). \tag{9}$$

Наступна теорема доводиться аналогічно теоремі 2.1.

Теорема 2.4. *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \inf_{k\geq r} \frac{\|\xi\|_{S_k,\psi,r}^{S_k} (\psi(S_k))^{S_k}}{x^{S_k}}. \tag{10}$$

Зокрема, при $S_k = 2k$ згідно попередньої теореми отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \leq \inf_{k\geq r} \frac{\|\xi\|_{2k,\psi,r}^{2k} (\psi(2k))^{2k}}{x^{2k}}.$$

Теорема 2.5. *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{k\geq r} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \tag{11}$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$.

Доведення. Згідно з доведенням теореми 2.2 розглянемо випадкові величини ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n з простору $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, тоді для будь-якого $v > 0$ виконуються наступна нерівність

$$\begin{aligned}
\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_{S_k,\psi,r} &= \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|)^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} \leq \sup_{k\geq r} \frac{\left(\mathsf{E}\,(\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|)^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k)} \\
&\leq \sup_{k\geq r} \max_{1\leq i\leq n} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^{S_k+v}\right)^{\frac{1}{S_k+v}}}{\psi(S_k+v)} \cdot \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_{S_k,\psi,r} \sup_{k\geq r} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)}.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності при $v > 0$ та з (4) випливає твердження теореми. □

Приклади випадкових величин з просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

Приклад 2.7. Будь-яка випадкова величина, що $|\xi| < \mathrm{const}$ з ймовірністю 1 належить всім просторам $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

Приклад 2.8. Випадкова величина, що має розподіл Лапласа (щільність розподілу $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$) належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$. Дійсно,

$$\sqrt[k]{\mathsf{E}\,|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k.$$

Приклад 2.9. Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить просторам $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$. Дійсно,

$$\sqrt[2l]{\mathsf{E}\,|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}.$$

Означення 2.5. ([1]) Простір Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин має властивість $\mathbf{H}$, якщо існує абсолютна константа C_B, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з $B(\Omega)$ виконується умова

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^2 \le C_B \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2. \tag{12}$$

Знайдемо умови, за яких для просторів $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$, а також значення константи C_B.

Теорема 2.6. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k — симетричні випадкові величини, де $k \ge \max(r, 2)$ і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1, \tag{13}$$

то має місце нерівність

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{14}$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (13), *виконується нерівність*

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \le 4\sum_{i=1}^{n} \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{15}$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l}\left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1, \tag{16}$$

то маємо нерівність

$$\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \theta_{2,r}^2(\xi_i). \tag{17}$$

Для того щоб довести теорему, потрібно довести деякі додаткові твердження.

Лема 2.1. *Нехай ξ і η випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Якщо ξ і η незалежні та $\mathsf{E}\,\eta = 0$, то має місце нерівність:*

$$\|\xi\|_\psi \le \|\xi - \eta\|_\psi. \tag{18}$$

Доведення. З теореми Фубіні випливає, що при $u > 1$

$$\mathsf{E}\,|\xi - \eta|^u = \mathsf{E}_\xi\left(\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|^u\right), \tag{19}$$

де E_ξ — математичне сподівання відносно ξ, а E_η — математичне сподівання відносно η. З нерівності Ляпунова випливає, що при $u \ge 1$

$$\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|^u \ge \left(\mathsf{E}_\eta\,|\xi - \eta|\right)^u \ge \left|\mathsf{E}_\eta\,(\xi - \eta)\right|^u = \left|\xi - \mathsf{E}_\eta\,\eta\right|^u = |\xi|^u.$$

Отже, з (19) випливає, що

$$\mathsf{E}\,|\xi-\eta|^u \ge \mathsf{E}\,|\xi|^u .$$

З останньої нерівності очевидно випливає (18). □

Доведення теореми. Нехай $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ симетричні, то всі непарні моменти дорівнюють нулю. Отже

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k}=\mathsf{E}\,\xi_1^{2k}+\sum_{s=2}^{2k-2}C_{2k}^s\,\mathsf{E}\,\xi_1^s\xi_2^{2k-s}+\mathsf{E}\,\xi_2^{2k}=\mathsf{E}\,\xi_1^{2k}+\sum_{r=1}^{k-1}C_{2k}^{2r}\,\mathsf{E}\,\xi_1^{2r}\,\mathsf{E}\,\xi_2^{2k-2r}+\mathsf{E}\,\xi_2^{2k}.$$

Оскільки $\mathsf{E}\,|\xi_i|^{2k}\le(\psi(2k))^{2k}\,\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_i)$, то

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}}&\le\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_1)+\sum_{r=1}^{k-1}C_{2k}^{2r}\,(\psi(2r))^{2r}\,(\psi(2k-2r))^{2k-2r}\,\frac{\theta_{2,r}^{2r}\,(\xi_1)\,\theta_{2,r}^{2k-2r}\,(\xi_2)}{(\psi(2k))^{2k}}\\&\quad+\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_2)\\&\le\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_1)+\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\theta_{2,r}^{2r}\,(\xi_1)\,\theta_{2,r}^{2k-2r}\,(\xi_2)+\theta_{2,r}^{2k}\,(\xi_2)\\&=\left(\theta_{2,r}^2\,(\xi_1)+\theta_{2,r}^2\,(\xi_2)\right)^k.\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає (14) при $n=2$.

Нехай тепер $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, а $\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*$ не залежать від ξ_i $(i=1,\dots,n)$, незалежні випадкові величини, що мають такий же розподіл як і ξ_i. Випадкові величини $\xi_i-\xi_i^*$ симетричні. З Леми (2.1) випливає, що

$$\begin{aligned}\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n\xi_i\right)&\le\theta_{2,r}^2\left(\sum_{i=1}^n(\xi_i-\xi_i^*)\right)\le\sum_{i=1}^n\theta_{2,r}^2\,(\xi_i-\xi_i^*)\\&\le\sum_{i=1}^n\left(\theta_{2,r}(\xi_i)+\theta_{2,r}(\xi_i^*)\right)^2=4\sum_{i=1}^n\theta_{2,r}^2\,(\xi_i)\,,\end{aligned}$$

де $\theta_{2,r}\,(\xi_i)=\theta_{2,r}\,(\xi_i^*)$. Нерівність (15) доведена.

Нерівність (17) доводиться аналогічно як і (14). Оскільки

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k}=\mathsf{E}\,\xi_1^{2k}+\sum_{s=2}^{2k-2}C_{2k}^s\,\mathsf{E}\,\xi_1^s\xi_2^{2k-s}+\mathsf{E}\,\xi_2^{2k}$$

і при парному s

$$\left|\mathsf{E}\,\xi_1^k\xi_2^{2k-s}\right|\le\frac{1}{2}\left(\mathsf{E}\,|\xi_1|^{s+1}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-s-1}+\mathsf{E}\,|\xi_1|^{s-1}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-s+1}\right),$$

то

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\xi_2)^{2k}\le\mathsf{E}\,|\xi_1|^{2k}+\sum_{l=1}^{k-1}R_{2k}^{2l}\,\mathsf{E}\,|\xi_1|^{2l}\,\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k-2l}+\mathsf{E}\,|\xi_2|^{2k},$$

де $R_{2k}^2 = R_{2k}^{2k-2} = C_{2k}^2 + \frac{1}{2}C_{2k}^3$, $R_{2k}^{2l} = C_{2k}^{2l} + \frac{1}{2}\left(C_{2k}^{2l+1} + C_{2k}^{2l-1}\right)$, $l \neq 1$, $l \neq k-1$. Легко показати, що $R_{2k}^{2l} \leq \left(1 + \frac{k}{3}\right) C_{2k}^{2l}$. Таким чином, справедлива нерівність

$$\begin{aligned}
C_{2k}\, \mathsf{E}\left(\xi_1 + \xi_2\right)^{2k} &\leq \frac{\mathsf{E}\left|\xi_1\right|^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1} C_{2k}^{2l}\left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \left(\frac{\mathsf{E}\left|\xi_1\right|^{2l}}{(\psi(2l))^{2l}}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{\mathsf{E}\left|\xi_2\right|^{2k-2l}}{(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}\right) \\
&\quad + \frac{\mathsf{E}\left|\xi_2\right|^{2k}}{(\psi(2k))^{2k}} \\
&\leq \theta_{2,r}^{2k}(\xi_1) + \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \theta_{2,r}^{2l}(\xi_1)\, \theta_{2,r}^{2k-2l}(\xi_2) + \theta_{2,r}^{2k}(\xi_2) \\
&= \left(\theta_{2,r}^2(\xi_1) + \theta_{2,r}^2(\xi_2)\right)^k.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає (14) при $n = 2$ і твердження теореми. □

З теореми (2.6) та нерівностей (8) і (9) випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k — симетричні випадкові величини, де $k \geq \max(r, 2)$ і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1,$$

то має місце нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leq \overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (13), виконується нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leq 4\overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l}\left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l}\,(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \qquad l = 1, \ldots, k-1,$$

то маємо нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leq \overline{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Розглянемо приклади просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, для яких виконуються попередні теореми.

Лема 2.2. *Має місце нерівність*

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\},$$

при $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$.

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}$$

та за формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} &= \frac{(2k)!l!(k-l)!}{(2l)!(2k-2l)!k!} = \frac{k^{2k} l^l (k-l)^{k-l}}{\sqrt{2} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} k^k} \exp\{\theta_{2k} + \theta_{2l} + \theta_k + \theta_l + \theta_{k-l}\} \\ &\le \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{24k} + \frac{1}{24l} + \frac{1}{24(k-l)} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{12l} + \frac{1}{12(k-l)}\right\} \\ &\le \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\}. \qquad \square \end{aligned}$$

Приклад 2.10. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \ge \frac{1}{2}$, тоді покажемо, що в цьому випадку виконується умова. Дійсно,

$$\begin{aligned} C_{2k}^{2l} \frac{(2l)^{2l\alpha}(2k-2l)^{(2k-2l)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} &= C_{2k}^{2l} \left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\alpha \\ &\le C_k^l \frac{l^{(2\alpha-1)l}(k-l)^{(2\alpha-1)(k-l)}}{k^{(2\alpha-1)k}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що при $\alpha \ge \frac{1}{2}$ і $k > 2$ має місце нерівність (13), тобто простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\alpha$ має властивість **H**. Можна показати, що при $\alpha < \frac{1}{2}$ цей простір властивість **H** не має.

Приклад 2.11. З леми 2.2 випливає також, що простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au}$, $a > 0$ також має властивість **H**.

3. Зв'язок з просторами Орліча

Означення 3.1 ([4]). Парна неперервна опукла функція $U = (U(x), x \in \mathbb{R})$ називається $\mathcal{C}$-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Означення 3.2 ([4]). Нехай U довільна $\mathcal{C}$-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що $\mathsf{E}\, U(\xi/r_\xi) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Розглянемо $\mathcal{C}$-функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \le x_\alpha, \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \tag{20}$$

де $x_\alpha = (2/\alpha)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ — простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \le 1$. Позначимо $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ — це сім'я ξ для яких існує r, що виконується $\mathsf{E}\, U_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\left\{r > 0; \mathsf{E}\, U_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 2\right\}.$$

Лема 3.1. *Для того, щоб $\xi \in L_U(\Omega)$ необхідно та достатньо, щоб $\xi \in S_{U_1}(\Omega)$ та справджувалися нерівності*

$$\|\xi\|_U \le \left(e^{2/\alpha+2}\right)\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1},$$
$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \le \|\xi\|_U\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}.$$

Доведення. Нехай $r>0$, то

$$\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) = \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right)\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r}\le x_\alpha\right\} + \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right)\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r}> x_\alpha\right\}$$
$$\le U(x_\alpha) + \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} = e^{2/\alpha} + \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\}$$

Нехай тепер $r = \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}$, тоді $\mathsf{E}U(\xi/\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}) \le e^{2/\alpha}+2$. Оскільки при $0<\alpha<1$ справджується нерівність $U(\alpha x)\le \alpha U(x)$ з книги [4, лема 2.2.2], то

$$\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}\left(e^{2\alpha}+2\right)}\right) \le \frac{1}{e^{2\alpha}+2}\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}}\right)\le 1$$

Отже,

$$\|\xi\|_U \le \left(e^{2/\alpha+2}\right)\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}. \tag{21}$$

Отримаємо другу нерівність. Легко бачити, що

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\} = \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\}\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r}< x_\alpha\right\} + \mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{r}\right|^\alpha\right\}\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r}\ge x_\alpha\right\}$$
$$\le \exp\left\{(x_\alpha)^\alpha\right\} + \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right).$$

Якщо покласти $r=\|\xi\|_U$, то маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\}\le e^{2/\alpha}+1. \tag{22}$$

Використовуючи нерівність, коли $0<a\le 1$, що $\exp\{|ax|\}-1\le a(\exp\{|x|\}-1)$ маємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\}-1\le\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\}-1\right).$$

Отже з (22) випливає, що

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\right\}-1\le\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U}\right|^\alpha\right\}-1\right)$$
$$\le\frac{1}{e^{2/\alpha}+1}\left(e^{2/\alpha}+1-1\right)=\frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1}.$$

Отримали

$$\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{\xi}{\|\xi\|_U\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}\right|^\alpha\right\}\le\frac{e^{2/\alpha}}{e^{2/\alpha}+1}+1\le 2.$$

З цього випливає, що $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}\le\|\xi\|_U\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}$. □

Лема 3.2. *Справджується нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}\ge\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}\left(\sup_{n\ge1}\frac{\left(\mathsf{E}|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

при $0<\alpha<1$.

Доведення. Справедливі нерівності

$$x^n \exp\{-x^\alpha\} \le \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$x^n \le \exp\{x^\alpha\} \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\}.$$

Отже,

$$\frac{\mathsf{E}\,|\xi|^n}{r^n} \le \mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{r}\right)^\alpha\right\}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$\mathsf{E}\,|\xi|^n \le \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1}^n 2\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{n/\alpha} \exp\left\{-\frac{n}{\alpha}\right\},$$

$$\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n} \le \langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} 2^{1/n}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Оскільки $\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\{r > 0; \mathsf{E}\exp\{(\xi/r)^\alpha\}\} \le 2$, то

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \ge \left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n} \frac{1}{2^{1/n}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}} \ge \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}. \quad \square$$

Лема 3.3. *Справджується нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \le \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}\left(\sup_{n\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

при $0 < \alpha < 1$.

Доведення. З нерівності Ляпунова випливає, що при $0 < \alpha < 1$ має місце нерівність

$$\mathsf{E}\,|\xi|^{n\alpha} \le \left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^\alpha.$$

Позначимо $J_\alpha = \mathsf{E}\exp\{|\xi|^\alpha/r^\alpha\} - 1$. Отже,

$$J_\alpha = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathsf{E}\,|\xi|^{n\alpha}}{n!r^{\alpha n}} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^\alpha}{n!r^{\alpha n}}.$$

Нехай $\hat{z} = \sup_{n\ge1}\left(\mathsf{E}\,|\xi|^n\right)^{1/n}/n^{1/\alpha}$. Оскільки $\mathsf{E}\,|\xi|^n \le \hat{z}^n n^{n/\alpha}$, то

$$J_\alpha \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\hat{z}^{n\alpha} n^n}{n!\,r^{\alpha n}}.$$

З формули Стірлінга випливає, що

$$J_\alpha \le \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n \frac{e^{1/12n}}{\sqrt{2\pi n}} \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\hat{z}^\alpha e}{r^\alpha}\right)^n.$$

Покладемо $r = \frac{1}{s^{1/\alpha}}\hat{z}e^{1/\alpha}$, де $0 < s < 1$, тоді

$$J_\alpha \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^\infty s^n = \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\frac{s}{1-s}.$$

Якщо покласти $s = \left(1 + e^{1/12}/\sqrt{2\pi}\right)^{-1}$, то отримаємо

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{\left(\frac{1}{s^{1/\alpha}}\hat{z}e^{1/\alpha}\right)^\alpha}\right\} \le 2.$$

Отже, виконується твердження леми. $\square$

Теорема 3.1. *Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана як (20) містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, причому норми в цих просторах еквівалентні.*

Теорема випливає з лем 3.1, 3.2 і 3.3 та теореми 2.3.

Інші випадки еквівалентності просторів Орліча і $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ розглянуто в книжці [4] і в роботі [6].

4. Випадкові процеси

Означення 4.1. Нехай $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ — це один з просторів Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ або $\mathbf{F}_{S_k,\psi}(\Omega)$. Норму в цих просторах будемо позначати $\|\cdot\|$.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ — компактний метричний простір, ρ — метрика. Розглянемо $N(u)$ – метричну масивність простору $(\mathbf{T}, \rho)$ і $\gamma = \sigma\left(\sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)$, то $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(\gamma p^k\right)$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $p \in (0,1)$. $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ — множина центрів замкнених куль радіуса не більше ε_k, що покривають $(\mathbf{T}, \rho)$ причому число цих куль мінімальне (мінімальна ε_k сітка), тобто $\mathbf{V} = \bigcup_{k=0}^\infty \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$. Коли $k = 0$, то $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}(\gamma) = \sigma^{(-1)}\left(\sigma\left(\sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)\right) = \sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)$.

Означення 4.2. Випадковий процес $X \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$.

Теорема 4.1. *Нехай $X(t)$ — сепарабельний процес на $(\mathbf{T}, \rho)$ з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ і виконується умова*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \|X(t) - X(s)\| \le \sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\int_0^\varepsilon \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty$$

та $\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, то

$$\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| \le B(p),$$

де

$$B(p) = \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

де $\varkappa(n)$ — мажоруюча характеристика.

Доведення. При деякому $u > 1$ справедливо

$$\mathsf{P}\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \le \frac{\mathsf{E}\,|X(t) - X(s)|^u}{\varepsilon^u} \le \frac{\|X(t) - X(s)\|^u_{\mathbf{F}_\psi} (\psi(u))^u}{\varepsilon^u}$$
$$\le \frac{\sigma(\rho(t,s))(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

При будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при } \rho(t,s) \to 0.$$

Отже, це процес неперервний за ймовірністю, тому $\mathbf{V}$ — сепаранта та

$$\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| = \sup_{t\in\mathbf{V}} |X(t)|.$$

Введемо відображення $\alpha_k(t)$, де $t \in \mathbf{V}$. $\alpha_k(t)$ — це точка з $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$, така що $\rho(t, \alpha_k(t)) \le \varepsilon_k$ (якщо $t \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ то $\alpha_k(t) = t$).

Нехай t — довільна точка з $\mathbf{V}$, тоді $t \in \mathbf{V}_{\varepsilon_m}$ (де m — деяке число). Тоді покладемо $t_m = t$, тоді $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1})$, $\dots$, $t_1 = \alpha_1(t_2)$, $t_0 = \alpha_0(t_1)$ і

$$\begin{aligned}X(t) &= X(t_m)\\ &= X(t_m) - X(t_{m-1}) + X(t_{m-1}) - X(t_{m-2}) + X(t_{m-2}) - \dots\\ &\quad - X(t_1) - X(t_0) + X(t_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|X(t)| &\le |X(t_m) - X(t_{m-1})| + |X(t_{m-1}) - X(t_{m-2})| + \dots + |X(t_1) - X(t_0)| + |X(t_0)|\\ &\le \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(\alpha_{m-1}(t))| + \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(\alpha_{m-2}(t))| + \dots\\ &\quad + \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}} |X(t) - X(t_0)| + |X(t_0)|.\end{aligned}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| = \sup_{t\in\mathbf{V}} |X(t)| &\le |X(t_0)| + \sum_{l=1}^{m} \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|\\ &\le |X(t_0)| + \sum_{l=1}^{\infty} \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|,\end{aligned}$$

то

$$\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| \le \|X(t_0)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \left\|\max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} |X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))|\right\|,$$

тоді випливає, що

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_l)) \max_{t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_l}} \|X(t) - X(\alpha_{l-1}(t))\|\\ &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_l))\, \sigma(\varepsilon_l)\\ &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\right) \gamma p^{k-1}.\end{aligned}$$

Оцінемо

$$\begin{aligned}\int_{\gamma p^{k+1}}^{\gamma p^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du &\ge \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\right) (\gamma p^k - \gamma p^{k+1})\\ &= \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\right) \gamma p^{k-1}(p - p^2)\end{aligned}$$

і отримаємо, що

$$\gamma p^k \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\gamma p^k)\right)\right) \le \frac{\int_{\gamma p^{k+1}}^{\gamma p^k} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du}{p(1-p)},$$

то підставляючи в попередню нерівність, отримаємо

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\| &\le \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{p(1-p)} \int_{\gamma p^{l+1}}^{\gamma p^l} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\\ &= \inf_{t\in\mathbf{T}} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du. \quad \square\end{aligned}$$

Наслідок 4.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес і $\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| \in \mathbf{F}_\psi^*(\Omega)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1} \frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Приклад 4.1. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| > x\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{B(p)}\right)^{1/\alpha}\right\}.$$

Приклад 4.2. Якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \le \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{x}{B(p)}\right)^2}{4a}\right\},$$

коли $x \ge B(p)$.

Приклад 4.3. Якщо $\psi(u) = e^{u^2}$, то

$$\mathsf{P}\left\{|\xi| > x\right\} \le \exp\left\{-\frac{2\left(\ln\frac{x}{B(p)}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\},$$

коли $x \ge B(p)$.

Наслідок 4.2. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$. Нехай виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h} \left\|X(t) - X(s)\right\| \le \sigma(h), \tag{23}$$

де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ — неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty$$

тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$, та для будь-якого $0 < p < 1$ справджується нерівність

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|\right\| \le \widetilde{B}(p), \tag{24}$$

де

$$\widetilde{B}(p) = \inf_{t\in[0,T]} \|X(t)\| + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du,$$

$\gamma = \sigma(T)$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge1} \frac{\widetilde{B}^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{25}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 4.1. Оскільки метрична масивність інтервалу $[0,T]$ оцінюється у такий спосіб

$$N(u) \le \frac{T}{2u} + 1. \quad \square$$

Наслідок 4.3. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $\mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$. Нехай для деякого $\beta < 1$ виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h} \left\|X(t) - X(s)\right\| \le \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{T}{2h} + 1\right)\right)^{1/\beta}}. \tag{26}$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| \in \mathbf{F}^*_\psi(\Omega)$ *та справджується нерівність*

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{t\in[0,T]}\|X(t)\| + \frac{C^\beta}{(1-\beta)}\left(\frac{C^\beta}{\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{(1-\beta)/\beta}\frac{(1+\beta)^{\beta+1}}{\beta^\beta} = \widetilde{B}.$$

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \inf_{u\ge 1}\frac{\widetilde{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}. \tag{27}$$

Доведення. Наше твердження випливає з попереднього наслідку. Дійсно,

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\varkappa\left(\frac{T}{2h}+1\right)\right)^{1/\beta}},$$

то легко бачити, що

$$\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du = \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\gamma p}\frac{C^\beta}{u^\beta}\,du = \frac{C^\beta}{1-\beta}\gamma^{1-\beta}\frac{1}{(1-p)p^\beta}.$$

Якщо цей вираз мінімізувати по p, то з нерівності (24) отримаємо наше твердження. □

Позначимо

$$B(\beta) = \frac{C^\beta}{(1-\beta)}\left(\frac{C^\beta}{\varkappa\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{(1-\beta)/\beta}\frac{(1+\beta)^{\beta+1}}{\beta^\beta}.$$

Приклад 4.4. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = u^\alpha$ і покладемо

$$\sigma(h) = \frac{C}{\left(\ln\left(\frac{T}{2h}+1\right)\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha/\beta}},$$

тоді

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{0\le t\le T}\sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}|X(t)|^u\right)^{1/u}}{u^\alpha} + B(\beta) = B_{u^\alpha}.$$

І для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{x}{B_{u^\alpha}}\right)^{1/\alpha}\right\}$$

Приклад 4.5. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$ і покладемо

$$\sigma(h) = \frac{C}{\exp\left\{\left(2\sqrt{a\ln\left(\frac{T}{2h}+1\right)}-a\right)\frac{1}{\beta}\right\}}$$

і

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|\right\| \le \inf_{0\le t\le T}\sup_{u\ge 1}\frac{\left(\mathsf{E}|X(t)|^u\right)^{1/u}}{e^{au}} + B(\beta) = B_{e^{au}}.$$

І для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{x}{B_{e^{au}}}\right)^2}{4a}\right\}.$$

5. Висновки

В роботі вивчаються властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Надалі планується публікація, де результати цієї роботи використовуються для вивчення методів Монте-Карло і підрахунку кратних інтегралів із заданою точністю.

Література

1. Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets, *Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space*, Monte Carlo Methods Appl. **17** (2011), no. 17, 155–168.
2. O. Kurbanmuradov and K. Sabelfeld, *Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields*, Monte Carlo Methods Appl. **12** (2006), no. 3–4, 211–229.
3. С. В. Ермаков, Е. И. Островский, *Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей*, Деп. в ВИНИТИ №3752-В.86.0., 1986.
4. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
5. E. A. Abzhanov and Yu. V. Kozachenko, *Some properties of random processes in Banach K_σ-spaces*, Ukrain. Math. J. **37** (1985), no. 3, 275–280.
6. Yu. V. Kozachenko and E. I. Ostrovskij, *Banach spaces of random variables of subgaussian type*, Theory Probab. Math. Statist. **32** (1985), 45–56.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: ykoz@ukr.net

Кафедра кібернетики і прикладної математики, математичний факультет, Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський національний університет", вул. Університетська, 14, Ужгород 88000, Україна

Адреса електронної пошти: yura-mlavec@ukr.net

Надійшла 17/11/2011