МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра оптики

В.С. Шуста, О.О. Гомоннай, О.Г. Сливка, О.В. Гомоннай

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Методичні вказівки

до фізичного практикума "Медична та біологічна фізика"

(для студентів 1-го курсу стоматологічного факультету)

Ужгород-2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
”УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра оптики

В.С. Шуста, О.О. Гомоннай, О.Г. Сливка, О.В. Гомоннай

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Методичні вказівки

до фізичного практикума “Медична та біологічна фізика“

(для студентів 1-го курсу стоматологічного факультету)

Ужгород-2020

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу
“Медична та біологічна фізика“
для спеціальності 7.221 - стоматологія

Автори: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Шуста В.С.
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Гомоннай О.О.
доктор фіз.-мат. наук, професор Сливка О.Г.
доктор фіз.-мат. наук, ст. наук.співроб. Гомоннай О.В.

Методичні вказівки знайомлять студентів із сучасними методами обробки результатів вимірювань в об’ємі, достатньому для виконання лабораторних робіт з дисципліни “Медична та біологічна фізика”.

Основними завданнями даних методичних вказівок є:

– допомогти студентам медичних спеціальностей, на прикладі вимірювань фізичних величин, оволодіти основами проведення медико-біологічних досліджень, статистичної обробки даних та обґрунтування отриманих результатів. Для цього необхідно навчитися обчислювати довірчі інтервали при довільному числі вимірювань з врахуванням довірчої ймовірності, самостійно вибирати оптимальне число вимірювань, вміти представляти інформацію в графічному та табличному виді із вказанням похибок вимірювань, оволодіти навиками перевірки статистичних гіпотез;

– надати необхідні початкові знання для вивчення студентами стоматологічного факультету навчальних дисциплін “Медична інформатика“ та “Біостатистика“.

Рецензенти:

Рубіш В.М. – завідувач лабораторії Інституту проблем реєстрації інформації НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор.

Лопушанський В.В. - кандидат фіз.-мат. наук, с. н. с. Інституту електронної фізики НАН України

Рекомендовано до друку методичною радою фізичного факультету Ужгородського національного університету

Протокол № __ від __ ________ 2020 р

Зміст

Вступ

Статистичні методи дослідження є важливим інструментом обробки великих масивів інформації з метою виявлення закономірностей, які лежать в основі явищ, що вивчаються, і перевірки обґрунтованості гіпотез, які висуваються. Саме медичні дослідження вимагають об'єктивного аналізу отриманих даних, оскільки неправильні висновки з отриманих результатів можуть завдати шкоди здоров'ю людини. Знання основ математичної статистики необхідне на всіх етапах проведення медико-біологічних досліджень: при формулюванні мети, плануванні експерименту, отриманні даних, первинній обробці, побудові та перевірці гіпотез, побудові математичних моделей. Застосування статистичних методів вкрай важливе при оформленні результатів роботи у вигляді звітів, журнальних статей, монографій. Саме з публікацій в медичних журналах і монографіях лікарі дізнаються про нові методи діагностики та лікування. Тому факти, що приводяться в цих публікаціях повинні бути достовірними. Знання сучасних статистичних методів медико-біологічних досліджень є особливо актуальним, в зв'язку з впровадженням в Україні, міжнародного стандарту Належної статистичної практики (GSP)- стандарту від якого залежить коректність результатів, отриманих при проведені тих або інших досліджень.

Отже, знання основ проведення медичних досліджень, статистичної обробки даних і обґрунтування отриманих даних є невід'ємною частиною підготовки майбутнього лікаря.

Лабораторний практикум з медичної та біологічної фізики є початковим етапом, необхідним для набуття майбутніми медиками елементарних навиків, як в плані ознайомлення з найбільш поширеними методами вимірювань, планування експерименту, використанням основних універсальних вимірювальних приладів, так і в набутті навиків обробки результатів вимірювань, враховуючи систематичні та випадкові похибки, та ознайомленні з основами сучасних методів статистичної обробки і графічного аналізу даних.

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

ОСНОВИ ВИМІРЮВАНЬ. ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ, ЇХ ВИДИ

Будь-які знання, в тому числі і медичні, ми отримуємо за допомогою вимірювань. ***Вимірюванням*** якої-небудь фізичної величини називається операція в результаті якої ми порівнюємо величину, що вимірюється із відповідною величиною, що приймається за еталон. Кінцева мета будь-якого експерименту – одержати значення вимірюваної фізичної величини. **Фізична величина** - це властивість, в якісному відношенні загальна для багатьох фізичних об’єктів (процесів, що протікають в них), але індивідуальна в кількісному відношенні для кожного об’єкту.

Вимірювання поділяються на прямі і непрямі:

-прямими називаються вимірювання, при яких шукане значення величини знаходиться безпосередньо з досліду, шляхом відліку за шкалою вимірювального приладу, наприклад: вимірювання довжини лінійкою, визначення температури тіла термометром і т.д;

-непрямими називаються вимірювання, при якому шукане значення величини знаходять на підставі відомої залежності між цією величиною і величинами, що визначаються прямим вимірюванням, наприклад: визначення густини тіла з його геометричних розмірів та маси, визначення сили струму з напруги та опору і т.д.

Як відомо, **жодне вимірювання не може бути виконане абсолютно точно.** Неконтрольовані причини, що призводять до появи похибок вимірювань є досить різноманітними: це і невизначенність самої вимірюваної величини, і коливання інших величин, що не мають прямого відношення до вимірюваної величини, але які впливають на покази приладів та на результат вимірювання, недосконаліcть процедури вимірювання, приладів і органів чуття експериментатора. В залежності від закономірностей появи похибок, розрізняють три види: **систематичні, випадкові** та **промахи**.

Систематичними називаються похибки, величина яких не змінюється при повторенні вимірювань даної величини при однакових умовах вимірювання. Систематичні похибки виникають у тих випадках, коли не враховується вплив на результати експерименту різних постійно діючих факторів, наприклад: температури, тиску, опору проводів, і т.д. Джерелом систематичних похибок може бути також неточність градуювання вимірювального приладу або його несправність.

Систематичні похибки можна розділити на 4 групи:

1. Похибки, природа яких відома й величина може бути досить точно визначена. Такі похибки прийнято називати поправками. До таких похибок можна віднести, наприклад, видовження лінійки або іншого вимірювального приладу, викликані зміною температури.

2. Похибки відомого походження, але невідомої величини, до яких відноситься похибка вимірювальних приладів. Так, наприклад, на вимірювальних приладах вказано клас точності 0,5. Це означає, що показання приладу правильні з точністю 0,5% від всієї діючої шкали приладу.

3. Систематичні похибки, про існування яких не підозрюють, хоча величина їх може бути значною. Вони найчастіше проявляються при складних вимірюваннях. Встановити їх причину не завжди просто, і для їх виявлення експериментатору необхідно провести додаткові незалежні дослідження.

4. Систематичні похибки, обумовлені властивостями вимірюваного об’єкта. Так, наприклад, було проведено вимірювання площі поперечного переріза циліндра. У процесі вимірювання вважалося, що циліндр мав круглий поперечний переріз, у дійсності – форму еліпса, якщо виміряти тільки один діаметр, то обчислена по цих вимірюваннях площа буде містити систематичну похибку, обумовлену ступенем еліптичності циліндра й вибраним для вимірювання діаметром.

Випадковими називаються похибки, величина й знак яких змінюється непередбаченим шляхом при повторних вимірюваннях даної величини, при однакових умовах. Джерелом випадкових похибок може бути й сам експериментатор через недосконалість органів його відчуття. Так, наприклад, результати повторних вимірювань періоду коливань математичного маятника за допомогою дуже точного секундоміра обов’язково виявляються трохи відмінними один від одного внаслідок того, що моменти знаходження маятника у відповідних фазах відхилення фіксуються неточно: при пуску секундоміра експериментатор може трохи забаритися або, навпаки, при його зупинці, поспішити. Причиною випадкових похибок може бути і сам фізичний процес, наприклад- радіоактивний розпад.

Випадкові похибки відхиляють результат то в одну, то в іншу сторону від істинного значення вимірюваної величини $x_{іст}$, тому результати великої кількості вимірювань симетрично розташовуються відносно $x_{іст}$.

Промах – це груба похибка, викликана неуважністю експериментатора (невірний відлік показів приладу, описка при записі показів і т.д.). Промахи можуть сильно спотворити результати вимірів, особливо в тих випадках, коли їхнє число невелике. Їх варто виключати з результатів вимірювань.

Таким чином, вимірюване значення завжди відрізняється від істинного значення $x_{іст}$, тому задачею експериментатора є не тільки визначення вимірюваної величини $x_{вим}$, але і оцінка похибки вимірювання Δx,

$$x_{вим} = x_{іст} + \Delta x .$$

Під **істинним значенням фізичної величини** ми будемо розуміти значення, яке ідеально відтворює властивості даного об'єкта в кількісному та в якісному відношенні. Різниця між результатом вимірювання та істинним значенням вимірюваної величини називається **абсолютною похибкою** вимірювання й визначається формулою:

$$\Delta x = x_{вим} - x_{іст}$$

В окремих дослідах похибка Δx приймає значення Δx_i ($i = 1, 2, \ldots -$номер вимірювання), які непов'язані між собою і є непередбачуваними. Такі величини носять назву **випадкових** і для їх опису використовуються методи математичної статистики (теорії ймовірності). Результати вимірювань $x_{вим}$, оскільки вони містять випадкову величину- похибку, також є випадковою величиною, що приймає в окремих дослідах значення:

$$x_i = x_{іст} + \Delta x_i$$

Поряд з абсолютною похибкою, використовується **відносна похибка** ε_i**,** що рівна відношенню абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x_i}{x_{іст}} \cdot 100\% .$$

ПАРАМЕТРИ СТАТИСТИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ ТА ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Результати окремих експериментів, як ми вже відмічали, непередбачувані, але це не означає, що вони не підлягають ніяким закономірностям. Закони, якими описуються результати вимірювання існують і мають **статистичний характер**. При обробці експериментальних результатів ставиться завдання – встановити ці закони і скористатися ними для досягнення основної мети – отримати із досліду якнайкращу **оцінку** істинного значення вимірюваної величини і охарактеризувати **якість цієї оцінки**. Отже, математичні закони теорії ймовірності не є безпредметними абстракціями, позбавленими фізичного змісту, вони є математичним виразом реальних закономірностей, що фактично існують в масових випадкових явищах природи. Розробка методів реєстрації, опису і аналізу статистичних експериментальних даних, що отримуються в результаті спостереження масових випадкових явищ, є предметом спеціальної науки - **математичної статистики.** Залежно від характеру практичного питання і від об'єму наявного експериментального матеріалу ці завдання можуть приймати ту або іншу форму. Найбільш типові завдання математичної статистики, що часто зустрічаються на практиці при проведенні медико-біологічних досліджень:

1. Завдання визначення закону розподілу випадкової величини (або системи випадкових величин) за статистичними даними.
2. Задача перевірки справедливості гіпотез.
3. Знаходження взаємозв'язку між явищами.

Параметри статистичних розподілів

Величина x, що є результатом досліду, як правило є випадковою величиною, тобто заздалегідь непередбачувана і змінюється від досліду до досліду. Провівши дослід з нескінченної кількості вимірювань, ми отримаємо **генеральну сукупність** - повний набір всіх значень, які може приймати випадкова величина. У реальних умовах дослід проводиться скінченну кількість раз, і ми отримуємо **вибірку**, що складається із скінченного числа значень випадкової величини. Це число називається об'ємом вибірки. Генеральна сукупність - граничний випадок вибірки з нескінченно великим об'ємом. Між параметрами вибірки і параметрами генеральної сукупності є принципова відмінність. Якщо узяти декілька вибірок одного і того ж об'єму *n*, тобто провести декілька серій дослідів або *n* вимірювань в кожній серії, то, через випадковий характер вимірюваних величин, параметри вибірок відрізнятимуться один від одного. Іншими словами, параметри серій вимірювань (наприклад, середні значення результатів вимірювань в серії) є випадковими навіть за незмінних умов досліду. Параметри ж генеральної сукупності за заданих умов досліду незмінні. Тому спочатку розглянемо параметри генеральної сукупності, які математично описуються простіше, ніж параметри вибірки.

Параметри генеральної сукупності:

1.**Середнє значення** $\langle x\rangle$ (або математичне очікування (μ))

$$\mu = \langle x\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1)$$

Середнє значення, що відповідає нескінченному числу вимірювань, будемо позначати $\langle x\rangle$, щоб відрізнити його від середнього значення $\bar{x}$, що відповідає серії з *n* вимірювань. При відсутності похибок воно співпадає з істинним значенням вимірюваної величини.

2. **Дисперсія** D - середній квадрат відхилення випадкової величини від середнього значення

$$D_x = \sigma_x^2 = \left\langle (x_i - \langle x\rangle)^2 \right\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2 \quad (2)$$

3. **Середньоквадратичне (стандартне) відхилення** σ_x, що характеризує розкид випадкових величин:

$$\sigma_x = \sqrt{D} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2} \qquad (3)$$

Величину σ_x називають також **середньоквадратичною похибкою**.

При обробці результатів вимірювань важливе значення має закон додавання дисперсій :

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 .$$

Він завжди використовується тоді, коли потрібно визначити похибки результату, обумовленого сукупністю різних незалежних факторів.

Закони розподілу випадкових величин

При обробці великих об'ємів статистичних даних важливим є питання встановлення законів розподілу тих чи інших випадкових величин. ***Математичний вираз, що пов'язує можливі значення випадкової величини та ймовірність їх появи, називають*** **<u>законом розподілу випадкових величин.</u>**

Розподіл дискретних випадкових величин характеризують ймовірністю їх появи. Якщо при проведенні n дослідів із них в n_k величина x прийняла значення x_k то **ймовірністю** появи значення x_k називається величина $P(x_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_k}{n}$. Очевидно, що $\sum\limits_{k=1}^{N} n_k = n$, де N-число можливих значень випадкової величини x. Звідси випливає умова нормування:

$$\sum_{k=1}^{N} P(x_k) = 1 ,$$

зміст якої в тому, що ймовірність появи будь-якого значення x рівна одиниці.

Таким чином, найбільш простою формою задання закону розподілу дискретної величини є задання можливих величин ймовірності кожного із отриманих значень $P(x = x_1)$, $P(x = x_2)$, $P(x = x_3) \ldots P(x = x_k)$. Тобто розподіл дискретної випадкової величини повністю визначається за допомогою наступної таблиці:

Значення вимірюваної величини, *x*	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Ймовірність її появи, *P*	P_1	P_2	P_3	…	P_n

У випадку неперервних випадкових величин ймовірність виявити серед кінцевого набору числових значень деяке наперед задане число практично рівна нулю. Тоді більш змістовним буде питання: скільки вимірюваних значень $x_{вим}$ лежить в певному інтервалі від x до $x + \Delta x$; яка ймовірність того що випадкова величина прийме значення, менше наперед заданого значення x_0; яка ймовірність того що випадкова величина знаходиться в інтервалі від x до $x + \Delta x$.

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше наперед заданого значення x_0 є деякою функцією $F(x)$:

$$F(x) = P(x < x_0).$$

Ця функція $F(x)$ називається **<u>функцією розподілу ймовірності</u>** випадкової величини або **інтегральною** функцією розподілу.

Визначимо ймовірність події, яка полягає в тому, що значення вимірюваної величини попадає в інтервал Δx. Припустимо, що проведено n вимірювань деякої випадкової величини $x: x_1, x_2, \ldots x_n -$ однаковими методами. Можна очікувати, що число Δn отриманих результатів, які лежать в деякому достатньо вузькому інтервалі від x до $x+\Delta x$, повинно бути пропорційне:

- величині даного інтервалу Δx;
- загальному числу вимірювань n.

Таким чином, можна записати, що $\Delta n = f(x) \cdot n \cdot \Delta x$, де $f(x)$ - функція, що характеризує розподіл значень випадкових величин по різних інтервалах. Ймовірність $P(x)$ того, що деяке значення x лежить в інтервалі від x до $x+\Delta x$, визначається наступним чином

$$P(x) = \frac{\Delta n}{n} = f(x)\Delta x.$$

Функція *f(x)* називається **функцією розподілу густини ймовірності** випадкової величини. Із приведеної вище формули слідує, що

$$f(x) = \frac{\Delta n}{n\Delta x} = \frac{P(x)}{\Delta x}.$$

Як постулат теорії похибок приймається, що результати вимірювань і їх випадкові похибки при великій їх кількості описуються законом нормального розподілу.

Емпіричний закон розподілу густини ймовірності неперервної випадкової величини

Щоб поняття функції розподілу стало більш наочним, зобразимо результати серії вимірювань графічно. Припустимо, що ми провели n вимірювань величини x і отримали набір значень $x_{вим}$. Виділимо на осі x такий інтервал $x_{\min} < x < x_{\max}$, що всі значення лежать усередині цього інтервалу. Розіб'ємо його на k рівних відрізків довжиною $\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$ і полічимо скільки значень $x_{вим}$ із загального числа n результатів вимірювань попаде в кожний із цих проміжків. Число вимірювань, результати яких попали в інтервал Δx позначимо через Δn. По вертикальній осі будемо відкладати долю вимірювань $\Delta n/n$ поділену на величину Δx. В результаті отримаємо ступінчатий графік, подібний показаному на рис.1. Цей графік називається ***гістограмою***.

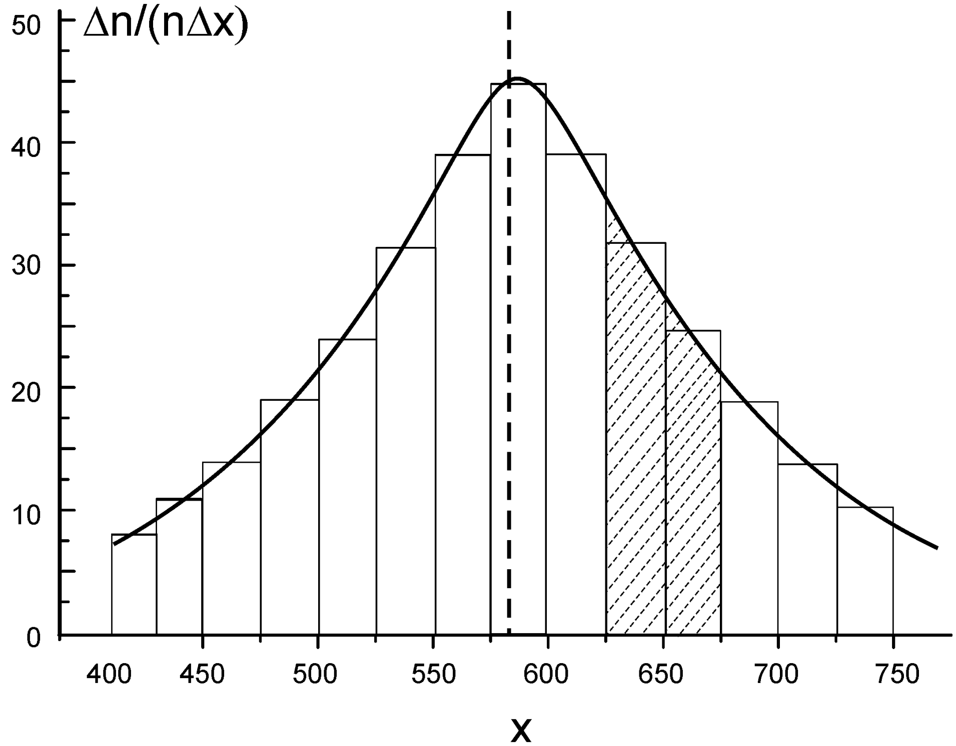

Рис 1. Гістограма.

Площа кожного із прямокутників рівна $\frac{\Delta n_k}{n}$- відносній частоті (ймовірності) попадання результатів вимірювань в проміжок Δx_k. Якщо число вимірювань n невелике, гістограма може мати досить неправильний вигляд, що залежить від випадковості значень $x_{вим}$, але якщо n росте, то у формі гістограми краще виявляються закономірності, притаманні фізичній природі процесів, що відбуваються при вимірюванні. При $n \to \infty$, відносна частота $\frac{\Delta n_k}{n}$ прийме певне (невипадкове) значення, яке і буде називатися ймовірністю попадання $x_{вим}$ в інтервал Δx. Якщо число вимірювань велике ($n \to \infty$), інтервал Δx можна взяти доволі малим (при $n \to \infty \Rightarrow k \to 0$) гістограма перетвориться в неперервну криву, яка називається кривою розподілу і представляє собою графік функції розподілу $f(x)$ (див. рис.1). Для малих інтервалів Δx добуток $f(x) \cdot \Delta x = \frac{\Delta n}{n}$, який рівний площі заштрихованого участку, дає ймовірність попадання вимірюваної величини в інтервал Δx.

Крива густини розподілу ймовірності найбільш повно відображає умови експерименту і дає найбільш детальні прогнози про поведінку випадкової величини $x_{вим}$. Гістограма і крива густини ймовірності для випадкової величини

$x_{вим}$ описують також розподіл похибок, тобто значень випадкової величини $\Delta x = x_{вим} - x_{іст}$.

Нормальний закон розподілу випадкової величини

На практиці рідко вдається провести таке велике число вимірювань, щоб можна було побудувати хорошу гістограму, тому замість графічної побудови кривої розподілу, як правило, параметри функції $f(x)$ розраховують. Для цього потрібно звичайно, зробити певні припущення про форму цієї функціональної залежності. Можна показати, що якщо похибки обумовлені досить великим набором незалежних причин, кожна з яких вносить дуже малий позитивний або негативний внесок, то виникає розподіл похибок по **нормальному закону,** що описується функцією Гауса:

$$f(x) = f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (4)$$

де e=2,7182…- основа натуральних логарифмів, μ і $\sigma-$параметри розподілу, зміст яких приведений вище. Отже дана формула містить тільки два параметри - $\mu = x_{іст}$ і σ. Знаючи їх можна побудувати криву $f(x)$ або $f(\Delta x)$. Графік функції Гауса для $f(x)$ для різних значень величини σ приведений на рис 2.

Для кривої розподілу Гауса характерні наступні властивості:

1. Крива $f(x)$ симетрична відносно $x_{іст}$ - позитивні і негативні похибки зустрічаються однаково часто.

2. Пік кривої $f(x)$ міститься при $x = x_{іст}$; досить пологa вершина вказує на те, що будь-які малі значення похибок майже рівноймовірні, а потім спостерігається швидкий спад, який вказує на малу ймовірність великих похибок. Це і зрозуміло, оскільки для отримання великої похибки всі джерела похибок повинні одночасно дати внесок одного знаку, що трапляється дуже рідко.

3. Повна площа під кривою $f(x)$ рівна 1 (це забезпечується нормувальним множником $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ перед експонентою). Ця умова є необхідною, оскільки ймовірність достовірної події рівна одиниці, інакше кажучи з n вимірювань всі n обов'язково містять яку-небудь похибку з інтервалу $-\infty < \Delta x < \infty$.

4. Функція $f(x)$ ніде не перетворюється в нуль.

Параметр σ характеризує ширину розподілу (див. рис. 2): при $\Delta x = \sigma$ величина $f(x)$ в e (e=1.649...) раз менше, ніж в максимумі. При малих σ графіки вузькі і високі, що відповідає більш тісному групуванні результатів вимірювань навколо середнього значення. В інтервалі $-\sigma < \Delta x < \sigma$ розміщена більша частина площі під кривою $f(x)$-68%, інакше кажучи, 68% всіх результатів мають похибку, що по абсолютній величині не перевершує σ. В той же час 95 % результатів вимірювань задовольняють умові $-2\sigma < \Delta x < 2\sigma$, а 99.7%- умові $-3\sigma < \Delta x < 3\sigma$ (так зване правило трьох сигм- тобто ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відрізняється від свого математичного сподівання більше ніж на три сигма приблизно дорівнює 0,0027, така подія є практично неможливою).

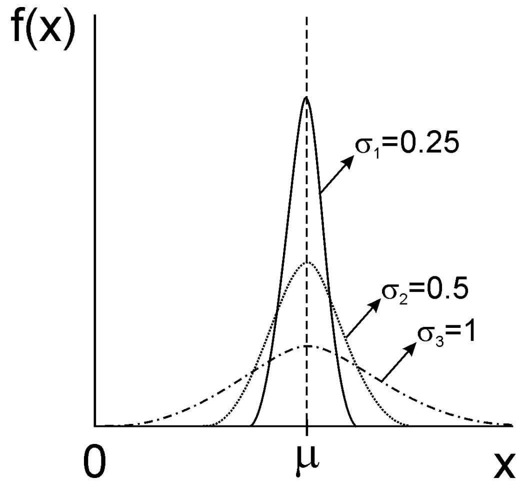

Рис 2. Функція густини розподілу ймовірності для різних значеннь параметру σ.

Отже, якщо ми побудуємо криву густини ймовірності $f(x)$, то оцінку істинного значення вимірюваної величини дасть положення максимуму цієї кривої. Більш зручним методом отримання цієї оцінки буде обчислення середнього значення $\overline{x}_{вим}$. Величини $\overline{x}_{вим}$ можемо знайти за допомогою співвідношення:

$$\overline{x}_{вим} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} x_k \Delta n_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\Delta n_k}{n\Delta x_k}\Delta x_k \approx \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k)\Delta x_k \ .$$

Тут i-номер вимірювання, а k-номер одного із відрізків, на які ми розбили інтервал зміни величини $x_{вим}$.

При виведені цього співвідношення використовувались наступні операції:

-величини x_i розбиті на m груп, в кожній із яких $x_k \le x_i \le x_k \pm \Delta x_k$;

-в кожній групі всі x_i наближено замінені на x_k;

-величина $\frac{\Delta n_k}{n\Delta x_k}$ характеризує функцію розподілу густини ймовірності.

Якщо $n \to \infty$, $m \to \infty$ то наближені рівності стануть точними і ми отримаємо, що $\overline{x}_{вим} = x_{іст} = \mu$. Використовуючи останню рівність при $n \to \infty$ і $m \to \infty$ отримаємо, що для середнього значення генеральної сукупності справедливий вираз:

$$\mu = \langle x \rangle = \int_0^\infty x f(x) dx .$$

Аналогічно можна показати, що параметр σ^2 нормального розподілу рівний дисперсії D випадкової величини, яка в загальному випадку визначається наступним інтегралом:

$$D = \int_0^\infty (x-\mu)^2 f(x) dx \cdot$$

ПАРАМЕТРИ ВИБІРКИ. РОЗПОДІЛ СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ

На експерименті ми отримуємо не генеральні сукупності, параметри яких обговорювалися вище, а вибірки скінченого об'єму n . При цьому виникають наступні питання:

1. Як по параметрах вибірки оцінити параметри генеральної сукупності?
2. Яку величину взяти за міру точності результату?
3. Яке співвідношення між довірчими інтервалами і довірчою ймовірністю?

Основні параметри вибірки:

1. **Вибіркове середнє** - $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
2. **Дисперсія вибірки** - $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$.

Для різних вибірок (серій вимірювань) одного і того ж об'єму n ми будемо отримувати різні значення як $\overline{x}$, так і S_x. Усереднивши $\overline{x}$ по великому (в граничному випадку рівному нескінченності) числу вибірок, ми отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x} = \langle x \rangle$. Усереднюючи S_x^2 отримаємо співвідношення : $\langle S_x^2 \rangle = \sigma_x^2$. Тому для того, щоб виконувалось це співвідношення в знаменнику виразу $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ повинно стояти не n, як у виразі (2) а $n-1$.

Ці результати підказують, що, маючи в розпорядженні одну вибірку, в якості **якнайкращого наближення до $\langle x\rangle$ слід узяти $\overline{x}$, а якнайкращою оцінкою σ_x буде S_x.**

Значення $\overline{x}$ - випадкова величина. Узявши $\overline{x}$ за якнайкращу оцінку вимірюваної величини, ми повинні з'ясувати, як поводиться відхилення величини $\overline{x}$ від істинного значення, оскільки саме це відхилення, а не розкид окремих вимірювань, визначить похибку остаточного результату експерименту. Теорія і досвід показують, що розкид значень $\overline{x}$ залежить від числа вимірювань в кожній серії. Чим більше вимірювань в серіях, тим менше виявляється розкид середніх значень, іншими словами, тим точніше середнє значення відповідає істинному. Якщо число вимірювань n скінчене то рівність $\overline{x}=x_{іст}$ уже не буде точною, але і у цьому випадку $\overline{x}$ є найкращою оцінкою істинного значення *x*. Позначимо цю знайдену оцінку через x_0:

$$x_0 \equiv \overline{x}_{вим} \approx x_{іст}$$

Якщо ми провели невелике число вимірювань n і знайшли оцінку істинного значення $x_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ то нас буде цікавити ***якість цієї оцінки.***

Оскільки величина x_0 є випадковою величиною, тому теж потрібно говорити про розподіл величини x_0, тобто про ймовірність отримати різні значення x_0. В теорії похибок доведено, що якщо розподіл $x_{вим}$ є **гаусовим,** то і розподіл **оцінки** x_0 буде мати таку ж функціональную форму:

$$f(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_0-x_{іст})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Центр цього розподілу, природно, також лежить при $x_0=x_{іст}$, але величина дисперсії σ_0 буде іншою і визначатиметься за формулою $\sigma_0^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

Дисперсія середнього із результатів n вимірювань в n разів менша, ніж дисперсія результату окремого вимірювання, отже x_0 - оцінка для $x_{іст}$, в $\sqrt{n}$ разів краща, ніж будь-який з одиничних вимірів x_i.

Таким чином, для скінченої вибірки дисперсію середнього значення розраховують за формулою:

$$S_{\overline{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\ .$$

Цю величину $S_{\overline{x}}$ називають **середньоквадратичним відхиленням середнього значення,** і дана величина може бути прийнята за міру похибки, що міститься в оцінці x_0. Для більш повної оцінки цієї похибки вводять поняття довірчої ймовірності та довірчого інтервалу, зміст яких розглянемо нижче.

ТОЧНІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ. ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ І ДОВІРЧА ЙМОВІРНІСТЬ

На жаль, на практиці похибки методики вимірювання не завжди піддаються оцінці. Тому в даний час точність результатів вимірювань характеризують не похибкою вимірювань а **довірчим інтервалом** Δx, в межах якого з певною ймовірністю (**довірчою ймовірністю**) можна очікувати появи значення досліджуваної величини в умовах запропонованої методики вимірювання. Основне завдання обробки результатів вимірювань полягає в тому, щоб визначити межі інтервалу, в якому розміщено дійсне значення вимірюваної величини. Цей інтервал визначається відносно середнього арифметичного значення, що приймається за найкращу оцінку істинного.

Тоді прийнята наступна форма запису результату вимірювань якої-небудь величини x:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x,$$

де Δx - визначена тим або іншим способом межа цього інтервалу.

В теорії ймовірності величина цього інтервалу, в якому з відомою ймовірністю P знаходяться результати окремих вимірювань, визначається за допомогою співвідношення:

$$\Delta x = S_{\overline{x}} \cdot t_{\alpha}(P),$$

де $t_{\alpha}(P)$– коефіцієнт Стьюдента, який знаходиться за відомим числом вимірювань та заданою довірчою ймовірністю P (див. додаток №5).

Таким чином, довірча ймовірність того, що вимірювана величина x лежить в інтервалі $\left|x - \overline{x}\right| \leq S_{\overline{x}} \cdot t_{\alpha}(P)$ рівна P. Якщо число вимірювань n достатньо велике, то довірча ймовірність виражає частку із загального числа n тих вимірювань, в яких виміряна величина опинилася в межах довірчого інтервалу. Кожній довірчій ймовірності P відповідає свій довірчий інтервал.

Для наочності поняття довірчого інтервалу позначимо на числовій осі точками результати n = 10 умовних вимірювань. Нехай вони групуються навколо середньої величини $\overline{x}$.

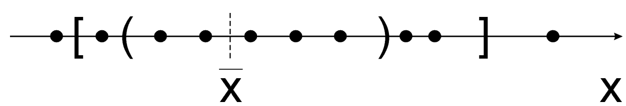

Рис 3. Довірчий інтервал для величини x.

Як видно із рис.3, круглі дужки задають довірчий інтервал, усередині якого знаходяться 5 експериментальних значень з 10, тобто довірча ймовірність $P_1 = 50\%$. Квадратним дужкам відповідає довірчий інтервал для ймовірності

$P_1 = 80\%$. Отже, чим ширший довірчий інтервал, тим більша ймовірність отримати результат усередині цього інтервалу.

ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

Нехай деяка випадкова величина *x* вимірюється *n* разів в однакових умовах з однаковою точністю. У відповідності із теорією похибок, найбільш близьким до істинного значення $x_{іст}$ вимірюваної величини *x* є середньоарифметичне значення $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Як було показано раніше, чим більше число вимірювань, тим ближче середнє значення наближається до істинного. Результати окремих вимірювань в загальному випадку відрізняються від істинного значення. Абсолютні похибки *i*-того вимірювання

$$\Delta x_i = x_0 - x_i$$

можуть приймати як позитивні так і негативні значення з рівною ймовірністю. Якщо просумувати похибки, то $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = n x_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i$, звідки $x_0 = \overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$.

В цьому виразі, при великому значенні *n* другий доданок в правій частині прямує до нуля у зв'язку з тим, що всякій додатній похибці можна поставити у відповідність рівну їй від'ємну похибку, а $x_0 = \overline{x}$. Зрозуміло, що при обмеженому числі вимірювань буде мати місце наближена рівність $x_0 \approx \overline{x}$. У всіх практичних випадках значення x_0 невідоме і не можна визначити абсолютну похибку Δx_i. Є тільки певна можливість (ймовірність) того, що x_0 знаходиться в якомусь інтервалі поблизу $\overline{x}$, і потрібно визначити цей інтервал (довірчий інтервал), що відповідає деякій ймовірності (довірча ймовірність).

Для вирішення такого завдання, як оцінка абсолютної похибки окремого вимірювання використовують величину

$$\Delta x_i = x_i \pm \overline{x}.$$

Через те, що оцінку похибки ряду вимірювань не можна характеризувати простою сумою відхилень $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ у зв'язку з тим, що вона прямує до нуля, то для цього беруть або абсолютні значення різниць $\left|x_i - \overline{x}\right|$, або їх квадрати. Вказані оцінки називають середньою арифметичною похибкою, або середньою квадратичною похибкою відповідно.

Середня арифметична похибка визначається згідно із співвідношенням:

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta x_i\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|.$$

Вона визначає межі, в яких лежить більше половини вимірювань (в теорії похибок доведено, що це число рівне 57% від всіх вимірювань). Отже, значення x_0 з 57% ймовірністю потрапляє в інтервал від $\overline{x}-\eta$ до $\overline{x}+\eta$. Тоді результати вимірювань величини x записуються у виді :

$$x_0 = \overline{x} \pm \eta .$$

На практиці в більшості випадків користуються середньоквадратичною похибкою середнього значення, яка визначає попадання вимірюваної величини x в довірчий інтервал від $\overline{x}-S_{\overline{x}}$ до $\overline{x}+S_{\overline{x}}$ з довірчою ймовірністю 68%. Результати вимірювань величини x в даному випадку записуються у виді:

$$x_0 = \overline{x} \pm S_{\overline{x}} .$$

Для того, щоб підвищити довірчу надійність, вводять поправочний коефіцієнт Ст'юдента t_α, і результат записують у виді:

$$x_0 = \overline{x} \pm t_\alpha S_{\overline{x}} .$$

ПОХИБКА ПРИЛАДУ

Похибка приладу, як ми зазначали, відноситься до систематичних похибок і є паспортною характеристикою приладу. Вона визначається для всієї сукупності приладів даного виду шляхом порівняння показів приладів досліджуваної партії з показами еталонного приладу (шляхом градуювання). За значення похибки приладу приймається найбільше з набутих значень. При роботі з окремим приладом конкретна величина похибки приладу невідома, але розміщена у відомих межах, які вказуються в паспортних даних приладу.

Похибка вимірювальних приладів визначається **класом точності**. Клас точності більшості приладів рівний максимально можливій відносній похибці приладу, вираженій у відсотках від величини верхньої межі шкали. Значення класу точності такого приладу маркується поряд з його шкалою. Згідно визначення класом точності приладу називається величина $\varepsilon_{\max}$:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\Delta \mathrm{x}_i^{прил}}{x_{max}} \cdot 100\%,$$

де $\Delta x_i^{прил}$- максимально можлива абсолютна похибка приладу для *i*-го вимірювання, x_{max} - величина верхньої межі шкали вимірювального приладу.
Звідси слідує, що

$$\Delta x_i^{прил} = \frac{\varepsilon_{max} \cdot x_{max}}{100} ,$$

а максимальна відносна похибка приладу для *i*-го вимірювання обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_i^{прил} = \frac{\varepsilon_{\max} \cdot x_{\max}}{x_i^{прил}} \ (\%).$$

Так, наприклад, у вольтметра класу точності 0,2, що використовується для вимірювання напруги до V_{max} = 300 В, максимальна відносна похибка приладу для верхньої межі вимірювань рівна 0,2%. А при вимірюванні напруги V = 50 В максимальна відносна похибка зростає до величини 1,2%. Отже, при вимірюванні поблизу нуля (у першій половині шкали) значно зменшується точність вимірювання. Тому вимірювання в початковій частині шкали небажані. Якщо клас точності не вказаний, то за похибку приладу можна прийняти половину ціни найменшої поділки на шкалі. Звичайно ця величина узгоджується із класом точності.

Довірчий інтервал з урахуванням випадкової похибки і похибки приладу

При одноразовому вимірюванні деякої величини випадкову похибку визначити неможливо, і межа довірчого інтервалу визначається величиною похибки приладу:

$$\Delta x = \Delta x^{прил}$$

У такому разі похибку називають похибкою методу. При багаторазових вимірюваннях межа довірчого інтервалу визначається шляхом врахування випадкової похибки і похибки, що зумовлена приладами. Така похибка називається похибкою експерименту і обчислюється наступним чином :

$$\Delta x^{експ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x^{прил})^2}$$

Природно, якщо один із доданків значно більший іншого, то він і буде таким, що визначає загальну похибку. Якщо при великій кількості вимірювань похибка приладу набагато більше випадкової похибки вимірювань, необхідно замінити використовуваний прилад точнішим. Якщо ж похибка приладу набагато менша випадкової похибки, то можна збільшити число вимірювань для підвищення точності результату. Якщо похибка приладу порівняна з випадковою похибкою вимірювань, то, очевидно, не має змісту збільшувати число вимірювань. Отже, доцільно оцінювати похибку приладу перед проведенням вимірювань.

ПОХИБКИ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

Обробляючи результати прямих вимірювань, ми знаходимо їх вибіркові середні значення $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...$, що є випадковими величинами. У випадку непрямих вимірювань шукана величина W, що визначається як $\overline{W} = W(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...)$ є вибірковим середнім шуканої функції, і буде, також випадковою величиною.

Задача, як і у випадку прямих вимірювань, полягає в тому, щоб визначити, з якою ймовірністю шукана величина W може знаходитися в деякому заданому інтервалі $\overline{W} \pm \Delta W$.

У загальному випадку ця задача досить складна, і ми обмежимося лише її наближеним вирішенням. Середнє значення величини W знаходять шляхом підстановки середніх значень величин $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$, що знаходять на основі прямих вимірювань у вираз $\overline{W} = W(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$.

Якщо розглянемо функцію, що залежить тільки від однієї змінної, тобто $\overline{y} = f(\overline{x})$, то при малому значенні Δx приріст Δy пропорційний похідній:

$$\Delta y \approx \frac{df}{dx} \Delta x .$$

В даному випадку буде існувати зв'язок середньоквадратичних відхилень $S_{\overline{x}}$ та $S_{\overline{y}}$:

$$S_{\overline{y}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 S_{\overline{x}}^2 .$$

Для функції багатьох змінних $W = W(x, y, z, \ldots)$ величина дисперсії буде визначатися (згідно закону додавання дисперсій) по формулі:

$$S_{\overline{W}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 S_{\overline{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 S_{\overline{y}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 S_{\overline{z}}^2 + \ldots ,$$

тоді у загальному випадку квадрат похибки ΔW можна визначити, як:

$$\Delta W^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \Delta Y^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \Delta Z^2 + \ldots$$

тобто

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \Delta Y^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \Delta Z^2} .$$

Приклад 1.

Розрахунок похибки $\Delta\rho$ при визначенні густини циліндра згідно формули $\rho = \frac{4m}{\pi \cdot h \cdot d^2}$.

1.Обчислюємо середнє значення густини тіла за формулою

$$\overline{\rho} = \frac{4\overline{m}}{\pi \cdot \overline{h} \cdot \left(\overline{d}\right)^2} ;$$

2.Знаходимо абсолютну похибку вимірювань за формулою:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m\right)^2},$$

де $\frac{\partial\rho}{\partial d}$, $\frac{\partial\rho}{\partial h}$, $\frac{\partial\rho}{\partial m}$ – часткові похідні функції $\rho(h,m,d)$ по змінних h,m,d, відповідно, взяті при $h = \overline{h}, m = \overline{m}, d = \overline{d}$. Тоді

$$\frac{\partial\rho}{\partial h} = -\frac{4\overline{m}}{\pi\overline{d}^2\overline{h}^2};\ \frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi\overline{d}^2\overline{h}};\ \frac{\partial\rho}{\partial d} = -\frac{8\overline{m}}{\pi\overline{d}^3\overline{h}},$$

і $\Delta\rho = \sqrt{\left(-\frac{4\overline{m}}{\pi\overline{d}^2\overline{h}^2}\times\Delta h\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi\overline{d}^2\overline{h}}\times\Delta m\right)^2 + \left(-\frac{8\overline{m}}{\pi\overline{d}^3\overline{h}}\times\Delta d\right)^2}$.

Якщо врахувати вираз для густини тіла $\overline{\rho} = \frac{4\overline{m}}{\pi\cdot\overline{h}\cdot\left(\overline{d}\right)^2}$, то отримаємо

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\overline{\rho}\,\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\overline{\rho}\,\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\overline{\rho}\,\frac{\Delta d}{d}\right)^2}$$

Знайдемо відносну похибку визначення густини $\varepsilon = \Delta\rho/\overline{\rho}$, $\varepsilon(\%) = \frac{\Delta\rho}{\overline{\rho}}\times 100\%$

Приклад 2.

Нехай вимірювана величина W знаходиться за допомогою співвідношення: $W = A\frac{x^4}{\sqrt{y}}$, де A – константа.

Тоді середнє значення величини W визначається, як $\overline{W} = A\frac{\overline{x}^4}{\sqrt{\overline{y}}}$.

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 4A\frac{x^3}{\sqrt{y}};\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{x^4}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(A\cdot x^4\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}A\cdot x^4\cdot y^{-\frac{3}{2}}.$$

Результуюча абсолютна похибка визначається наступним чином:

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\Delta X^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\Delta Y^2} = \sqrt{\left(4A\frac{x^3}{\sqrt{y}}\right)^2\Delta X^2 + \left(-\frac{1}{2}A\cdot\frac{x^4}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^2\Delta Y^2}$$

Тоді відносна похибка буде визначатися, як

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\sqrt{\left(4A\frac{x^3}{\sqrt{y}}\right)^2\Delta X^2 + \left(-\frac{1}{2}A\cdot\frac{x^4}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^2\Delta Y^2}}{A\frac{x^4}{\sqrt{y}}}.$$

Якщо вираз величини W внесемо під знак кореня, то отримаємо:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(4\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

В більшості випадків, набагато простіше відносну похибку результатів непрямих вимірювань обчислити за допомогою формули:

$$\varepsilon_W = \frac{dW}{\overline{W}}$$

Якщо $W = W(x)$ – функція з однією зміною, тоді відносна похибка визначається як $\varepsilon_W = \frac{dW}{\overline{W}} = d(\ln W)$, тобто, для знаходження ΔW необхідно спочатку прологарифмувати вираз $W(x)$, а потім продиференціювати його по x. У випадку багатьох змінних можна, як і для абсолютних похибок, ввести часткові відносні похибки, які рівні:

$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}\ln W \cdot \Delta x$;

$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y}\ln W \cdot \Delta y$;

$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z}\ln W \cdot \Delta z$.

Тоді загальна відносна похибка визначається як:

$$\varepsilon_w = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$$

Приклад 3.

Нехай, як і раніше вимірювана величина W знаходиться із співвідношення: $W = A\frac{x^4}{\sqrt{y}}$, де A – константа. Прологарифмувавши останній вираз отримаємо $\ln W = \ln A + 4\ln x - \frac{1}{2}\ln y$. За допомогою диференціювання знайдемо відносні похибки ε_x та ε_y:

$$\varepsilon_x = \frac{4\Delta x}{x},\ \varepsilon_y = -\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}.$$

Результуючу відносну похибку знайдемо за допомогою співвідношення:

$$\varepsilon_W = \sqrt{\left(4\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}\right)^2}.$$

Визначивши відносну похибку ε_w, можна розрахувати абсолютну похибку по формулі:

$$\Delta W = \varepsilon_W \cdot \overline{W}.$$

В загальному випадку треба враховувати і систематичні похибки, тоді кінцева похибка вимірювання величини W :

$$\Delta W = \sqrt{(\Delta W_{вип})^2 + (\Delta W_{сист})^2}\ .$$

Приведемо таблицю для оцінки похибок деяких комбінацій вимірюваних величин, що найчастіше зустрічаються при обчисленнях:

Таблиця 2

	$a = f(x,y)$	$\Delta a = \sqrt{\Delta a_x^2 + \Delta a_y^2}$	$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}$
1	$x + y$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x + y}$
2	$x - y$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x - y}$
3	$x \cdot y$	$\sqrt{(x \cdot \Delta y)^2 + (y \cdot \Delta x)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
4	$\frac{x}{y}$	$\sqrt{\left(\frac{x}{y^2} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{1}{y} \cdot \Delta x\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
5	x^n	$\left\lvert nx^{n-1}\Delta x\right\rvert$	$n\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert$
6	$\sqrt[n]{x}$	$\left\lvert\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x\right\rvert$	$\frac{1}{n}\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert$
7	$y = \ln x$	$\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\Delta x)^2}$	$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\Delta x)^2}}{\ln x}$
8	$y = e^x$	$xe^x\Delta x$	$x \cdot \Delta x$

Звернемо увагу на деякі важливі моменти в таблиці 2:

1. Оскільки випадкові похибки вимірювань рівноймовірно можуть бути позитивними і негативними, тому і при додаванні, і при відніманні виміряних величин абсолютні похибки додаються.

2. При відніманні двох величин, відносна похибка містить в знаменнику різницю двох величин. Якщо ці величини близькі, то відносна похибка різниці може значно перевищувати відносну похибку кожної величини окремо. Щоб

уникнути втрати точності слід уникати таких вимірювань і обчислень, при яких доводиться віднімати близькі по значенню величини.

3. При множенні та діленні величин додаються відносні похибки. Тобто коли розрахункова формула є одночленом, а суми і різниці якщо і присутні, то у вигляді окремих множників, простіше спочатку обчислити не абсолютну, а відносну похибку величини *a*. Якщо ж розрахункова формула має вид багаточлена, доцільно починати з розрахунку абсолютної похибки.

4. При піднесенні до степеня *n*, відносна похибка збільшується в $|n|$ разів.

ОСТАТОЧНИЙ ЗАПИС РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ

У результаті обробки вимірювань завжди отримується наближене значення вимірюваної величини, точність якого визначається тільки похибкою, допущеною в процесі вимірювання, і ніякими розрахунками не можна підвищити цю точність. Тому остаточний результат обробки вимірювання з погляду кількості значущих цифр (значущими цифрами є всі цифри в десятковому зображенні, крім нулів, що знаходяться на початку числа) повинні відповідати точності, отриманій у процесі вимірювання.

При чисельному записі результату вимірювань необхідно дотримуватися наступних правил:

1. У похибці залишають тільки першу значущу цифру. Якщо ж перша значуща цифра - одиниця, то допускається записувати дві значущі цифри, а інші відкидаються з округленням у більшу сторону.

2. Середнє значення вимірюваної величини округлюється у відповідності із значенням похибки. Правила округлення - звичайні.

Наприклад, число c=4,862452±0,12465 повинно бути записане: c = 4,86±0,12 а число d=242,87546±0,0094265 повинне бути записане: d = 242,875±0,009

Приклади правильного запису результату вимірювань:

v = (210 ± 8) м/с (ε = 4%),
або v = (2,10 ± 0,08)$\cdot 10^2$ м/с (ε = 4%) – стандартна форма.

R = (49,8 ± 0,3) 10^3 Ом (ε = 0,6%),
або R = (49,8 ± 0,3) кОм (ε = 0,6%),
або R = (4,98 ± 0,03) 10^4 Ом (ε = 0,6%) – стандартна форма.

ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

При оформленні графіків необхідно дотримуватися наступних правил:

1. Графік повинен містити підпис, з якого був би зрозумілий фізичний зміст представленої закономірності.

2. Масштаб й початок відліку по координатних осях вибираються таким чином, щоб графік залежності займав більшу частину поля малюнка. При цьому початок координат не обов'язково повинен починатися з нульових значень величин.

При виборі масштабу необхідно пам'ятати, що точність побудови графіка повинна бути не нижчою від точності вимірювань.

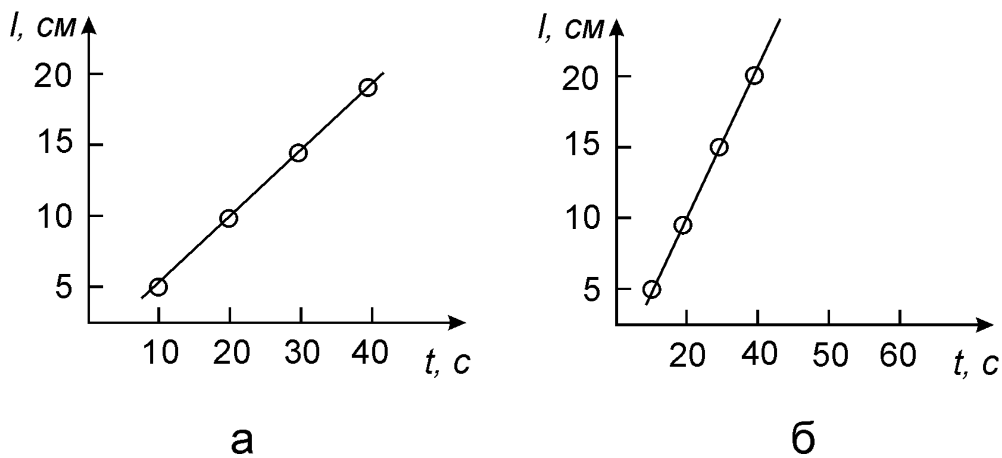

Рис 4. Побудова графічної залежності: вірно (а), невдало (б)

На осях координат відкладаються рівновіддалені один від одного поділки масштабу таким чином, щоб було зручно працювати із графіком. Значення, отримані на експерименті, не вказуються.

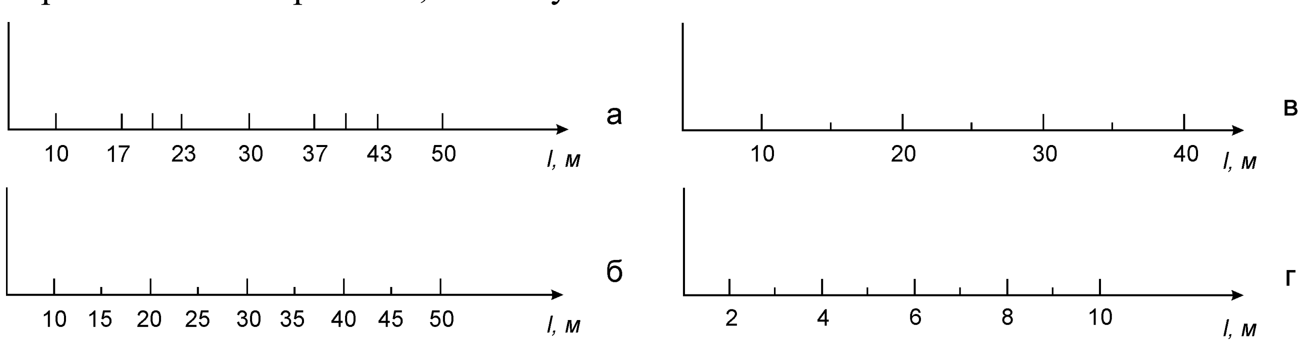

Рис 5. Побудова графічної залежності: невірно (а), невдало (б), вірно (в) або (г).

4. В кінці координатних осей обов'язково вказуються умовні позначення величин, що відкладають, і через кому одиниці вимірювання.

5. Експериментальні значення величин (точки) чітко наносяться разом з похибками – відрізками довжиною, рівною довірчому інтервалу, розташованими паралельно відповідній осі, у вигляді:

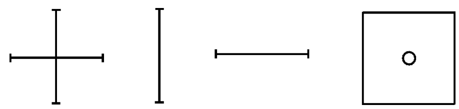

Рис 6. Графічне зображення похибок.

Якщо при побудові кривої в обраному масштабі довірчі інтервали неможливо зобразити вздовж обох осей координат, експериментальні точки ставляться у вигляді маленьких кружечків (трикутників і т.д.) із центром в точці, що відповідає експериментальним даним.

6. Експериментальна крива проводиться плавно через довірчі інтервали всіх, або більшості експериментальних точок так, щоб експериментальні точки рівномірно розташовувалися з різних сторін кривої.

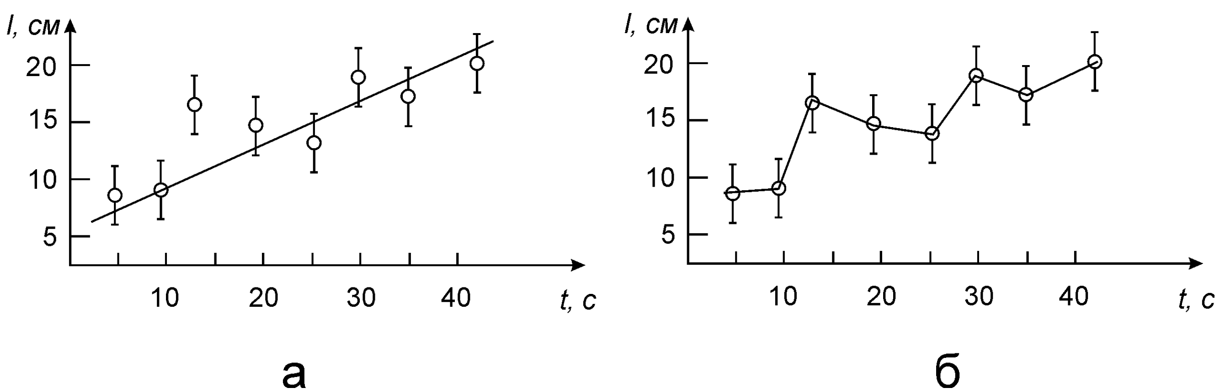

Рис 7. Графічне зображення експериментальної кривої: вірно (а), невірно (б)

7. Якщо на графіку зображується теоретична крива, то вказується формула, по якій вона розраховується.

8. При зображенні декількох кривих на одному графіку, кожна з них номерується або виділяється іншим чином. У вільній частині поля додаються відповідні пояснення.

Додаток №1

РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Звіт з лабораторної роботи повинен включати:

1. Назву роботи.
2. Мету роботи.
3. Перелік приладів і матеріалів.
4. Схему експериментальної установки.
5. Короткі теоретичні відомості та робочу формулу.
6. Експериментальні результати із зазначенням одиниць вимірювання й похибки приладу. Запис параметрів установки, необхідних для подальших розрахунків (також із зазначенням одиниць і похибок).
7. Оброблені результати вимірювань, представлені у вигляді таблиць, чисел, графіків – відповідно до завдання, визначеного в методичній розробці до лабораторної роботи.
8. Обчислення похибок.
9. Аналіз результатів: порівняння з табличними даними, з теорією, з даними інших експериментів – також з урахуванням похибок.
10. Висновки.

Додаток №2.

СХЕМА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК ДЛЯ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

1. Обчислюється середньоарифметичне значення серії з n вимірювань: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

2. Знаходяться похибки окремих вимірювань: $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$.

3. Обчислюються квадрати похибок окремих вимірювань Δx_i^2.

4.Якщо одне з вимірювань різко відрізняється за своїм значенням від решти вимірювань, то слід перевірити, чи не є воно промахом.

5. Визначається середньоквадратична похибка середнього значення прямих вимірювань: $S_{\overline{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})}$.

6. Задають значення коефіцієнта надійності $\alpha = 0.95$. За допомогою відповідних таблиць для даного значення величини α і n визначають величину коефіцієнта Стьюдента $t_\alpha(n)$. Знаходять похибку вимірювань Δx, яка визначається межею довірчого інтервалу: $\Delta x = t_\alpha(n) \cdot S_{\overline{x}}$.

7. Якщо величина похибки вимірювань, визначена в п.6, виявиться порівняною з величиною похибки приладу, то

$$\Delta x = \sqrt{(t_\alpha \cdot S_{\overline{x}})^2 + (\frac{t_\alpha(\infty)}{3} \cdot (\Delta x_{np})^2}$$

Для α=0.95 $t_\alpha(\infty)$=1,96.

8.Обчислюється відносна похибка $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\overline{x}} \cdot 100\%$.

9. Остаточний результат записується у вигляді:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x,\ \varepsilon\,(\%).$$

Додаток №3

СХЕМА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК ДЛЯ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

1. Для кожної серії вимірювань проводитися обробка, за схемою, описаною у додатку №2. При цьому для всіх вимірюваних величин задають одне і те ж значення надійності.

2. Обчислюється середнє значення шуканої величини: $A = f(x, y, z....)$.

3. Обчилюються часткові похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

4.Обчислюється похибка непрямих вимірювань:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \left(\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \left(\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot \left(\Delta z\right)^2}\ .$$

5.Остаточний результат записується у вигляді:

$$A = \overline{A} \pm \Delta A \quad \varepsilon, \%$$

де $\varepsilon(\%) = \frac{\Delta A}{\overline{A}}$ – відносна похибка непрямих вимірювань.

Додаток №4.

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу дискретних величин

Біноміальний розподіл (розподіл Бернулі)

Цей розподіл справедливий тільки для дискретної випадкової величини *X*, яка може приймати тільки цілі невід'ємні значення з ймовірностями $P_n(X=m)=C_n^m p^m q^n$, де p - ймовірність появи події в кожному спостереженні, m - кількість сприятливих подій, n - загальна кількість випробувань, $q=1-p$. $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ називається розподіленою за біноміальним законом з математичним сподіванням np, та дисперсією npq.

Закон Бернулі використовується тоді, коли необхідно знайти ймовірність появи випадкової події, яка реалізується m раз у серії з n випробувань.

Біноміальному закону розподілу підпорядковуються такі випадкові події, як число викликів швидкої допомоги за певний проміжок часу, черги до лікаря в поліклініці, епідемії тощо.

Розподіл Пуасона.

Дискретна випадкова величина *X*, яка може приймати тільки цілі невід'ємні значення з ймовірностями $P_n(X=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ називається розподіленою за законом Пуассона з математичним сподіванням λ і дисперсією λ, де $\lambda=np$. Розглядаються малоймовірні події, які відбуваються у серії незалежних випробувань декілька разів. Розподіл Пуасона, як граничний біноміальний проявляється при розгляді випадкових процесів дискретної випадкової величини *X*, яка неперервно залежить від часу. В медицині використовується при вирішенні задач надійності медичного обладнання та апаратури, розповсюдження епідемії, викликів до хворого дільничних лікарів та в інших задачах масового обслуговування.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Окрім нормального розподілу, розглянутого вище, в біології та медицині найчастіше розглядають випадкові величині, які можуть мати наступні закони розподілу:

Розподіл Ст 'юдента (Госсета)

Розглянемо множину результатів $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ вимірювання нормально розподіленої величини x . З цих даних визначимо $\overline{x}$ і μ. Введемо нову величину *t,* що містить, як експериментальне середнє значення так і задане значення вимірюваної величини x_0, яке точно відоме, наприклад із розрахунків та таблиць:

$$t = \frac{\overline{x} - x_0}{S_{\overline{x}}}.$$

Тоді розподіл величини t при скінченному числі вимірювань n буде розподілом Ст'юдента з n ступенями вільності або t-розподілом. При збільшенні числа ступенів вільності розподіл Ст'юдента наближається до нормального. Значення коефіцієнтів Ст'юдента для відповідної довірчої ймовірності та кількості ступеней вільності містяться у відомих таблицях.

t- розподіл Ст'юдента використовують в математичній статистиці при визначенні оцінок ймовірностей попадання випадкової величини в довірчий інтервал (інтервал, який із заданою ймовірністю p покриває параметр випадкової нормально розподіленої величини):

$$p\left(\left|\frac{\overline{x} - x_0}{S_{\overline{x}}}\right| < t_\alpha\right).$$

Математичне сподівання розподілу Ст'юдента дорівнює 0, а дисперсія $\frac{n}{n-2}$.

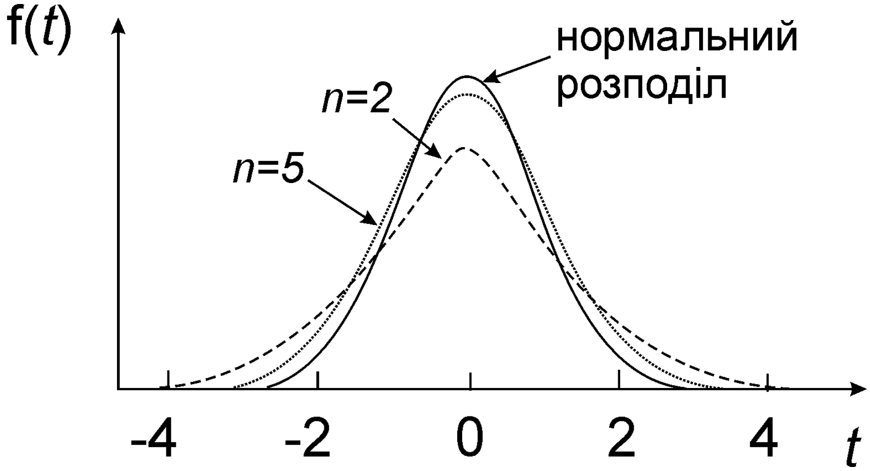

Рис 8. Розподіл Ст'юдента.

Розподіл Фішера

Нехай ми провели дві серії незалежних вимірювань випадкової величини: $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ і $y_1, y_2, y_3, ...y_m$ з числом вимірювань в серіях n та m і вибірковими дисперсіями S_n^2 і S_m^2 відповідно. Тоді розподіл випадкової величини $F_{nm} = \frac{S_n^2}{S_m^2}$ називається розподілом Фішера з (n, m) ступенями вільності

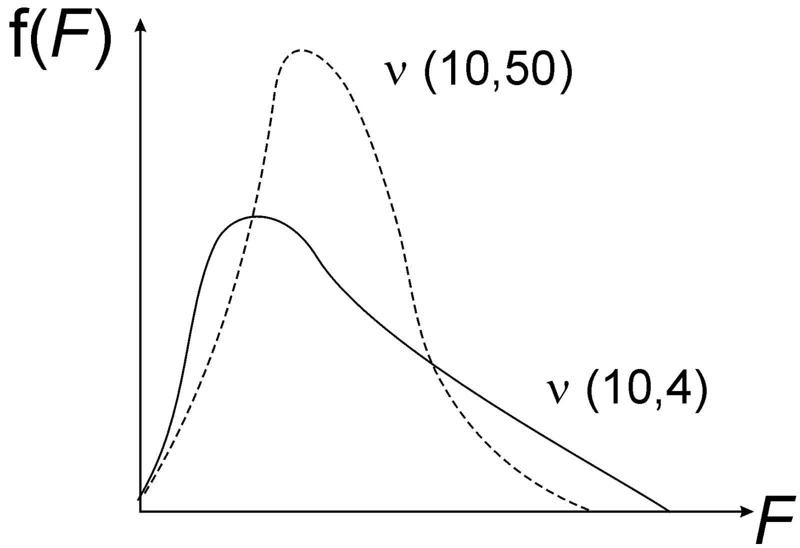

Рис 9. Розподіл Фішера .

Розподіл χ^2

Нехай маємо вибірку із *n* незалежні випадкових величин $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ - розподілених за нормальним законом з $\mu = 0$ та $\sigma^2 = 1$. Якщо для кожної випадкової величини визначимо вираз $\chi_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$, то сума квадратів випадкових величин $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \chi_i^2$ має закон розподілу, що носить назву χ^2- розподіл з *n* ступенями вільності. Із збільшенням ступенів вільності розподіл χ^2 наближається до нормального розподілу.

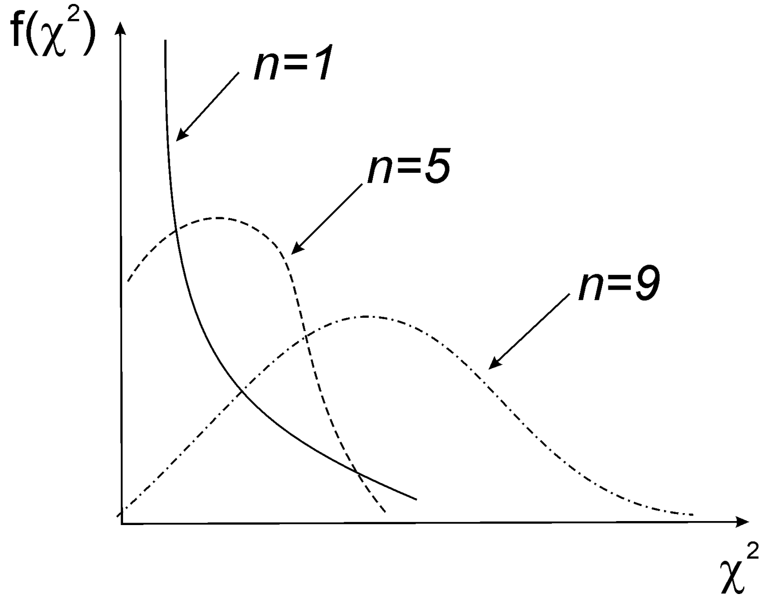

Рис.10. Розподіл χ^2.

Методи перевірки гіпотез про закони розподілу випадкових величин

Статистичні гіпотези - це припущення, котрі висуваються про вид розподілу випадкової величини або про окремі його параметри. Оцінка відповідності статистичної гіпотези дослідним даним проводиться за допомогою статистичного критерію, який є стандартним прийомом оцінки відповідності висунутої гіпотези результатам спостереження. Задача випробовування статистичних гіпотез виникає і тоді, коли обставини вимушують нас робити вибір між двома способами дії. Для визначення виду функції розподілу густини ймовірності та оцінювання параметрів по емпіричним законам формулюється нульова гіпотеза (H_0) про "відсутність розбіжностей". Нульова гіпотеза є прикладом статистичного висновку: якщо нульову гіпотезу відкинути, то висновок полягає в тому, що у сукупності, котра розглядається є розбіжності, тобто приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Приймемо, що випадкова величина x підпорядкована закону розподілу з густиною ймовірності $f_0(x)$ -нульова гіпотеза. У випадку, якщо виявиться, що гіпотеза невірна, вважатимемо справедливою гіпотезу, якій відповідає густина ймовірності $f_1(x)$. Задача формулюється наступним чином: знаючи конкретне значення величини x_i випадкової величини x, визначити якій із гіпотез слід віддати перевагу. При вирішенні цієї задачі можна припустити помилку двох видів: :

H_0 відкидається, коли вона правильна - помилка І-го роду.

H_0 приймається, коли правильна H_1 - помилка ІІ- го роду.

Ймовірність з якою може бути відхилена нульова гіпотеза називається **рівнем значущості**. Рівень значущості задається заздалегідь. Ймовірність прийняття правильності рішення (гіпотеза H_0 є вірною) називається **довірчою** ймовірністю.

Для перевірки істинності H_0 гіпотези діють наступним чином: нехай функція $f_0(x)$ має вид, зображений на рис. 11. Якщо x_i знаходиться в інтервалі $x_1 < x_i < x_2$, то гіпотеза H_0 із заданим рівнем значущості повинна бути визнана істинною. Якщо x_i знаходится лівіше x_1 або правіше x_2, де ймовірність попадання випадкової величини близька до нуля, то тут можливі два випадки: або гіпотеза H_0 невірна, або відбулася вельми неправдоподібна в даному випадку подія. На практиці в цій ситуації вважають правдоподібним першу умову, тобто визнається помилковість нульової гіпотези H_0 і вона відкидається. Для кількісної оцінки придатності гіпотези заштриховані області біля хвостів функції називають критичними областями даної функції розподілу і вважають, що попадання випадкової величини в критичну область свідчить про неприйнятність аналізованої гіпотези.

Залежно від закону розподілу критична область може містити тільки ліву, тільки праву або обидві заштриховані області біля хвостів функції розподілу.

Ймовірність попадання випадкової величини в критичну область характеризується рівнем значущості β, який можна знайти із співвідношень:

$$\beta = P(x > x_2) \Rightarrow \beta = \int_{x_2}^{\infty} f_0(x)dx\,; \beta = P(x < x_1) \Rightarrow \beta = \int_{-\infty}^{x_1} f_0(x)dx\,.$$

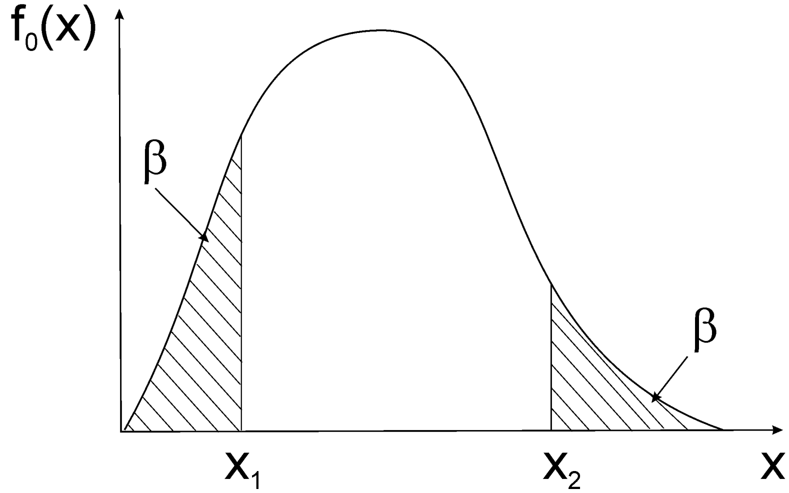

Рис 11. Функція густини ймовірності випадкової величини $f_0(x)$. Кожна площа заштрихованої фігури чисельно рівна рівню значущості β.

В медицині вибір величини рівня значущості β залежить від зіставлення втрат у разі помилкових висновків в ту або іншу сторону: чим вагоміші втрати від помилкового відхилення нульової гіпотези, тим меншою вибирається величина значення β. Зазвичай, на практиці, значення β приймається рівним 0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005; 0,001. Найчастіше використовується β=0,05, яке означає, що при користуванні певним статистичним критерієм, в середньому в п'яти випадках із ста статистична гіпотеза, що перевіряється, буде відхилена помилково.

Деякі критерії перевірки статистичних гіпотез

Перевірка гіпотези про рівність між середніми значеннями незалежних вибірок здійснюється за допомогою критерію Ст'юдента, або t-критерію. Для цього необхідно визначити:

$$t_{розр} = \frac{(\bar{X}_1) - (\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}\,.$$

Число ступіней вільності рівне: $f = n_1 + n_2 - 2$. Ця формула справедлива для випадку рівності вибіркових дисперсій: $S_1^2 = S_2^2$.

Для перевірки гіпотези про **<u>рівність дисперсій</u>** використовують **<u>критерій Фішера.</u>** При цьому визначають $F_{розр}$, як відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{розр} = \frac{S_б^2}{S_м^2};\ S_б^2 \rangle S_м^2.$$

Обчислене значення порівнюють із табличним $F_{табл}$ з врахуванням числа ступіней вільності $f_1^{розр} = n_1 - 1;\ f_2^{розр} = n_2 - 1$ і довірчої ймовірності. Якщо $F_{розр} < F_{табл}$, то це означає, що вибірки взяті із сукупностей з рівними дисперсіями. Якщо $F_{розр} > F_{табл}$, то дисперсії відрізняються і необхідно $t_{розр}$ визначати по формулі:

$$t_{розр} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}.$$

При цьому число ступеней вільності рівне:

$$f = \frac{(n_1 - 1)\cdot(n_2 - 1)\cdot\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{(n_2 - 1)\cdot\left[\frac{S_1^2}{n_1}\right]^2 + (n_1 - 1)\cdot\left[\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}.$$

Потім розраховані значення $t_{розр}$ порівнюється з $t_{табл}$, з урахуванням числа ступеней вільності і довірчої ймовірності . Якщо $t_{розр} < t_{табл}$, то відмінність між середніми незначуща і вони належать до однеї генеральній сукупності. Якщо $t_{розр} > t_{табл}$, то відмінність значуща і вибірки відносяться до різних генеральних сукупностей.

Критерій Ст'юдента є параметричним, тобто його можна застосовувати лише до вибірок, що мають нормальний закон розподілу. Тому необхідна перевірка даних на відповідність нормальному закону розподілу.

Перевірка нормальності розподілу за допомогою показників асиметрії і ексцесу

Для багатьох практичних задач статистики важливою є задача встановити чи є розподіл випадкової величини нормальним. Для цього користуються поняттям асиметрії та ексцесу.

<u>Асиметрія</u> - величина, що характеризує несиметричність розподілу елементів вибірки щодо середнього значення, і приймає значення від -1 до +1. У разі симетричного розподілу рівна 0. Вибірковий коефіцієнт асиметрії визначається по формулі:

$$A_s = \frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{\frac{1}{n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Як випливає із даної формули, коефіцієнт асиметрії є безрозмірною величиною і рівний нулю у симетричних розподілах. Якщо розподіл має довгу частину, розташовану праворуч від вершини, то асиметрію називають позитивною, а розподіл з довгою частиною кривої густини, розташованої зліва від вершини, називають негативною асиметрією.

Ексцес - ступінь вираженості "хвостів" розподілу, тобто частоти появи віддалених від середнього значень. **Коефіцієнт ексцесу,** або четвертий центральний момент, кількісно характеризує гостровершинність розподілу. Вибірковий коефіцієнт ексцесу обчислюється за формулою:

$$E_X = \frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{\frac{1}{n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{2}} - 3.$$

Для нормального (гаусового) розподілу коефіцієнт ексцесу рівний нулю. Криві розподілу з гострою вершиною мають позитивний ексцес, а з плоскою - негативний. Таким чином, при нормальному законі розподілу вибіркових даних коефіцієнти асиметрії і ексцесу рівні нулю.

Додаток №5.

КРИТИЧНІ ТОЧКИ t-КРИТЕРІЮ СТ'ЮДЕНТА

Число ступеней вільності $f = n - 1$	α, %			Число ступеней вільності $f = n - 1$	α, %		
	95	99	99.9		95	99	99.9
1	12,71	63,66	64,60	18	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	19	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	20	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	21	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	22	2,07	2,82	3,79
6	2,45	3,71	5,96	23	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	24	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	25	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	26	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	27	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	28	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	29	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	30	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	40	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	60	2,0	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,58	3,29

Додаток №6

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА АСИМЕТРІЇ (A_s), ЩО ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО НОРМАЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

Об'єм вибірки *n*	Рівні значущості, %		Об'єм вибірки *n*	Рівні значущості, %	
	5	1		5	1
25	0,711	1,061	250	0,251	0,360
30	0,661	0,982	300	0,230	0,329
35	0,621	0,921	350	0,213	0,305
40	0,587	0,869	400	0,200	0,285
45	0,558	0,825	450	0,188	0,269
50	0,533	0,787	500	0,179	0,255
60	0,492	0,723	550	0,171	0,243
70	0,459	0,673	600	0,163	0,233
80	0,432	0,631	650	0,157	0,224
90	0,409	0,596	700	0,151	0,215
100	0,389	0,567	750	0,146	0,208
125	0,350	0,508	800	0,142	0,202
150	0,321	0,464	850	0,138	0,196
175	0,298	0,430	900	0,134	0,190
200	0,280	0,403	950	0,130	0,185
Р	0,05	0,01	—	0,05	0,01

Додаток № 7

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ЕКСЦЕСА (E_x), ЩО ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО НОРМАЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

Об'єм вибірки *n*	**Рівні значущості, %**		
	10	5	1
11	0,890	0,907	0,936
16	0,873	0,888	0,914
21	0,863	0,877	0,900
26	0,857	0,869	0,890
31	0,851	0,863	0,883
36	0,847	0,858	0,877
41	0,844	0,854	0,872
46	0,841	0,851	0,868
51	0,839	0,848	0,865
61	0,835	0,843	0,859
71	0,832	0,840	0,855
81	0,830	0,838	0,852
91	0,828	0,835	0,848
101	0,826	0,834	0,846
201	0,818	0,823	0,832
301	0,814	0,818	0,826
401	0,812	0,816	0,822
501	0,810	0,814	0,820
P	0,10	0,05	0,01

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980.– 95 с.

2. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука, 1985. – 108 с.

3.Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Л.:Энергия, 1978. – 262 с.

4.Чкалова О.Н. Основы научных исследований. – К.: Вища школа, 1978. – 18 с.

5. Деденко Л.Г,. Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 285с.

6. Кучерук І.М..Дущенко В.П.,Андрианов В.М. Обробка результатів фізичних вимірювань. – К.: Вища школа, 1981.– 216 с.

7. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. В.И.Ивероновой. – М.: Наука, 1967.– 374 с.

8. Новицкий П.В., Зограф И.А.. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991.– 207 с.

9. Лабораторные работы по курсу физики для естественных факультетов МГУ. Механика. – М.: Моск. ун-т, 1997.– 257 с.

10. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработка результатов физического эксперимента. – М.: Атомиздат,1978. – 231 с.

11. Методическая разработка по общему физическому практикуму. Погрешности измерений /Сост. Д.В.Белов. – М.: МГУ, 1993.– 179с.

12. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1977.– 335 с.

Методичне видання

Шуста Володимир Семенович	– доцент кафедри оптики фізичного факультету ДВНЗ ”УжНУ”, кандидат фіз.-мат. наук
Гомоннай Олександр Олександрович	– доцент кафедри оптики фізичного факультету ДВНЗ ”УжНУ”, кандидат фіз.-мат. наук
Сливка Олександр Георгійович	– професор кафедри оптики фізичного факультету ДВНЗ ”УжНУ”, доктор фіз.-мат. наук
Гомоннай Олександр Васильович	– професор кафедри прикладної фізики фізичного факультету ДВНЗ ”УжНУ”, доктор фіз.-мат. наук

Методичні вказівки до фізичного практикума “Медична та біологічна фізика“ (для студентів 1-го курсу стоматологічного факультету)

В.С. Шуста, О.О. Гомоннай, О.Г. Сливка, Гомоннай О.В.

ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Методичні вказівки

до фізичного практикума “Медична та біологічна фізика“

(для студентів 1-го курсу стоматологічного факультету)

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 2.55. Зам № 108. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ "Говерла". м. Ужгород, вул Капітульна, 18. Тел.: 3-32-48.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року