УДК 519.816

О. Волошин, д-р техн. наук, проф.,
М. Маляр, канд. техн. наук, доц.,
О. Швалагін, асп.

ПРОЦЕДУРИ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ І ВІДСІЮВАННЯ ВАРІАНТІВ В КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ З НЕЧІТКИМИ ФУНКЦІОНАЛАМИ

Пропонуються процедури послідовного аналізу і відсіювання варіантів в комбінаторних оптимізаційних задачах з нечіткими функціоналами з метою використання для побудови алгоритмів послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів. Розглядаються постановки оптимізаційних задач в умовах нечіткості, для яких є конструктивним застосування запропонованих процедур. Описується схема нечіткого алгоритму послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів.

In the article the procedures of the consecutive analysis and sifting variants in combinatorial optimizing problems and fuzzy functionals for the usage to build the algorithms of consecutive analysis, sifting and variants constructing are suggested. The formulations of optimizing problems in terms of fuzziness are concidered, for which the usage of the suggested procedures are constructive. The scheme of the indistinct algorithm of consecutive analysis, sifting and variants constructing is described here.

Вступ

Одним з найбільш ефективних методів розв'язання оптимізаційних задач різноманітних класів є метод послідовного аналізу варіантів (ПАВ), котрий запропоновано в 60-х роках XX ст. в Інституті кібернетики АН України Міхалевичем В. та Шором Н. [1]. З точки зору формальної логіки схема ПАВ зводиться до наступних дій:

– розбиття множини варіантів розв'язків задачі на підмножини з додатковими властивостями;

– використання цих властивостей при пошуку логічних протиріч в описі окремих множин;

– виключення з розгляду підмножин, в описі яких є протиріччя.

В [2] загальна схема ПАВ конкретизується для різних класів багатоваріантних задач, описуються алгоритми "послідовного аналізу, відсіювання та конструювання варіантів", зокрема, широко відомий алгоритм "Київський віник". Основним правилом відсіювання безперспективних варіантів в цих алгоритмах був принцип монотонної рекурсивності [1], споріднений критерію оптимальності динамічного програмування Беллмана [3]. Одночасно з відомими перевагами алгоритми покрокового конструювання мають і певні недоліки [4]. У розвиток загальних концепцій ПАВ в [5-7] запропоновано процедури паралельного відсіювання підваріантів, зокрема, одиничної довжини (алгоритм W [5]). При цьому виникає проблема конструювання повного варіанта, котра вирішується шляхом послідовного вводу обмежень на значення цільового функціонала і задача конструювання повного варіанта зводиться до побудови процедур аналізу і відсіювання підваріантів. Ефективність алгоритмів, що базується на запропонованих принципах, підтверджується обчислювальними експериментами, теоретичними оцінками та розв'язанням практичних задач [8-12]. В [6] запропоновано алгоритм ПАВ для знаходження "субоптимальних" розв'язків (ε-наближених по функціоналу і δ-наближених по обмеженнях). При цьому будь-які "ε, δ – відхилення" вважались "рівноприйнятними". В [13] процедури відсіювання були узагальнені на випадок нечіткості [14] в описі допустимих множин розв'язків і множин рівнів цільового функціоналу, множини можливих розв'язків і значень функціоналу вважались заданими чітко. В даній роботі процедури відсіювання алгоритму W узагальнюються на різні форми нечіткого задання функціоналу, зокрема, у вигляді бінарного відношення.

Постановка задачі

Нехай X – деяка множина. Нечіткою множиною C у X називається сукупність пар виду $\left\{\left(x,\mu_c\left(x\right)\right)\right\}$, де $x \in X$, а $\mu_C : X \to \left[0;1\right]$ – функція належності нечіткої множини C [14].

Носієм нечіткої множини C з функцією належності $\mu_C(x)$ називається множина виду $\operatorname{supp} A = \left\{x \mid x \in X, \mu_C\left(x\right) > 0\right\}$.

Множиною рівня α нечіткої множини C у X називається чітка множина $C_\alpha = \left\{x \mid x \in X, \mu_c\left(x\right) \ge \alpha\right\}$.

Нехай A і B – два нечітких числа у X з функціями належності $\mu_A\left(a\right)$, $a \in S_A$, $S_A \subset X$ і $\mu_B\left(b\right)$, $b \in S_B$, $S_B \subset X$ відповідно.

Нехай $S_C = \left\{c : c = a + b, a \in S_A, b \in S_B\right\}$ – нечітке число, що є результатом суми $A + B$, тоді [14]:

$$\mu_{S_C}\left(c\right) = \max_{a+b=c} \min\left\{\mu_A\left(a\right), \mu_B\left(b\right)\right\}. \qquad (1)$$

Нехай задана деяка множина $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ можливих варіантів задачі, де X_j – множина можливих значень j-ої компоненти x_j (j-ий підваріант одиничної довжини). Множини X_j можуть задаватися множиною значень функції дискретного аргументу; задаватися таблично; бути множиною перестановок деякої базової множини параметрів. Вектор $p = \left(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}\right)$, де $x_{j_1} \in X_{j_1}$, $x_{j_2} \in X_{j_2}$,..., $x_{j_k} \in X_{j_k}$ $\left(1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n\right)$ назвемо підваріантом довжини k. Множину всіх підваріантів позначимо через $P\left(X\right)$ і виділимо в ній множину допустимих підваріантів $D\left(X\right) \subseteq P\left(X\right)$. В множині $D\left(X\right)$ виділимо підмножину повних допустимих варіантів $D \subseteq D\left(X\right)$, яка визначається адитивними обмеженнями $G_i\left(x\right) \le G_i^*$ ($i = \overline{1,m}$).

Родовою множиною підваріанта $p \in D\left(X\right)$ назвемо множину $R\left(p\right)$, яка складається з тих варіантів x, що містять підваріант p. В свою чергу, допустимою родовою множиною $\overline{R}\left(p\right)$ підваріанта p назвемо таку підмножину родової множини $R\left(p\right)$, що складається з допустимих варіантів $x \in D$.

Величина $\Delta_p^i = \left\{ \left(\Delta g_p^i, \mu\left(\Delta g_p^i\right) \right), \Delta g_p^i \in \left[\Delta \underline{g}_p^i, \Delta \overline{g}_p^i \right] \right\}$ називається допуском для підваріанта p відносно множини D за i-им обмеженням, якщо з того, що $G_i(p) \overset{\alpha}{\succ} \Delta_p^i$ (де $\overset{\alpha}{\succ}$ – нечітке відношення переваги [14]), випливає, що допустима родова підмножина підваріанта p $\overline{R}(p) = \varnothing$. Позначимо через $Q(P) = \left\{ \Delta_p^i \right\}$, $i = \overline{1,m}$, множину допусків відносно множини D для множини підваріантів P за всіма обмеженнями.

Розглядається таблиця $V^{(0)}$ можливих варіантів задачі, в якій кількість рядків дорівнює кількості змінних, число елементів в кожному рядку дорівнює кількості можливих значень відповідної змінної.

Нехай $F(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j)$ – нечіткий функціонал, де $F_j(x_j)$ – нечіткі числа з функціями належності $\mu_j(x_j)$, функція належності нечіткого числа $F(x)$, як суми нечітких чисел $F_j(x_j)$, визначається згідно принципу узагальнення (1).

Розглядаються наступні постановки нечітких оптимізаційних задач, для яких можна запропонувати ефективні процедури обчислення допусків [4], на основі яких можна побудувати процедури аналізу і відсіювання варіантів для нечіткого алгоритму W [12].

1. Знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує нечіткий функціонал $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\operatorname{Arg\,max}} \operatorname{supp} F(x)$.

2. Серед допустимих варіантів, функція належності критеріального функціоналу на яких приймає значення більші заданого порогу α_1, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує функціонал $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\operatorname{Arg\,max}} F_{\alpha_1}(x)$.

3. Серед допустимих варіантів, функція належності критеріального функціоналу на яких набуває максимального значення, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує $F(x)$: $x \in \underset{x \in D}{\operatorname{Arg\,max}} F_{\alpha_2}(x)$, де $\alpha_2 = \max_{x \in D} \mu_F(x)$.

4. Серед допустимих варіантів, функції належності компонент критеріального функціоналу на яких приймають значення більші заданого порогу, знайти варіант $x^* \in D$, який максимізує функціонал $F(x)$:

$$x \in \underset{x \in D}{\operatorname{Arg\,max}} \operatorname{supp} F(x), \mu_{F_j}\left(F_j(x_j)\right) \geq \alpha_3 .$$

5. Знайти варіант, який задовольняє таким обмеженням: $G_{*i} \leq \inf \operatorname{supp} G_i(x)$, $\sup \operatorname{supp} G_i(x) \leq G_i^*$ ($i = \overline{1,m}$), де G_{*i} та G_i^* – задані нижня та верхня межі зміни обмежень, $G_i(x) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(x_j)$ – нечіткі функціонали обмежень.

6. Знайти варіант серед тих, що належать такій множині допустимих варіантів:

$$D(X) = \left\{ p \mid G_i(p) \overset{\alpha}{\prec} G_i, p \in P(X), \alpha > 0 \right\}.$$

7. Знайти варіант серед тих, функції належності компонент обмеження яких приймають значення, більші за певний поріг: $G_i(v) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(x_j)$, $\mu_{G_{ij}}\left(G_{ij}(x_j)\right) \geq \alpha'$.

Позначимо $D(X) = \left\{ p \mid G_{*i} \leq \inf \operatorname{supp} G_i(p), \sup \operatorname{supp} G_i(p) \leq G_i^* \right\}$, $G_i(p) = \left\{ \left(g_i(p), \mu_{g_i}\left(g_i(p)\right) \right) \right\}$, $i = \overline{1,m}$.

$G_i(p) = \sum_j G_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right)$ – нечіткі функціонали підваріанта p, $G_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right) = \left\{ \left(g_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right), \mu_{g_{ij}}\left(g_{ij}\left(x_{j(l_j)}\right)\right) \right) \right\}$ – нечіткі функціонали відповідних значень змінних.

Схема нечіткого алгоритму W [5, 13]

Пропонуються універсальні процедури послідовного аналізу та відсіювання варіантів, що можуть застосовуватись до розглянутих вище оптимізаційних постановок 1-7.

Для врахування додаткових обмежень на цільові функціонали і функціонали обмежень здійснюються наступні перетворення:

$$\operatorname{supp} G_{ij}(x_j) := \left\{ g_{ij}(x_j) \in \operatorname{supp} G_{ij}(x_j), \mu_{g_{ij}}\left(g_{ij}(x_j)\right) \geq \alpha_1 \right\},$$

$$\operatorname{supp} F_j(x_j) := \left\{ f_j(x_j) \in \operatorname{supp} F_j(x_j), \mu_{f_j}\left(f_j(x_j)\right) \geq \alpha_2 \right\}.$$

Елементи таблиці можливих варіантів задачі V, для яких $\operatorname{supp} G_{ij}(x_j) = \varnothing$ або $\operatorname{supp} F_j(x_j) = \varnothing$, виключаються з розгляду.

Перша ітерація процедури $\tilde{W}_1$:

Крок 1. Будується таблиця $V_1^{(0)}$ впорядковуванням рядків V за зростанням значень функції G_1: $\inf \operatorname{supp} G_1$.

Елемент $u_{j(l_j)}$ розміщується "лівіше" за елемент $u_{j(s_j)}$, якщо $\inf \operatorname{supp} G_1\left(u_{j(l_j)}\right) < \inf \operatorname{supp} G_1\left(u_{j(s_j)}\right)$.

Аналогічно будується таблиця $V_2^{(0)}$, елементи якої впорядковуються за спаданням функції G_1: $\sup \operatorname{supp} G_1$.

Крок 2. Позначимо v_0^1 і v_0^2 перші стовпці таблиць $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$ відповідно.

Для них перевіряється виконання умови $\inf \operatorname{supp} G_1\left(v_0^{(1)}\right) \leq G_1^*$, $\sup \operatorname{supp} G_1\left(v_0^{(2)}\right) \geq G_{*1}$. Якщо хоча б одна з них не виконується, то задача не має розв'язку. Інакше, переходимо до Кроку 3.

Крок 3. Обчислюється значення функції G_1 для всіх елементів перших стовпців $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$ без елементів першого рядка: $\underline{G}_1 = \inf \operatorname{supp} G_1\left(v_0^1 \setminus u_{1(1)}^{(1)}\right)$, $\overline{G}_1 = \sup \operatorname{supp} G_1\left(v_0^2 \setminus u_{1(1)}^{(2)}\right)$.

Знаходяться "вертикальні" допуски $\Delta G_1^{*(1)} = G_1^* - \underline{G}_1$ $\Delta G_{*1}^{(1)} = G_{*1} - \overline{G}_1$.

Переглядаються по черзі елементи першого рядка таблиці $V_1^{(0)}$ і здійснюються такі перетворення з їх носіями: $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) := \left\{x \in \operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right), x \le \Delta G_1^{*(1)}\right\}$.

Аналогічно здійснюються перетворення з елементами першого рядка таблиці $V_2^{(0)}$: $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) := \left\{x \in \operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right), x \ge \Delta G_{*1}^{(1)}\right\}$. Елементи, для яких $\operatorname{supp} G_1\left(u_{1(l_1)}\right) = \varnothing$, виключаються з розгляду.

Крок 3 проводимо для всіх рядків таблиць $V_1^{(0)}$ і $V_2^{(0)}$, виключаючи з таблиці $V_1^{(0)}$ елементи, відсіяні в таблиці $V_2^{(0)}$. В результаті отримаємо таблицю $V_1^{(1)}$. Аналогічно формується таблиця $V_2^{(1)}$.

Крок i. Здійснюється відсів елементів у таблицях $V_1^{(i-1)}$ і $V_2^{(i-1)}$ за *i*-им обмеженням виду $G_{*i} \le G_i(v) \le G_i^*$ аналогічно до кроку 1.

Друга ітерація процедури $\tilde{W}_1$:

В результаті виконання першої ітерації виконується відсів елементів за всіма обмеженнями і утворюються таблиці $V_1^{(n)}$ і $V_2^{(n)}$. На другій ітерації проводиться відсів за всіма обмеженнями задачі в таблицях $V_1^{(n)}$ і $V_2^{(n)}$.

l -а (заключна) ітерація процедури $\tilde{W}_1$: відповідно до загальної схеми ПАВ, у випадку, коли $V_1^{(l-1)}$ і $V_2^{(l-1)}$ збігаються з таблицями $V_1^{(l)}$ і $V_2^{(l)}$ виконання процедури $\tilde{W}_1$ завершується. В результаті отримуємо звужену множину $X^{(s_0)}$.

Позначимо $V^{(l)} = V_1^{(l)} \cap V_2^{(l)}$ – таблицю елементів, що залишилися після роботи процедури $\tilde{W}_1$. Якщо $V^{(l)} = \varnothing$, то початкова задача недопустима. У випадку, коли $V^{(l)}$ достатньо мала, оптимальний розв'язок знаходиться прямим перебором. Якщо, прямий перебір неможливий за прийнятний час, то згідно із загальною схемою алгоритму W, вводяться додаткові обмеження на значення функціоналу і застосовується оператор Ω.

На функціонал вводиться додаткове обмеження:

$$F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}, \quad 0 \le \beta \le 1, \tag{3}$$

де $F^{*(\gamma)} \in \left[\min\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x}),\ \max\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x})\right]$ – нечіткий параметр з функцією належності $\nu\left(F^{*(\gamma)}\right)$. Позначимо множину варіантів, які задовольняють (3) при обраному значенні $F^{*(\gamma)}$, через $D_F^\gamma = \left\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}\right\}$ і множину допустимих варіантів у множині D_F^γ через $D_\gamma = D \cap D_F^\gamma$.

Позначимо через $\wp = \cup P$ скінченне сімейство множин підваріантів $P \subseteq P(X)$, для якої справедливо, що $R(\wp) = X$, $\overline{R}(\wp) = D$. Позначимо через $P\left(X^{(s_0)}\right)$ множину всіх підваріантів. Сформуємо сімейство $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$ множин підваріантів $P^\gamma \subseteq P\left(X^{(s_0)}\right)$ таке, що $R\left(\wp_\gamma\right) = X^{(s_0)}$ і $\overline{R}\left(\wp_\gamma\right) = D_F^\gamma$. Величина ΔF_p^γ називається допуском для множини підваріантів $P^\gamma \subseteq \wp_\gamma$ відносно множини D_F^γ по функціоналу, якщо з того, що $F(p) \overset{\beta}{\prec} \Delta F_p^\gamma$ випливає, що допустима родова множина $\overline{R}^\gamma(p) = R(p) \cap D_\gamma$ підваріанту p порожня.

Вилучення варіантів з множини $X^{(s_0)}$ за обмеженнями здійснюється шляхом відсіву за допомогою допусків тих підваріантів $p \in P^\gamma$, котрі не входять до максимальних варіантів.

Позначимо систему допусків для сімейства $\wp_\gamma$ через $Q\left(\wp_\gamma\right) = \cup\left\{\Delta F_p^\gamma\right\}$. Система допусків обчислюється за допомогою оператора апроксимації Ω, визначеного на сімействах $\wp_\gamma$ и $\wp$. В результаті отримаємо повну систему допусків $Q\left(\wp, \wp_\gamma\right) = Q(\wp) \cup Q\left(\wp_\gamma\right)$. Тоді схема роботи "нечіткого" оператора Ω буде такою:

Крок 0. Для заданого значення $F^{*(\gamma)}$ обчислюємо для сімейств $\wp^{(0)} = \wp$ и $\wp_\gamma^{(0)} = \wp_\gamma$ повну систему допусків $Q\left(\wp^{(0)}, \wp_\gamma^{(0)}\right)$, де $\wp = \cup P$, $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$.

Крок s. На множинах $P^{(s-1)}$ и $P^{\gamma(s-1)}$, обраних із сімейств $\wp^{(s-1)}$ и $\wp^{(s)}$ при заданій повній системі допусків $Q\left(\wp^{(s-1)}, \wp_\gamma^{(s-1)}\right)$, застосовується оператор відсіву E. В результаті отримуються нові сімейства $\wp^{(s)} = \cup P^{(s)}$, $\wp^{(s)} \subseteq \wp^{(s-1)}$ и $\wp_\gamma^{(s)} = \cup P^{\gamma(s)}$, $\wp_\gamma^{(s)} \subseteq \wp_\gamma^{(s-1)}$ і множина $X_\gamma^{(s)}$ така, що $X_\gamma^{(s)} \subseteq X_\gamma^{(s-1)} \subseteq X$. Для сімейств $\wp^{(s)}$ та $\wp_\gamma^{(s)}$ обчислюється повна система допусків $Q\left(\wp^{(s)}, \wp_\gamma^{(s)}\right)$. При обчисленні допусків пропонується використовувати нечіткі множини *α*-рівнів [13] і зміщення вправо нижньої границі інтервалу допуску. Якщо

$Q\left(\wp^{(s-1)},\wp_\gamma^{(s-1)}\right)=Q\left(\wp^{(s)},\wp_\gamma^{(s)}\right)$, то обчислення закінчуються, при цьому $X_\gamma^{(s_0)}=X_\gamma^{(s)}$, інакше – до кроку s+1.

Множина варіантів $X_\gamma^{(s_0)}$, котрі створюються в результаті застосування оператора Ω, є апроксимацією множин допустимих варіантів $D_\gamma \subseteq X_\gamma^{(s_0)}$, серед яких вибирається максимальний варіант $\mathbf{x}^*$, котрий перевіряється на оптимальність. У випадку, коли він є допустимим, але не оптимальним, то він обирається в якості наближеного. Якщо він є недопустимим, то на сімействах $\wp^{(s_0)}$ і $\wp_\gamma^{(s_0)}$ застосовується оператор конструювання κ, котрий будує множину $\tilde{\wp}=\wp\cup\wp_\gamma$ і формує агреговану задачу A_γ: максимізувати $F\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots p_r\right)$ при $g_i\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_r\right)\le g_i^*$, $i=\overline{1,m}$, $\left(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_r\right)\in\tilde{\wp}$, $r\le n$, $\cup p_j=\mathbf{x}\in X_\gamma^{(s_0)}$.

Якщо для максимального варіанту $\mathbf{x}=\cup p_j$ не справджується критерій оптимальності, то розв'язується задача A_γ і на оптимальність перевіряється отриманий розв'язок [7].

1. Михалевич В.С., Шор Н.З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Труды IV Всесоюз.мат.съезда, М.,1961. – С.91. 2. Михалевич В.С., Шор Н.З. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных решений. – Киев: Наукова думка, 1977. – 178с. 3. Беллман Р. Динамическое программирование. – Москва: Иностранная литература.,1960. – 400 с. 4. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова думка, 1984. – 216 с. 5. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика, 1978, №4. – С. 99-105. 6. Сергиенко И.В., Волошин А.Ф. и др. Нахождение субоптимальных решений в дискретных оптимизационных задачах методом ПАВ // Вычислительные аспекты в пакетах прикладных программ. – Киев, ИК АН УССР, 1980. – С.25-35. 7. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Доклады АН СССР, 1987, том 293, №3. – С.549-553. 8. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем. – Киев: Наукова думка, 1993. – 312 с. 9. Методы анализа статических балансовых эколого-экономических моделей большой размерности // Издательство "Педагогика", Научные записки, том 7, Киев, 2004. – С.43-55. (укр. яз.). 10. Волошин А., Кудин В., Богаенко В. Анализ малых возмущений линейных экономико-математических моделей // International Book Series "Information Science&Computing", N10, 2009. – P.67-73. 11. Гаращенко Ф.Г., Волошин А.Ф. и др. Развитие методов и технологий моделирования и оптимизации сложных систем: Монография. – Киев: Издательство "Сталь", 2009. – 668 с. 12. Волкович В.Л., Волошин А.Ф и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова думка, 1984. – 216 с. 13 Волошин А., Маляр Н., Швалагин О. Нечеткий алгоритм последовательного анализа вариантов // Information science & computing, Number 15. Sofia, Bulgaria, 2009. – P.189-194. 14. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 208 с. 15. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – К.: Издательский Дом "Слово", 2008. – 344 с.

Надійшла до редколегії 08.07.10

УДК 517.929

І. Джалладова, канд. фіз.-мат. наук

ОПТИМІЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядаються системи нелінійних диференціальних і різницевих рівнянь, праві частини яких залежать від напівмарковського процесу. За допомогою функцій Ляпунова, отримано матричні диференціальні і різницеві рівняння типу Ріккати, інтегрування яких дозволяє здійснити синтез оптимального керування.

We consider the system of non-linear differential and difference equation, witch right part depending from Semi-Markov process. With help Lyapunov functions we receive matrix differential equations Riccaty type. Integrating this equation we made the syntheses optimal control.

Вступ

В [1, 2] розглядається стохастичні динамічні системі, яка визначається системою лінійних різницевих рівнянь з напівмарковськими переключеннями на ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,F), F=\left\{\Im_t,\forall t\ge 0\right\}\subset\Im$ [3].

Простір розв'язків таких систем часто інтерпретують як фазовий простір станів випадкового середовища, вимірні підмножини якого є сукупністю станів цього середовища. В якості фазового простору станів розглядають повний метричний сепарабельний простір, як правило евклидов простір або скінчену множину з σ-алгеброю всіх підмножин X. При певних умовах в задачах такого типу, кажуть про розв'язки в сенсі сильного розв'язку задачі Коші [4]. Наша задача – отримання надійного і простого методу дослідження оптимізації розв'язків такого класу систем, а також його обґрунтування шляхом застосування функцій Ляпунова для дослідження стійкості розв'язків системи [5]. Ми розглядаємо конкретні нелінійні системи диференціальних та різницевих рівнянь з параметрами, які залежать від напівмарковських процесів, і ставимо задачу отримання умов для синтезу оптимального керування.

1. Оптимізація розв'язків системи нелінійних різницевих рівнянь з напівмарковською правою частиною

Нехай на ймовірносному просторі $(\Omega,\Im,\mathrm{P})$ задано систему нелінійних різницевих рівнянь

$$X_{k+1}=F\left(k,X,U_k,\xi_k\right)\ ,F\left(k,0,0,\xi_k\right)\equiv 0\left(k=0,1,2\ldots\right) \quad (1)$$

з початковою умовою $\mathrm{X}(0)=x_0\in E_m$, де ξ_n – напівмарковський ланцюг, який набуває значення $\theta_1,\ldots,\theta_n$ з інтенсивностями $q_{ls}\left(k\right)\left(l,s=1\ldots.n;k=1,2\ldots\right)$, що задовольняють умови [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}q_{js}\left(k\right)=1,\ \ q_{js}\left(k\right)\ge 0\ \ \left(j,s=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots\right).$$

$$q_s\left(k\right)=\sum_{j=1}^{n}q_{js}\left(k\right),\ \ \sum_{s=1}^{\infty}q_s\left(k\right)=1\,.$$