

ТРИЧЛЕННІ РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РАКА КВАНТОВОЇ АЛГЕБРИ $U_q(su_2)$

І.І. Качурик

Технологічний університет Поділля, 280016, Хмельницький-16, вул. Інститутська, 11

На основі теорії базисних функцій одержані різні вирази і тричленні рекурентні співвідношення для коефіцієнтів Рака квантової алгебри $U_q(su_2)$. Показано, що в асимптотичній границі рекурентні формули для q -коефіцієнтів Рака дають рекурентні формули для q -коефіцієнтів Клебша-Гордана.

1. В даний час у фізиці все більше зацікавлення викликають квантові симетрії, які формулюються на мові квантових груп. Їх застосування вимагає розробки в рамках теорії представлень добре розробленого обчислювального формалізму, особливо теорії коефіцієнтів Клебша-Гордана (ККГ) і коефіцієнтів Рака (КР).

Мета даної роботи – знайти, спираючись на теорію базисних гіпергеометричних функцій, тричленні рекурентні формули для КР (і ККГ) такої простої (але важливої для фізики) квантової алгебри, як $U_q(su_2)$. (Початкові відомості про цю алгебру і її незвідні представлення можна знайти у монографії [1]).

2. Алгебра $U_q(su_2)$ породжується трьома елементами E^+ , E^- і H , які задовільняють комутаційні співвідношення такого вигляду:

$$\begin{aligned} [H, E^\pm] &= \pm E^\pm, \\ [E^+, E^-] &= (q^H - q^{-H}) / (q^{1/2} - q^{-1/2}), \end{aligned}$$

де q – параметр деформації. При $q \rightarrow 1$ генератори E^\pm і H переходять відповідно в генератори J^\pm і J_z алгебри Лі su_2 . Скінченно-вимірні незвідні представлення алгебри $U_q(su_2)$ задаються цілим або напівцілим невід'ємним числом l . В просторі H_l представлення T_l , що відповідає числу l , можна ввести ортонормований базис e_m ,

$m = -l, -l+1, \dots, l$, на елементи якого оператори E^\pm , H діють за формулами $E^\pm e_m = ([l \mp m][l \pm m + 1])^{1/2} e_{m \pm 1}$,

$$H e_m = m e_m.$$

Тут $[x]$ позначає q -число $[x] = (q^{x/2} - q^{-x/2}) / (q^{1/2} - q^{-1/2}) = q^{-(n-1)/2} (1 - q^n) / (1 - q)$.

Відмітимо, що для алгебри $U_q(su_2)$, на відміну від звичайної алгебри su_2 , маємо $T_i \otimes T_j \neq T_j \otimes T_i$.

КР квантової алгебри $U_q(su_2)$ з'являються при розгляді тензорного добутку $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$. Простір $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ представлення $T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$ може розглядатись як $(H_1 \otimes H_2) \otimes H_3$ або як $H_1 \otimes (H_2 \otimes H_3)$. Базисні елементи $e_p^{[(l_1/2)l_2/2, l_3, l]_q}$, $e_p^{[l_1(l_2/2), l_3, l]_q}$ цих просторів зв'язані унітарною матрицею R_q [1]:

$$e_p^{[(l_1/2)l_2/2, l_3, l]_q} = \sum_{l_{23}} R_q(l_1 l_2 l_3, l_{12} l_{23}, l) e_p^{[l_1(l_2/2), l_3, l]_q}.$$

Числа цієї матриці називають КР квантової алгебри $U_q(su_2)$ або q -КР. В подальшому будемо позначати їх через $R_q(abd, cf, e)$. Вони зв'язані з q - $(6j)$ -

символами $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q$ рівністю

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = (-1)^{a+b+d+e} ([2c+1][2f+1])^{-1/2} \times$$

$\times R_q(abd, cf, e)$.

Явний вигляд q - $(6j)$ - коефіцієнтів через одну суму був отриманий (доволі

складним шляхом) у [2] (досить простий спосіб відповідних обчислень описаний у роботі [3]):

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q := \Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(aef) \Delta(bdf) \times$$

$$\times \sum_r \frac{(-1)^r [r+1]! ([a+c+d+f-r]! [b+c+e+f-r]!)^{-1}}{[r-a-b-c]! [r-c-d-e]! [r-a-e-f]! [r-b-d-f]! [a+b+d+e-r]!}, \quad (1)$$

де $\Delta(abc) \equiv \left(\frac{[a+b-c]! [a-b+c]! [-a+b+c]!}{[a+b+c+1]!} \right)^{1/2}$, $[n]! \equiv [n][n-1] \dots [1]$.

Порівнюючи цю формулу з відповідною формулою для $(6j)$ - коефіцієнтів алгебри $su(2)$ (див. (9.2(1)) у [4]), приходимо до висновку, що з останніх вирази для q - $(6j)$ -коефіцієнтів

можна отримати заміною звичайних факторіалів $n!$ на q -факторіали $[n]!$. Приведений тут вираз для них можна записати у такому вигляді:

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \frac{(-1)^{a+b+d+e} \Delta(abc) \Delta(aef) \Delta(cde) \Delta(dbf) [a+b+d+e+1]!}{[a+b-c]! [a+e-f]! [b+d-f]! [d+e-c]! [c+f-a-d]! [c+f-b-e]!} \times$$

$$\times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} q^{c-a-b}, q^{f-a-e}, q^{f-b-d}, q^{c-d-e} \\ q^{-a-b-d-e-1}, q^{c+f-b-e+1}, q^{c+f-a-d+1} \end{matrix}; q, q \right), \quad (1)$$

Тут ${}_4\Phi_3(z)$ - базисна гіпергеометрична функція аргументу $z = q$. В загальному випадку

$${}_{s+1}\Phi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix}; q, z \right) \equiv$$

$$\equiv {}_{s+1}\Phi_s(a_1, a_2, \dots, a_s; b_1, b_2, \dots, b_s | q, z) =,$$

де $(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j)$, $(a; q)_0 = 1$.

Детальні відомості про такі функції можна знайти у книзі [5]. Використовуючи співвідношення

$${}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} -n, \alpha, \beta, \gamma \\ \delta, \rho, \sigma \end{matrix}; q, q \right) = q^{n(\beta+\gamma-\delta)} \frac{(q^{\alpha-\rho-n+1}; q)_n (q^{\alpha-\sigma-n+1}; q)_n}{(q^\rho; q)_n (q^\sigma; q)_n} \times$$

$$\times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} -n, \alpha, \delta - \beta \\ \delta, \alpha - \rho - n + 1, \alpha - \sigma - n + 1 \end{matrix}; q, q \right), \quad (2)$$

яке справедливе при умові збалансованості $\alpha + \beta + \gamma - n + 1 = \delta + \rho + \sigma$ суми ${}_4\Phi_3$, одержимо інші вирази для q -

$(6j)$ -символів, а саме ті, які є q -аналогами відомих у фізиці виразів для звичайних $(6j)$ -символів (див. [4]). Для

всіх випадків умова збалансованості виконується.

Нехай $n = b + d - f$, $\alpha = f - a - c$, $\beta = c - a - b$, $\gamma = c - d - e$, $\delta = c + f - a - d + 1$, $\rho = -a - b - c - d - 1$, $\sigma = c + f - b - c + 1$. Тоді із (1) з допомогою (2) з урахуванням формул

$$(q^{N+1}; q)_r = q^{r(r+2N-1)/4} (1-q)^r \frac{[N+r]!}{[N]!}, \quad (3)$$

$$(q^{-N}; q)_r = (-1)^r (1-q)^r \frac{q^{r(r-2N-3)/4} [N]!}{[N-r]!}, \quad (4)$$

виводимо (q -аналог формули (9.2(11)) із книги [4]):

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \\ & = \frac{(-1)^{a+b+d+e} \Delta(abc) \Delta(aef) \Delta(bdf) \Delta(cde) [a+e+f+1]! [a+d+c-f]! [b+d+f+1]!}{[2f+1]! [a+b-c]! [a+e-f]! [b+d-f]! [d+e-c]! [d+c-e]! [a+c-b]! [c+f-a-d]!} \times \\ & \times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} q^{f-a-e}, q^{f-b-d}, q^{e-a+f+1}, q^{b+f-d+1} \\ q^{f-a-d-c}, q^{f+c-a-d}, q^{2f+2} \end{matrix} ; q, q \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Покладемо у (1) $n = b + d - f$, $\alpha = c - a - b$, $\beta = c - d - e$, $\gamma = f - a - e$, $\delta = -a - b - d - e - 1$, $\rho = c + f - b - e + 1$, $\sigma = c + f - a - d + 1$ і застосуємо перетворення (2), використавши (3) і (4). Те ж проробимо при $n = a + b + c + 1$, $\alpha = -b - d - f - 1$, $\beta =$

$= c - a - b$, $\gamma = f - b - d$, $\delta = -2b$, $\rho = e - a - b - d$, $\sigma = -a - b - d - e - 1$. В результаті отримаємо q -аналог формули (9.2(12)) із книги [4]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \\ & = \frac{(-1)^{b+c+e+f} \Delta(abc) \Delta(aef) \Delta(cde) \Delta(bdf) [2b]! [b+f+c+e+1]! [b+f+c-e]!}{[a+b-e]! [b+c-e]! [c+e-d]! [d+c-e]! [a+f-e]! [b+d-f]! [b+f-d]! [f+e-a]!} \times \\ & \times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} q^{a-b-c}, q^{-a-b-c-1}, q^{-b-d-f-1}, q^{d-b-f} \\ q^{-2b}, q^{-b-c-e-f-1}, q^{e-b-f-c} \end{matrix} ; q, q \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Покладемо у виразі (6) спочатку $n = a + b + c + 1$, $\alpha = -b - d - f - 1$, $\beta = c - a - b$, $\gamma = f - b - d$, $\delta = -a - b - d - e - 1$, $\rho = e - a - b - d$, $\sigma = -2b$, потім $n = a + c - b$, $\alpha = b - d - f$, $\beta = -c - d - e - 1$, $\gamma = -a - e -$

$-f - 1$, $\delta = -a - d - f - c - 1$, $\rho = b - c - e - f$, $\sigma = b - a - d - e$ і обидва рази застосуємо (2). Приходимо до формули (q -аналог формули (9.2(10)) із [4])

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q =$$

$$= \frac{(-1)^{a+d+c+f} \Delta(abc) \Delta(bdf) [a+d+f+c+1]! [a+e+d-b]! [c+f+e-b]!}{\Delta(aef) \Delta(cde) [a+e+f+1]! [a+c-b]! [d+c+e+1]! [d+f-b]!} \times \\ \times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-a-e-f-1}, q^{b-a-c}, q^{b-d-f}, q^{-c-d-e-1} \\ q^{-a-d-f-c-1}, q^{b-a-d-e}, q^{b-c-e-f} \end{matrix} ; q, q \right). \quad (7)$$

З цієї формули з допомогою (2)-(4) також в два кроки (1) $n = a + c - b$, $\alpha = b - d - f$, $\beta = -c - d - e - 1$, $\gamma = -a - e - f - 1$, $\delta = -a - d - f - c - 1$, $\rho = b - c - e - f$, $\sigma = b - a - d - c$; 2) $n = d + f - b$, $\alpha = b - a + c + 1$, $\beta = b - a - e$, $\gamma = b - d + f + 1$, $\delta = 2b + 2$,

$\rho = b - a - d + c + 1$, $\sigma = b - a - d - e$ приходимо до такого виразу для q - $(6j)$ -коефіцієнтів (q -аналог формули (9.2(9) із книги [4]):

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \frac{(-1)^{a+d+f+c} \Delta(aef) \Delta(bdf) [a+d+f-c]! [b+e-a]! [c+e-d]!}{\Delta(abc) \Delta(cdb) [b+e-a-d]! [b+c+e-f+1]! [d+f-b]! [a+f-e]!} \times \\ \times {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} q^{b-a+c+1}, q^{b-d-f}, q^{c-a-f}, q^{c+e-d+1} \\ q^{b-a-d+e+1}, q^{b+c+e-f+2}, q^{c-a-d-f} \end{matrix} ; q, q \right), \quad (8)$$

Порівнюючи одержані формули із відповідними їм "класичними" аналогами, приходимо до висновку, що вони відрізняються від останніх заміною m на $[m]!$ і ${}_4F_3(n, a, b, c; d, e, f; 1)$ на ${}_4\Phi_3(n, a, b, c; d, e, f; q, q)$. При $q = 1$ вони співпадають. Кожен з отриманих виразів для q - $(6j)$ -символів можна представити через суму типу (1'). Наявність різних виразів для q -КР зручне для дослідження їх властивостей симетрії, асимптотичних властивостей, одержання частинних значень, які не містять сум.

3. Для отримання рекурентних співвідношень для q -КР або q - $(6j)$ -символів треба знайти відповідне співвідношення для базисної гіпергеометричної функції ${}_4\Phi_3$, через яку вони виражаються. Щоб цього досягти скористаємось результатами роботи [6]. На основі формул (2.9) і (2.10) цієї роботи після деяких перетворень знаходимо такий зв'язок між трьома базисними функціями ${}_4\Phi_3$, параметри яких відрізняються на 1:

$${}_4\Phi_3(q^\alpha, q^\beta, q^\gamma, q^\delta; q^i, q^j, q^k | q, q) = \frac{[\beta][\alpha-i]}{[i][\alpha-\beta]} {}_4\Phi_3(q^\alpha, q^{\beta+i}, q^\gamma, q^\delta; q^{i+1}, q^j, q^k | q, q) - \\ - \frac{[\beta-i][\alpha]}{[i][\alpha-\beta]} {}_4\Phi_3(q^{\alpha+i}, q^\beta, q^\gamma, q^\delta; q^{i+1}, q^j, q^k | q, q). \quad (9)$$

Тут було враховано, що $q_i^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1} = q^{i+j+k}$. Будемо підставляти у (9) вирази

${}_4\Phi_3$ через $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q$ із приведених вище формул.

Почнемо з формули (1). Кладемо тут
 $c - a - b = \alpha$, $f - a - e = \beta$, $f - b - d = \gamma$,
 $c - d - e = \delta$, $-a - b - d - e - 1 = i$,
 $c + f - b - e + 1 = j$, $c + f - a - d + 1 = k$.
 Визначаємо відповідні ${}_4\Phi_3$ і підставляємо

у (9). Після деяких обчислень одержуємо співвідношення між трьома q - $(6j)$ -коефіцієнтами, параметри яких відрізняються на $1/2$:

$$\begin{aligned} & [c - b + e - f] ([a + b + c + 1][a + e + f + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = \\ & = ([a + b - c][a + f - e][b + f - d][b + d + f + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a - 1/2 & b - 1/2 & c \\ d & e & f - 1/2 \end{Bmatrix}_q - \\ & - ([a - b + c][a + e - f][c + e - d][d + c + e + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a - 1/2 & b & c - 1/2 \\ d & e - 1/2 & f \end{Bmatrix}_q, \quad (10) \end{aligned}$$

де ми ввели нові позначення:

$$\begin{aligned} (\delta - \alpha - \beta + (\gamma - i + j - k - 1)/4) &= a, \\ (\delta + \beta - \alpha - \gamma - i - j + k - 1)/4 &= b, \\ (\alpha + \delta - i - 1)/2 &= c, \\ (\alpha - \delta + j - k + \beta - \gamma - 1)/4 &= d, \\ (\alpha - \beta - \delta + \gamma - i - j + k - 1)/4 &= e, \quad (\beta + \gamma - i - 1)/2 = f. \end{aligned}$$

Якщо у (9) підставити ${}_4\Phi_3$, виражену із (5), поклавши $f - a - e = \alpha$, $f - b - d = \beta$, $e - a + f + 1 = \gamma$, $b + f - d + 1 = \delta$, $2f + 2 = i$, $f + c - a - d = j$, $f - c - a - d = k$, то з точністю до позначень одержимо таку рекурентну формулу:

$$\begin{aligned} & [a + e - b - d] ([a - e + f + 1][d - b + f + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = \\ & = ([a + e - f][b + d + f + 2][c + d - e + 1][c - d + e])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d + 1/2 & e - 1/2 & f + 1/2 \end{Bmatrix}_q - \\ & - ([a - b + c + 1][b - a + c][a + e + f + 1][b + d - f])^{1/2} \begin{Bmatrix} a + 1/2 & b - 1/2 & c \\ d & e & f + 1/2 \end{Bmatrix}_q. \quad (11) \end{aligned}$$

Звернемось тепер до формули (6). Кладемо $a - b - c = \alpha$, $-a - b - c - 1 = \beta$, $-b - d - f - 1 = \gamma$, $d - b - f = \delta$, $-2b = i$,

$-b - c - e - f - 1 = j$, $e - b - f - c = k$. На основі (9) отримуємо (ми знову перейменували параметри):

$$\begin{aligned} & [2a + 1] ([b + d - f][b + d + f + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = \\ & = ([a + b - c][a + b + c + 1][a + e - f][f + e - a + 1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a - 1/2 & b - 1/2 & c \\ d & e & f + 1/2 \end{Bmatrix}_q + \\ & + ([b + c - a][a - b + c + 1][a + f - e + 1][a + f + e + 2])^{1/2} \begin{Bmatrix} a + 1/2 & b - 1/2 & c \\ d & e & f + 1/2 \end{Bmatrix}_q. \quad (12) \end{aligned}$$

Аналогічно, поклавши
 $-a-e-f-1=\alpha, b-a-c=\beta,$
 $b-d-f=\gamma, -c-d-e-1=\delta,$
 $-a-d-f-c-1=i,$
 $b-a-d-e=j,$
 $b-c-e-f=k$ у (7) і

$b-a+c+1=\alpha, b-d-f=\beta,$
 $e-a-f=\gamma, c+e-d+1=\delta, b-a-d+e+1=i,$
 $b+c+e-f+2=j, c-d-a-f=k$ у (8),
 з допомогою (9) (використавши (3) і (4))
 приходимо до таких рекурентних формул
 для q - $(6j)$ -коефіцієнтів

$$\begin{aligned}
 & [b-c+e+f+1]([a+b+c+1][a+f-e])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \\
 & = ([a-b+c][e-a+f+1][d+c-e][d-c+e+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a-1/2 & b & c-1/2 \\ d & e+1/2 & f \end{matrix} \right\}_q - \\
 & - ([a+b-c][a+e+f+1][b+d+f+1][b-d+f])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a-1/2 & b-1/2 & c \\ d & e & f-1/2 \end{matrix} \right\}_q, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [d-a+c+f+1]([a-b+c][b-d+f+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \\
 & = ([a+b-c+1][d-b+f][c+d-e][c+d+e+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b+1/2 & c-1/2 \\ d-1/2 & e & f \end{matrix} \right\}_q + \\
 & + ([b-a+c+1][a+e-f][e-a+f+1][b+d+f+2])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a-1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{matrix} \right\}_q. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Якщо за параметри у (9) взяти інші
 значення з одної й тої ж формули для
 $\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q$, то можна одержати
 рекурентні співвідношення іншого
 вигляду. Поставимо, наприклад, у (5)
 $f-a-e=\alpha,$
 $l+f-d+1=\beta,$

$e-a+f+1=\gamma,$
 $f-b-d=\delta,$
 $f+c-a-d+1=j,$
 $f-c-a-d=k, 2f+2=i.$

Тоді (9) дає

$$\begin{aligned}
 & [a+b-d+e+1]([b+d+f+2][a-e+f+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}_q = \\
 & = ([a+e-f][d-b+f+1][c+e-d][d+c-e+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d+1/2 & e-1/2 & f+1/2 \end{matrix} \right\}_q - \\
 & - ([a+b-c+1][a+b+c+2][a+e+f+2][b-d+f+1])^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a+1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{matrix} \right\}_q. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Поклавши у тій же формулі (5) $e-a+$
 $+f+1=\alpha, b-d+f+1=\beta, f-a-e=\gamma,$

$f-b-d=\delta, f+c-a-d+1=j, f-a-d-c=k,$
 $2f+2=i,$ з допомогою (9) дістанемо

$$\begin{aligned}
 & [a+b-d-e]([a+e+f+2][b+d+f+2])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = \\
 & = ([e-a+f+1][d-b+f+1][d-c+e+1][d+c+e+2])^{1/2} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d+1/2 & e+1/2 & f+1/2 \end{Bmatrix}_q - \\
 & - ([a+b-c+1][a+b+c+2][a-e+f+1][b-d+f+1])^{1/2} \begin{Bmatrix} a+1/2 & b+1/2 & c \\ d & e & f+1/2 \end{Bmatrix}_q. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Перетвореннями симетрії й комбінуванням приведених вище рекурентних співвідношень можна отримати низку інших такого ж типу формул для $q-(6j)$ -коефіцієнтів. При цьому корисною може виявитись 4-параметрична тотожність $[a+b][c+d]-[a+c][b+d]=-[a-d][b-c]$ для q -чисел.

4. Для q -коефіцієнтів Рака введемо альтернативне позначення: $R_q(abd,ef,c) = R_{e-a,c-e,c-a}^{bdf}(c;q)$. В цих позначеннях $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q = (-1)^{a+b+d+e} ([2c+1][2f+1])^{-1/2} \times R_{c-a,e-c,e-a}^{bdf}(e;q)$. (17)

У роботі [3] показано, що $\lim_{j \rightarrow \infty} R_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j;q) = \begin{cases} C_{\rho\sigma\tau}^{abc}(q), & |q| \geq 1, \\ C_{\rho\sigma\tau}^{abc}(q^{-1}), & |q| < 1, \end{cases}$ (18)

де $C_{\rho\sigma\tau}^{abc}(q)$ - коефіцієнти Клебша-Гордана квантової алгебри $U_q(su_2)$ і $\tau = \rho + \sigma$. Цей факт дозволяє знайти рекурентні співвідношення для q -ККГ із

рекурентних формул для $q-(6j)$ -коефіцієнтів. Для цього у відповідних формулах для $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}_q$ треба перейти до альтернативних q -КР згідно (17), ввести перепозначення $a \rightarrow j - \rho - \sigma$, $b \rightarrow a$, $c \rightarrow j - \sigma$, $d \rightarrow b$, $e \rightarrow j$, $f \rightarrow c$ і зробити граничний перехід (18). При цьому необхідно також врахувати, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{[a+j]}{[b+j]} = \begin{cases} q^{(a-b)/2}, & |q| \geq 1, \\ q^{-(a-b)/2}, & |q| < 1. \end{cases}$$

Виконавши таку процедуру, наприклад, у формулах (15) і (16) (при $q \geq 1$), одержимо, відповідно

$$\begin{aligned}
 & q^{(a-b)/4} \left(\frac{[2c+2][a+b+c+2][c-\rho-\sigma+1]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\rho+\sigma}^{abc}(q) = \\
 & = q^{-(a+c-\rho+2)/4} ([b-a+c+1][b-\sigma+1])^{1/2} C_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}^{a,b+1/2,c+1/2}(q) + \\
 & + q^{-(b+c-\sigma+2)/4} ([a-b+c+1][a-\rho+1])^{1/2} C_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}^{a+1/2,b,c+1/2}(q), \\
 & [a-b-\rho-\sigma] \left(\frac{[2c+2][a+b+c+2]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\rho+\sigma}^{abc}(q) = \\
 & = q^{(a-c-\sigma)/4} ([a-b+c+1][a-\rho+1][c-\rho-\sigma+1])^{1/2} C_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}^{a+1/2,b,c+1/2}(q) - \\
 & - q^{(b-c+\rho)/4} ([b-a+c+1][b+\sigma+1][c+\rho+\sigma+1])^{1/2} C_{\rho,\sigma+1/2,\rho+\sigma+1/2}^{a,b+1/2,c+1/2}(q).
 \end{aligned}$$

Аналогічного типу рівність дає формула (11):

$$q^{-(a+b+1)/4} \left(\frac{[b-a+c+1][c-\rho-\sigma+1][2c+2]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\sigma\rho+\sigma}^{abc}(q) =$$

$$= q^{(a-c+\rho+1)/4} ([a+b+c+2][b-\sigma+1])^{1/2} C_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}^{a,b+1/2,c-1/2}(q) -$$

$$- q^{(b+c-\sigma+1)/4} ([a+b-c][a+\rho])^{1/2} C_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}^{a-1/2,b,c+1/2}(q).$$

Цікаве співвідношення випливає із (12):

$$q^{-(\sigma+2\rho)/4} \left(\frac{[a+b-c][b-a+c+1][2c+2]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\sigma\rho+\sigma}^{abc}(q) =$$

$$= q^{(c-a+1)/4} ([a+\rho][c-\rho-\sigma+1])^{1/2} C_{\rho-1/2,\sigma,\rho+\sigma-1/2}^{a-1/2,b,c+1/2}(q) -$$

$$- q^{-(c-a+1)/4} ([a-\rho][c+\rho+\sigma+1])^{1/2} C_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}^{a-1/2,b,c+1/2}(q)$$

Щоб скористатись формулами (10) і (13), попередньо зробимо у них заміни $a \leftrightarrow d$ і $b \leftrightarrow e$, а потім $-a \leftrightarrow c$ і $d \leftrightarrow f$. Тоді з допомогою описаної вище процедури граничного переходу до q -ККГ одержуємо, відповідно

$$[a-b-\rho-\sigma] \left(\frac{[a+b+c+1][2c]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\sigma\rho+\sigma}^{abc}(q) =$$

$$= q^{(a-c-\sigma)/4} ([a-\rho][c-\rho-\sigma][a-b+c])^{1/2} C_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}^{a-1/2,b,c-1/2}(q) -$$

$$- q^{(b-c+\rho)/4} ([b-a+c][b+\sigma][c+\rho+\sigma])^{1/2} C_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}^{a,b-1/2,c-1/2}(q),$$

$$q^{c/4} [a+b+\rho+\sigma+1] \left(\frac{[b+c-a][2c]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\sigma\rho+\sigma}^{abc}(q) =$$

$$= q^{-(a+\sigma+1)/4} ([c-\rho-\sigma][a+b-c+1][a+\rho+1])^{1/2} C_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}^{a+1/2,b,c-1/2}(q) +$$

$$+ q^{(b+\rho)/4} ([c+\rho+\sigma][a+b+c+1][b+\sigma])^{1/2} C_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}^{a,b-1/2,c-1/2}(q)$$

Зробивши спочатку заміни $b \leftrightarrow f$, $c \leftrightarrow e$ у формулі (14), таким же шляхом прийдемо до рівності, подібної попередній:

$$q^{-c/4} [a+b+\rho+\sigma+1] \left(\frac{[a-b+c+1][2c+2]}{[2c+1]} \right)^{1/2} C_{\rho\sigma\rho+\sigma}^{abc}(q) =$$

$$= q^{-(a+\sigma)/4} ([c+\rho+\sigma+1][a+b+c+2][a+\rho+1])^{1/2} C_{\rho+1/2,\sigma,\rho+\sigma+1/2}^{a+1/2,b,c+1/2}(q) -$$

$$- q^{(b+\rho+1)/4} ([c-\rho-\sigma+1][a+b-c][b+\sigma])^{1/2} C_{\rho,\sigma-1/2,\rho+\sigma-1/2}^{a,b-1/2,c+1/2}(q).$$

Інші рекурентні співвідношення для q -ККГ можна одержати із приведених вище їх комбінацією, а також застосуванням властивостей симетрії q -ККГ.

1. Голод П.І., Клімук А.У. Математичні основи теорії симетрій. Київ: Наукова думка, 1992.
2. Kirillov A.N., Reshetikhin N.Yu. Representations of the algebra $Uq(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links. Preprint LOMI E-9-88, Leningrad, 1988.
3. Kachurik I.I., Klimuk A.U., J. Phys. A., 23, 2717 (1990).
4. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
5. Gasper G., Rahman M. Basic hypergeometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
6. Agarwal A.K., Kalnins E.G., Miller W. SIAM J. Math. Anal., 18, 1519 (1987).

THE THREE-TERM RECURRENCE RELATIONS FOR RACAH COEFFICIENTS OF THE QUANTUM ALGEBRA $U_q(su_2)$

I.I. Kachurik

Technological University of Podillia, 280016, Khmelnytsky, Institutskaja str., 11

Different expressions and three-term recurrence relations for Racah coefficients are derived on the basis of the theory basic hypergeometric functions. It is shown that recurrence formulas for q -Racah coefficients give recurrence formulas for Klebsch-Gordan coefficients in asymptotic limit.



Іван Іванович Качурик – доцент Технологічного університету
Поділля