Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Ужгородський національний університет»

І. В. Шапочка

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник
для індивідуальних робіт

Ужгород
Видавництво УжНУ «Говерла»
2020

УДК 512.64
Ш24

Рекомендовано до друку Вченою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(*протокол* №1 *від* 7 *лютого* 2020 *року*).

Рецензенти:

Щедрик В. П. — провідний науковий співробітник відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник;

Тилищак О. А. — доцент кафедри алгебри ДВНЗ «Ужгородський національний університет», кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Шапочка І. В.
Ш24 Лінійна алгебра. Навчальний посібник для індивідуальних робіт. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. 95 с. ISBN 978-617-7825-03-5.

Навчальний посібник містить тексти умов 18-ти задач, які пропонуються студентам математичного факультету державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет» для індивідуальної роботи при вивченні нормативної навчальної дисципліни «Лінійна алгебра». Кожна із запропонованих задач має по 15 варіантів завдань. У посібнику також наведено зразки розв'язань, вище згаданих задач.

Для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей 014.04 «Середня освіта» (спеціалізація «Математика»), 111 «Математика», 112 «Статистика».

УДК 512.64

ISBN 978-617-7825-03-5

Зміст

Передмова

Це навчальне видання призначене студентам математичного факультету державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет», які повинні вивчити навчальну дисципліну «Лінійна алгебра». Для глибокого розуміння теоретичного матеріалу цієї дисципліни та його практичного застосування важливе значення має розв'язування задач. За робочою програмою навчання дисципліни «Лінійна алгебра» передбачено виконання студентами індивідуальної роботи. Методичні рекомендації мають на меті допомогти студенту математику опанувати цю складову частину робочої програми. Навчальний посібник складається із двох розділів, у першому з яких приведено тексти задач для індивідуальної роботи, а у другому — приклади розв'язань цих задач. Відзначимо, що для індивідуальної роботи студентів запропоновані лише найбільш важливі на думку автора питання навчальної програми.

Для більш ґрунтовного засвоєння навчальної дисципліни «Лінійна алгебра», зокрема для підготовки до змістовних модульних контролів та складання іспиту, ми рекомендуємо навчальну літературу, наведену у переліку джерел посилань: навчальні посібники та підручники з лінійної алгебри [1–5] та збірники задач [6–9].

Автор щиро вдячний колегам з математичного факультету державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет» за поради, надані при написанні цього навчального видання.

Розділ 1

Завдання для індивідуальної роботи

Вибір задач з лінійної алгебри, які пропонуються студентам для індивідуальної роботи у цьому навчальному посібнику, обумовлений невпинно зростаючою роллю цього розділу математики у розв'язанні найрізноманітних задач, як природничих наук та інженерії, так і в гуманітарній сфері, зокрема економіці. А та степінь абстракції, яка пропонується теорією, дозволяє підібрати універсальні одноманітні методи до розв'язання цих задач. Випускник математичного факультету повинен добре опанувати зв'язки між геометричними образами та їх можливими аналітико-числовими представленнями, так би мовити, їх «відцифруванням». Тому основний акцент у запропонованих задачах робиться на витоках лінійної алгебри, а саме її застосуванні в аналітичній геометрії. Для порівняння ми пропонуємо розглянути задачу з механіки.

Розглянемо динамічну систему (див. рис. 1.1), яка складається з двох тіл однакової маси m горизонтально з'єднаних між собою трьома однаковими пружинами з коефіцієнтом жорсткості k та закріпленими до двох нерухомих стінок. Знайдемо закони руху кожного з вказаних тіл у випадку горизонтального зміщення цих тіл, якщо на ці тіла не діють сили гравітації та опору, а також нехтують масами пружин.

Нехай $x_1(t)$ — величина зміщення лівого тіла від положення рівноваги x_1^* у момент часу t, а $x_2(t)$ — величина зміщення правого тіла від свого положення рівноваги x_2^* у цей момент часу. Тоді згідно дру-

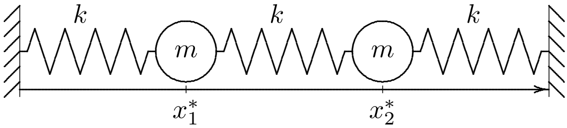

Рис. 1.1: Стан рівноваги.

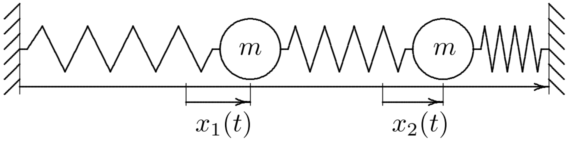

Рис. 1.2: Стан після зміщення.

гого закону Ньютона сила, що діє на перше тіло, дорівнює

$$m(x_1(t) + x_1^*)'' = mx_1''(t).$$

Аналогічно сила, що діє на друге тіло, дорівнює $mx_2''(t)$.

З іншого боку тіла знаходяться під впливом сил розтягу чи стискання пружин, які за законом Гука прямо пропорційні величині розтягу чи стиску пружини. Тому за третім законом Ньютона справджуються наступні рівності:

$$\begin{aligned} mx_1''(t) &= -kx_1(t) + k\left(x_2(t) - x_1(t)\right), \\ mx_2''(t) &= -kx_2(t) + k(x_1(t) - x_2(t)). \end{aligned}$$

Таким чином, щоб знайти закони руху кожного з тіл, досить розв'язати, так звану, систему лінійних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$

$$\begin{cases} mx_1''(t) = -2kx_1(t) + kx_2(t), \\ mx_2''(t) = kx_1(t) - 2kx_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Із теорії систем лінійних диференціальних рівнянь слідує, що розв'язок системи рівнянь (1) є лінійною комбінацією розв'язків, що мають наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\omega t} \\ C_2 e^{\omega t} \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, ω — деякі константи, причому ω може бути комплексним числом. Якщо $\omega = a + bi \in \mathbb{C}$, то «твірні» розв'язки шукають у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_1e^{at}\cos(bt) \\ C_2e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} C_1e^{at}\sin(bt) \\ C_2e^{at}\sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Підставимо замість $x_1(t)$ і $x_2(t)$ відповідно $C_1e^{\omega t}$ і $C_2e^{\omega t}$ у систему рівнянь (1). Одержимо

$$\begin{cases} mC_1\omega^2e^{\omega t} = -2kC_1e^{\omega t} + kC_2e^{\omega t}, \\ mC_2\omega^2e^{\omega t} = kC_1e^{\omega t} - 2kC_2e^{\omega t}. \end{cases} \tag{2}$$

Оскільки рівності (2) справджуються для довільних дійсних значень t, то звідси слідує, що

$$\begin{cases} mC_1\omega^2 = -2kC_1 + kC_2, \\ mC_2\omega^2 = kC_1 - 2kC_2. \end{cases} \tag{3}$$

Поділимо ліву і праву частини кожної із рівностей (3) на m, а опісля перепишемо нові рівності у матричній формі

$$\omega^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ω^2 є власним значенням, а вектор (C_1, C_2) — власним вектором, що йому належить, деякого лінійного оператора φ двовимірного дійсного векторного простору, який задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

у деякому базисі цього простору.

Обчислимо характеристичний многочлен матриці A:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4k}{m}\lambda + \frac{3k^2}{m^2}.$$

Далі знаходимо його корені:

$$\lambda_1 = -\frac{k}{m}, \qquad \lambda_2 = -\frac{3k}{m}.$$

Тому

$$\omega^2 = -\frac{k}{m} \quad \text{або} \quad \omega^2 = -\frac{3k}{m}.$$

Звідси
$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i \quad \text{або} \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}i.$$

Далі, знаходимо власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$. Для цього досить розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею
$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} - \lambda_1 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}.$$

Не важко бачити, що вектор $(1, 1)$ утворює фундаментальну систему розв'язків цієї системи лінійних однорідних рівнянь. Тому всі власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ мають вигляд $\alpha \cdot (1,\ 1)$, де α — довільне дійсне число відмінне від нуля.

Аналогічно можна показати, що всі власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ мають вигляд $\beta \cdot (1,\ -1)$, де β — довільне дійсне число відмінне від нуля.

Підсумувавши все вище сказане, із теорії систем лінійних диференціальних рівнянь слідує, що розв'язок системи рівнянь (1) має наступний вигляд
$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \\ + \gamma \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \\ -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \\ -\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{4}$$
де α, β, γ, δ — деякі дійсні числа. Використовуючи властивості тригонометричних функцій cos та sin розв'язок (4) можна переписати у вигляді
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right) \\ -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right) \end{pmatrix}.$$

Залишимо читачеві можливість обґрунтувати фізичний зміст констант A_1, A_2, θ_1, θ_2 та наявність двох власних значень, яким відповідно належать власні вектори $(1, 1)$ та $(1, -1)$.

1.1 Лінійний простір. Лінійна залежність векторів

Нехай $\mathbb{R}_{2\times2}$ — лінійний простір всіх 2×2-матриць над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ відносно звичайних операцій додавання матриць та множення дійсного числа на матрицю. a_1, a_2, a_3, a_4 є наступними матрицями із $\mathbb{R}_{2\times2}$:

1) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $a_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $a_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $a_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$;

9) $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

10) $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

11) $a_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

12) $a_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

13) $a_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

14) $a_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

15) $a_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Довести, що система матриць a_1, a_2, a_3, a_4 є лінійно незалежною системою векторів лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Представити (записати) у вигляді лінійної комбінації системи векторів a_1, a_2, a_3, a_4 матрицю

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

де α, β, γ, δ — деякі дійсні числа.

1.2 Скінченновимірний лінійний простір. Базис лінійного простору

Довести, що системи векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3 є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1,2,3)$ в обох базисах, а потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат, якщо:

1) $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (2,-1,-1)$, $a_3 = (3,-2,6)$,
$b_1 = (-1,1,3)$, $b_2 = (2,-1,1)$, $b_3 = (1,1,5)$;

2) $a_1 = (3,3,-2)$, $a_2 = (1,-1,3)$, $a_3 = (3,1,1)$,
$b_1 = (-2,1,4)$, $b_2 = (3,-2,1)$, $b_3 = (2,-1,2)$;

3) $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (-1,2,4$, $a_3 = (2,1,1)$,
$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (3,-1,2)$, $b_3 = (5,3,3)$;

4) $a_1 = (2,-1,0)$, $a_2 = (1,1,3)$, $a_3 = (3,2,5)$,
$b_1 = (1,1,4)$, $b_2 = (2,1,1)$, $b_3 = (3,1,3)$;

5) $a_1 = (-1,1,-1)$, $a_2 = (3,2,-3)$, $a_3 = (2,-1,2)$,
$b_1 = (1,2,-1)$, $b_2 = (4,4,-1)$, $b_3 = (3,0,2)$;

6) $a_1 = (4,-2,3)$, $a_2 = (1,-3,1)$, $a_3 = (2,-2,1)$,
$b_1 = (1,1,3)$, $b_2 = (2,-1,1)$, $b_3 = (1,1,5)$;

7) $a_1 = (1,3,-2)$, $a_2 = (2,-1,3)$, $a_3 = (3,1,1)$,
$b_1 = (-1,1,4)$, $b_2 = (3,-2,1)$, $b_3 = (2,-1,2)$;

8) $a_1 = (4,1,-1)$, $a_2 = (-1,2,4)$, $a_3 = (2,1,1)$,
$b_1 = (1,-1,1)$, $b_2 = (3,-1,2)$, $b_3 = (5,3,3)$;

9) $a_1 = (3,1,-1)$, $a_2 = (-1,2,-3)$, $a_3 = (-2,-1,2)$,
$b_1 = (1,1,-1)$, $b_2 = (4,-1,-1)$, $b_3 = (3,1,2)$;

10) $a_1 = (2,3,-1)$, $a_2 = (1,2,4)$, $a_3 = (-2,-3,7)$,
$b_1 = (1,1,-1)$, $b_2 = (4,1,6)$, $b_3 = (3,1,2)$;

11) $a_1 = (-3,2,-1)$, $a_2 = (1,3,2)$, $a_3 = (3,-1,2)$,
$b_1 = (-6,1,-1)$, $b_2 = (2,-1,-1)$, $b_3 = (3,1,2)$;

12) $a_1 = (3, -1, 2)$, $a_2 = (1, 3, 2)$, $a_3 = (-3, 2, -1)$,
$b_1 = (2, -1, -1)$, $b_2 = (-6, 1, -1)$, $b_3 = (3, 1, 2)$;

13) $a_1 = (2, -1, -1)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (3, -2, 6)$,
$b_1 = (1, 1, 5)$, $b_2 = (2, -1, 1)$, $b_3 = (-1, 1, 3)$;

14) $a_1 = (3, -5, 1)$, $a_2 = (1, 1, -2)$, $a_3 = (1, -2, 1)$,
$b_1 = (3, -2, -1)$, $b_2 = (4, 1, 5)$, $b_3 = (2, 1, 3)$;

15) $a_1 = (3, -2, 4)$, $a_2 = (-3, 2, -1)$, $a_3 = (1, -1, 1)$,
$b_1 = (2, 8, 1)$, $b_2 = (0, -1, 2)$, $b_3 = (3, 12, 1)$.

1.3 Ізоморфізм лінійних просторів

Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожному дійсному тривимірному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ ставить у відповідність вектор $\varphi(x)$ із $\mathbb{R}^3$ такий, що:

1) $\varphi(x) = (3x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_3 - x_2)$;

2) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$;

3) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_3,\ x_3 - 3x_1 - x_2)$;

4) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 3x_3,\ x_2 - x_3 - x_1,\ x_1 - x_3)$;

5) $\varphi(x) = (x_3 + 3x_2,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ x_2 + x_3 - x_1)$;

6) $\varphi(x) = (2x_1 + 2x_2 - x_3,\ 2x_3 - x_2,\ x_1 - 3x_2 - 2x_3)$;

7) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_3 + 4x_1,\ x_1 + 2x_2)$;

8) $\varphi(x) = (3x_1 + 2x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_3)$;

9) $\varphi(x) = (x_2 + 4x_3 - x_1,\ x_1 - 3x_3,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$;

10) $\varphi(x) = (2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_3 - 3x_2,\ x_2 + x_3)$;

11) $\varphi(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_2 + x_3,\ 3x_1 + 2x_2 - x_3)$;

12) $\varphi(x) = (x_1 - 3x_3,\ x_2 + 4x_3 - x_1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3)$;

13) $\varphi(x) = (2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 3x_1 - 2x_3 + x_2,\ 2x_2 + 3x_3)$;

14) $\varphi(x) = (5x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 5x_1 - x_2 + x_3)$;

15) $\varphi(x) = (4x_1 + x_2,\ 3x_1 - 5x_2 - x_3,\ x_1 + 5x_2 + x_3)$.

Довести, що φ є ізоморфізмом. Знайти образи $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ відповідно векторів $a = (0, 0, -1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 1)$. Довести, що система векторів $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ є базисом $\mathbb{R}^3$.

1.4 Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами

Знайти деякий базис суми L_1+L_2, а також деякий базис перерізу $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 дійсного векторного простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (СЛОР), а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка системи векторів a_1, a_2,

1) СЛОР — $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (4, 3, 1, 2, -1)$, $a_2 = (1, 7, -2, -1, -10)$;

2) СЛОР — $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (3, 4, -7, -3, -3)$, $a_2 = (-4, 8, -8, -5, -4)$;

3) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (7, -4, 1, 2, 1)$, $a_2 = (10, 0, -6, -1, -2)$;

4) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (-5, 4, 1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$;

5) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (2, 1, -1, 1, 1)$.

6) СЛОР — $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4+2x_5=0,\\ x_1-\ \ x_2\qquad\quad +3x_4+\ \ x_5=0,\\ 3x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0,\\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3+6x_4+3x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,1,1,1,1)$, $a_2=(0,2,3,4,-6)$;

7) СЛОР — $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0,\\ x_1+3x_2+4x_3+3x_4+2x_5=0,\\ x_1+\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4\qquad\quad =0,\\ x_1+3x_2+3x_3+5x_4+5x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,1,1,1,1)$, $a_2=(0,-7,6,2,2)$;

8) СЛОР — $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4+\ \ x_5=0,\\ 5x_1+3x_2+x_3+3x_4+5x_5=0,\\ -x_1+\ \ x_2+x_3+2x_4\qquad\quad =0,\\ 3x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,1,1,1,1)$, $a_2=(3,-6,1,7,3)$;

9) СЛОР — $\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0,\\ \qquad\quad x_2+3x_3-2x_4+\ \ x_5=0,\\ -x_1+\ \ x_2+\ \ x_3\qquad\quad +\ \ x_5=0,\\ \qquad\quad 4x_2+3x_3-\ \ x_4+3x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,0,1,0,1)$, $a_2=(1,3,7,9,-10)$;

10) СЛОР — $\begin{cases} x_1+4x_2+\ \ x_3+\ \ 2x_4+3x_5=0,\\ x_1+2x_2\qquad\quad +\ \ 5x_4+2x_5=0,\\ -x_1\qquad\quad +2x_3+\ \ 4x_4+\ \ x_5=0,\\ x_1+6x_2+3x_3+11x_4+6x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,0,1,0,1)$, $a_2=(-11,6,-6,1,-3)$;

11) СЛОР — $\begin{cases} 3x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4+\ \ x_5=0,\\ \qquad\quad 2x_2+3x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0,\\ -x_1+2x_2+5x_3+3x_4+2x_5=0,\\ 2x_1+\ \ x_2+6x_3+5x_4+3x_5=0,\end{cases}$

$a_1=(1,2,1,-4,7)$, $a_2=(-2,-1,-6,0,10)$;

12) СЛОР — $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0,\\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3+3x_4+2x_5=0,\\ -x_1+2x_2\qquad\quad +2x_4+\ \ x_5=0,\\ x_1+\ \ x_2+2x_3+5x_4+3x_5=0,\end{cases}$

$a_1 = (3, 2, 1, 4, -5)$, $a_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$;

13) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 7, 1, -6, 3)$;

14) СЛОР — $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (2, 2, 2, 2, 2)$, $a_2 = (2, 6, 0, -7, 2)$;

15) СЛОР — $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \end{cases}$

$a_1 = (5, 4, 3, 2, 1)$, $a_2 = (7, -26, 4, 10, 1)$.

1.5 Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора

Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що відображає вектори базису a_1, a_2, a_3 цього простору відповідно у вектори b_1, b_2, b_3. Знайти матрицю лінійного оператора φ у канонічному базисі векторного простору $\mathbb{R}^3$, якщо

1) $a_1 = (1, 3, -2)$, $a_2 = (4, -2, 1)$, $a_3 = (-4, -1, 1)$,
$b_1 = (-4, -1, 1)$, $b_2 = (7, -1, 0)$, $b_3 = (0, -1, 0)$;

2) $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (2, -1, 1)$,
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$;

3) $a_1 = (-1, -1, 1)$, $a_2 = (2, 1, -1)$, $a_3 = (3, 0, 1)$,
$b_1 = (-1, 1, 1)$, $b_2 = (0, -1, 1)$, $b_3 = (-1, 0, 2)$;

4) $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 0)$, $a_3 = (3, -2, 0)$,
$b_1 = (-1, 0, 1)$, $b_2 = (0, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 1)$;

5) $a_1 = (1, -1, -1)$, $a_2 = (-1, 2, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0)$,
$b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (1, 0, -1)$, $b_3 = (2, -1, 0)$;

6) $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2)$, $a_3 = (2, -1, 4)$,
$b_1 = (0, -1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 1)$;

7) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (0, -1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 2)$,
$b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (-1, 2, -1)$, $b_3 = (1, 0, 1)$;

8) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 0)$,
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (2, 1, 2)$;

9) $a_1 = (-1, -1, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$,
$b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (0, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 0)$;

10) $a_1 = (4, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $a_3 = (2, 1, 2)$,
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$;

11) $a_1 = (-2, 3, 1)$, $a_2 = (1, -2, 4)$, $a_3 = (1, -1, -4)$,
$b_1 = (0, -1, 0)$, $b_2 = (-2, 1, 0)$, $b_3 = (2, -1, 1)$;

12) $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (2, 1, -1)$,
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (1, 1, 1)$;

13) $a_1 = (1, -1, -1)$, $a_2 = (-1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 3)$,
$b_1 = (-1, 1, 1)$, $b_2 = (0, -1, 1)$, $b_3 = (-1, 0, 2)$;

14) $a_1 = (8, -5, -1)$, $a_2 = (2, -1, 2)$, $a_3 = (-1, 1, 3)$,
$b_1 = (1, 0, -1)$, $b_2 = (0, 1, 0)$, $b_3 = (-1, 1, 0)$;

15) $a_1 = (-3, -7, 4)$, $a_2 = (3, 4, -3)$, $a_3 = (1, -2, 0)$,
$b_1 = (-1, -1, 0)$, $b_2 = (1, 0, -1)$, $b_3 = (0, 1, 1)$.

1.6 Ядро і образ лінійного оператора

Нехай A (див. нижче) — матриця лінійного оператора φ раціонального векторного простору $\mathbb{Q}^4$ у деякому базисі c_1, c_2, c_3, c_4 цього простору. Знайти деякі базиси образу $\operatorname{Im}\varphi$ та ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного оператора φ. Переконатися у тому, що $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Im}\varphi + \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ker}\varphi = \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^4$.

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; **4)** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; **6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **8)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; **10)** $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; **12)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **14)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\textbf{15)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.7 Дії над лінійними операторами. Зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями

Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ ставить у відповідність кожному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ цього простору вектор $\varphi(x)$ (див. нижче),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора ψ простору $\mathbb{R}^3$ у базисі a_1, a_2, a_3. Знайти у канонічному базисі векторного простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi\psi - 2\psi^2$, якщо

1) $\varphi(x) = (2x_2 - 3x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ x_3 - x_1)$,
$a_1 = (1,\ 1,\ 2),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ -1,\ 2)$;

2) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2,\ 2x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$,
$a_1 = (1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (2,\ 1,\ 1),\ a_3 = (3,\ 2,\ 3)$;

3) $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_3,\ 3x_2 - x_1)$,
$a_1 = (1,\ -1,\ 1),\ a_2 = (-1,\ 2,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2)$;

4) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$,
$a_1 = (1,\ 1,\ -1),\ a_2 = (-1,\ 2,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 0)$;

5) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2)$,
$a_1 = (1,\ -1,\ 1),\ a_2 = (2,\ -1,\ -1),\ a_3 = (3,\ -2,\ 1)$;

6) $\varphi(x) = (6x_1 - x_2 - x_3,\ -x_1 + 9x_2 - x_3,\ -x_1 - x_2 + 7x_3)$,
$a_1 = (2,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 3),\ a_3 = (3,\ 2,\ 3)$;

7) $\varphi(x) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$,
$a_1 = (-1,\ 1,\ -1),\ a_2 = (1,\ 0,\ 2),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2)$;

8) $\varphi(x) = (x_2 + 2x_3,\ 2x_3 - x_1,\ 3x_1 - x_2)$,
$a_1 = (1,\ 2,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ 1,\ 1)$;

9) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 + x_3,\ 2x_1 - 3x_3,\ x_2 - 3x_1)$,
$a_1 = (3,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 2,\ -1),\ a_3 = (2,\ 3,\ -1)$;

10) $\varphi(x) = (2x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2x_3,\ -x_2 - x_1)$,
$a_1 = (0,\ 1,\ -1),\ a_2 = (1,\ 2,\ -1),\ a_3 = (1,\ 1,\ -1)$;

11) $\varphi(x) = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 - x_1 - 3x_3,\ x_1 - x_2)$,
$a_1 = (1,\ 3,\ -2)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 1,\ -1)$;

12) $\varphi(x) = (x_1 + 4x_2 - x_3,\ 4x_1 - x_2 + x_3,\ -x_2)$,
$a_1 = (2,\ 5,\ -1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 0)$;

13) $\varphi(x) = (5x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 2x_3,\ x_3 - x_2)$,
$a_1 = (1,\ 4,\ -1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 5,\ -1)$;

14) $\varphi(x) = (4x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 3x_1 + 2x_2 - x_3)$,
$a_1 = (5,\ -1,\ 3)$, $a_2 = (2,\ 0,\ -1)$, $a_3 = (4,\ -1,\ 3)$;

15) $\varphi(x) = (6x_1 + x_3,\ 2x_3 - 5x_1 - x_2,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3)$,
$a_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 2,\ 4)$, $a_3 = (-1,\ 0,\ 1)$.

1.8 Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен лінійного оператора

Нехай A — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі цього простору. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори оператора φ, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; **2)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **4)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **6)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **8)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$; **10)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -27 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; **12)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; **14)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 9 & -27 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;

15) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1.9 Спектр лінійного оператора. Будова лінійного простору з оператором

Нехай A і B (див. нижче) — матриці відповідно лінійних операторів φ і ψ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Довести, що векторний простір $\mathbb{R}^3$ має базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти цей базис і матрицю оператора φ у цьому базису. Довести, що векторний простір $\mathbb{R}^3$ немає базису, який складається з власних векторів оператора ψ, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & -4 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -9 \end{pmatrix};$

4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -5 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix};$

5) $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix};$

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix};$

7) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

8) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 7 & 6 \\ 6 & -9 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$

9) $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ -3 & 5 & 8 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$;

10) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 5 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ -3 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 5 & -7 & -6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

12) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ 5 & -6 & -6 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

13) $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -8 \\ 8 & -9 & -8 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 1 & -7 & -4 \end{pmatrix}$;

14) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 6 & -8 & -6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

15) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.10 Основна теорема про лінійні простори з оператором. Жордановий базис

Нехай φ і ψ — лінійні оператори векторного простору $\mathbb{R}^3$ (див. нижче). Знайти якісь жорданові базиси векторного простору $\mathbb{R}^3$, відповідно в яких матриці лінійних операторів φ і ψ мають нормальну форму Жордана, якщо

1) $\varphi(x) = (4x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ -6x_1 - 6x_2 - 4x_3)$,
$\psi(x) = (4x_1 - x_2,\ 2x_2 - x_1 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$;

2) $\varphi(x) = (3x_2 - 6x_1 - 6x_3,\ 4x_2 - 9x_1 - 9x_3,\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3)$,
$\psi(x) = (4x_1 + 2x_2 + x_3,\ -3x_1 - x_3,\ 2x_1 + 2x_3)$;

3) $\varphi(x) = (4x_1 + 6x_2 + 8x_3,\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3,\ -5x_1 - 6x_2 - 9x_3)$,
$\psi(x) = (3x_1 - x_2,\ x_2 - x_1 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3)$;

4) $\varphi(x) = (6x_1 + 5x_2 + 4x_3,\ -5x_1 - 4x_2 - 4x_3,\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3)$,
$\psi(x) = (5x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2 - 3x_1 - x_3,\ 2x_1 + 3x_3)$;

5) $\varphi(x) = (-5x_1 - 4x_2 - 2x_3,\ 3x_1 + 3x_2 + x_3,\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3)$,
$\psi(x) = (-x_1 - 3x_2 - 2x_3,\ 2x_1 + 3x_2,\ x_3 - x_1 - x_2)$;

6) $\varphi(x) = (4x_2 - 3x_1 + 3x_3,\ 5x_2 - 4x_1 + 3x_3,\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3)$,
$\psi(x) = (-x_2,\ x_3 - x_1 - 2x_2,\ 2x_1 - 2x_2 - x_3)$;

7) $\varphi(x) = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3,\ 4x_2 - 4x_1 + 3x_3)$,
$\psi(x) = (2x_1 - x_2 - 5x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3,\ x_1 - 3x_3)$;

8) $\varphi(x) = (2x_1 - 5x_2 - 3x_3,\ 2x_2 - x_1 - x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$,
$\psi(x) = (x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_3 + 2x_2 - 2x_1)$;

9) $\varphi(x) = (6x_1 - x_2 - 7x_3,\ 5x_2 - 3x_1 + 8x_3,\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3)$,
$\psi(x) = (3x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_2 - 2x_1 + x_3,\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3)$;

10) $\varphi(x) = (2x_1 - 9x_2 + 5x_3,\ 6x_2 - x_1 - 3x_3,\ 6x_2 - 2x_1 - 3x_3)$,
$\psi(x) = (3x_2 - 3x_1 + 4x_3,\ x_2 - x_1 + 4x_3,\ x_1 - 2x_2 - 4x_3)$;

11) $\varphi(x) = (3x_1 - 5x_2 - 6x_3,\ 5x_1 - 7x_1 - 6x_3,\ 3x_2 - 3x_1 + x_3)$,
$\psi(x) = (x_2 - 3x_1 + 2x_3,\ 5x_3 - x_1,\ x_1 - 2x_2 - 6x_3)$;

12) $\varphi(x) = (4x_1 - 5x_2 - 6x_3,\ 5x_1 - 6x_1 - 6x_3,\ 3x_2 - 3x_1 + 2x_3)$,
$\psi(x) = (4x_1 - 2x_2 - 5x_3,\ 2x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$;

13) $\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + 4x_3,\ 7x_2 - x_1 + 4x_3,\ x_1 - 7x_2 - 4x_3)$,
$\psi(x) = (-2x_2 - 5x_3,\ -2x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 - 4x_3)$;

14) $\varphi(x) = (-2x_1 - x_2 - 2x_3,\ -3x_1 - 2x_3,\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3)$,
$\psi(x) = (-3x_1 - 2x_2 - 5x_3,\ -5x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 - 7x_3)$;

15) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3,\ x_1 - 4x_2 - x_3)$,
$\psi(x) = (4x_1 + x_2 + 2x_3,\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3)$

що для кожного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$.

1.11 λ-матриці. Еквівалентність λ-матриць. Канонічний вигляд λ-матриці. Унімодулярні λ-матриці

Нехай

1) $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 9 & -7 & -6 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 8 & 11 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -11 & 8 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & 14 & -4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

9) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

10) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

11) $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$;

12) $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -12 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

13) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$;

14) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 2 & -8 & -4 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

15) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

— матриці над полем дійсних чисел. Знайти канонічний вигляд кожної із характеристичних матриць $A - \lambda E$ і $B - \lambda E$, де E — одинична матриця порядку 3. Знайти унімодулярні матриці L і R такі, що $L(B - \lambda E)R$ є λ-матрицею канонічного вигляду.

1.12 Евклідові простори. Ортонормований базис евклідового простору. Процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта

Ортогоналізувати методом Ґрама-Шмідта задану систему векторів a_1, a_2, a_3, a_4 чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$, а потім нормувати кожен вектор одержаної ортогональної системи векторів, якщо:

1) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$;

2) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, -1)$;

3) $a_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (1, 1, -1, 0)$, $a_4 = (1, 0, 0, -1)$;

4) $a_1 = (1, 1, -1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$;

5) $a_1 = (1, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$, $a_4 = (0, 1, -1, 1)$;

6) $a_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 1, 0, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$;

7) $a_1 = (1, -1, -1, -1)$, $a_2 = (-1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, -1, 0)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$;

8) $a_1 = (0, 0, 1, -1)$, $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_3 = (1, 0, -1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$;

9) $a_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, -1, -1)$, $a_4 = (1, 0, -1, 0)$;

10) $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, -1, 0)$, $a_3 = (-1, 0, 2, 0)$, $a_4 = (-1, 1, -1, 0)$;

11) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0)$, $a_4 = (-1, 0, 1, 0)$;

12) $a_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 3, 0)$, $a_4 = (-1, 0, 1, 0)$;

13) $a_1 = (-1,-1,-1,-1)$, $a_2 = (1,1,1,-1)$, $a_3 = (0,1,-1,0)$, $a_4 = (-1,0,1,0)$;

14) $a_1 = (1,0,-1,1)$, $a_2 = (0,0,1,-1)$, $a_3 = (-1,1,-1,1)$, $a_4 = (1,1,1,1)$;

15) $a_1 = (-1,1,1,1)$, $a_2 = (-1,-1,1,-1)$, $a_3 = (1,0,1,0)$, $a_4 = (-1,0,1,-1)$.

1.13 Ортогональне доповнення

Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (СЛОР). Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$, вказавши деякий його базис, та проекції вектора c на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$, якщо

1) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-5, 4, 6, -1)$;

2) СЛОР — $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (2, 0, 4, -1)$;

3) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (5, 1, -4, 0)$;

4) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases}$ $c = (1, -7, 7, 2)$;

5) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-14, -3, 5, 0)$;

6) СЛОР — $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (2, 8, 6, 4)$;

7) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-10, 11, -3, -4)$;

8) СЛОР — $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-5, -11, 3, 5)$;

9) СЛОР — $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-15, 29, 3, -5)$;

10) СЛОР — $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (14, -5, 1, -5)$;

11) СЛОР — $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (-15, 29, 3, -5)$;

12) СЛОР — $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (1, -1, -1, 1)$;

13) СЛОР — $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (7, 4, 9, 5)$;

14) СЛОР — $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (9, 1, 7, 10)$;

15) СЛОР — $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ $c = (8, 24, 1, 0)$.

1.14 Ортогональні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору

Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

1) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(-\frac{6}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3,\ \frac{2}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3,$
$\frac{3}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3\big);$

2) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{15}x_2 - \frac{14}{15}x_3,\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{11}{15}x_2 - \frac{2}{15}x_3,$
$\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\big);$

3) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(-\frac{1}{9}x_1 + \frac{8}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3,\ \frac{4}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{7}{9}x_3,$
$\frac{8}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{4}{9}x_3\big);$

4) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{1}{3}x_1 + \frac{14}{15}x_2 - \frac{2}{15}x_3,\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$
$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{15}x_2 + \frac{11}{15}x_3\big);$

5) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{19}{45}x_1 + \frac{8}{9}x_2 + \frac{8}{45}x_3,\ \frac{44}{45}x_3 - \frac{8}{45}x_1 - \frac{1}{9}x_2,$
$\frac{4}{9}x_2 - \frac{8}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_3\big);$

6) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{13}{45}x_2 - \frac{8}{9}x_1 - \frac{16}{45}x_3,\ -\frac{1}{9}x_1 - \frac{8}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3,$
$\frac{4}{9}x_1 + \frac{16}{45}x_2 - \frac{37}{45}x_3\big);$

7) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{3}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 + \frac{4}{13}x_3, \frac{12}{13}x_3 - \frac{4}{13}x_1 - \frac{3}{13}x_2,$
$\frac{4}{13}x_2 - \frac{12}{13}x_1 - \frac{3}{13}x_3\big);$

8) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{37}{45}x_1 + \frac{16}{45}x_2 + \frac{4}{9}x_3,\ \frac{1}{9}x_3 - \frac{4}{9}x_1 + \frac{8}{9}x_2,$
$-\frac{16}{45}x_1 - \frac{13}{45}x_2 + \frac{8}{9}x_3\big);$

9) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,\ -\frac{14}{15}x_1\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{15}x_3,$
$-\frac{2}{15}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{11}{15}x_3\big);$

10) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{11}{15}x_1 + \frac{2}{15}x_2 + \frac{2}{3}x_3,\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3,$
$\frac{2}{15}x_1 + \frac{14}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_3\big);$

11) $f\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \big(\frac{4}{13}x_2 - \frac{3}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_3, \frac{3}{13}x_2 - \frac{12}{13}x_1 - \frac{4}{13}x_3,$
$\frac{3}{13}x_3 - \frac{4}{13}x_1 - \frac{12}{13}x_2\big);$

12) $f\big((x_1,x_2,x_3)\big)=\big(\frac{3}{13}x_2-\frac{4}{13}x_1+\frac{12}{13}x_3,\frac{12}{13}x_2-\frac{3}{13}x_1-\frac{4}{13}x_3,$
$\frac{12}{13}x_1+\frac{4}{13}x_2+\frac{3}{13}x_3\big);$

13) $f\big((x_1,x_2,x_3)\big)=\big(\frac{4}{9}x_3-\frac{29}{45}x_1-\frac{28}{45}x_2,\ \frac{4}{9}x_1-\frac{7}{9}x_2-\frac{4}{9}x_3,$
$\frac{4}{45}x_2-\frac{28}{45}x_1-\frac{7}{9}x_3\big);$

14) $f\big((x_1,x_2,x_3)\big)=\big(\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,\ \frac{1}{3}x_2-\frac{2}{15}x_1-\frac{14}{15}x_3,$
$-\frac{11}{15}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{15}x_3\big);$

15) $f\big((x_1,x_2,x_3)\big)=\big(\frac{9}{11}x_1-\frac{6}{11}x_2-\frac{2}{11}x_3,\ \frac{2}{11}x_2+\frac{6}{11}x_1-\frac{9}{11}x_3,$
$-\frac{6}{11}x_1-\frac{7}{11}x_2-\frac{6}{11}x_3\big)$

для кожного вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, на діагоналі якої стоять або клітки вигляду 1, або -1, або клітки вигляду

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де $\gamma\in\mathbb{R}$ і $\gamma\neq\pi k$ для довільного цілого числа k, а також вказати саму матрицю лінійного оператора f у знайденому базисі.

1.15 Симетричні оператори евклідового простору

Нехай ψ — лінійний оператор чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$ такий, що

1) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{24}(5x_1+35x_2+7x_3-25x_4,\ 35x_1+5x_2+ +25x_3-7x_4,\ 7x_1+25x_2+5x_3-35x_4,\ 5x_4-7x_2-35x_3-25x_1)$;

2) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{10}(13x_1+13x_2+7x_3-17x_4,\ 13x_1+13x_2+ +17x_3-7x_4,\ 7x_1+17x_2+13x_3-13x_4,\ 13x_4-7x_2-13x_3-17x_1)$;

3) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{24}(25x_4-35x_2-7x_3-5x_1, 7x_4-5x_2-25x_3- -35x_1,\ 35x_4-25x_2-5x_3-7x_1,\ 25x_1+7x_2+35x_3-5x_4)$;

4) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{16}(7x_1+27x_2+9x_3-21x_4,\ 27x_1+7x_2+ +21x_3-9x_4,\ 9x_1+21x_2+7x_3-27x_4,\ 7x_4-9x_2-27x_3-21x_1)$;

5) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{16}(9x_1+25x_2+15x_3-15x_4,\ 25x_1+9x_2+ +15x_2-15x_4, 15x_1+15x_2+9x_3-25x_4, -15x_1-15x_2-25x_3+9x_4)$;

6) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{8}(3x_1-x_2-9x_3+3x_4,\ 3x_2-x_1+3x_3- -9x_4,\ 3x_2-9x_1+3x_3-x_4,\ 3x_1-9x_2-x_3+3x_4)$;

7) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{8}(-x_1+3x_2-9x_3+3x_4,\ 3x_1-x_2+3x_3- -9x_4,\ -9x_1+3x_2-x_3+3x_4,\ 3x_1-9x_2+3x_3-x_4)$;

8) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{16}(17x_1-17x_2-23x_3+7x_4,\ 17x_2-17x_1+ +7x_3-23x_4,\ 7x_2-23x_1+17x_3-17x_4,\ 7x_1-23x_2-17x_3+17x_4)$;

9) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{24}(35x_1-5x_2-25x_3+7x_4, 35x_2-5x_1+7x_3- -25x_4,\ 7x_2-25x_1+35x_3-5x_4,\ 7x_1-25x_2-5x_3+35x_4)$;

10) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{3}(2x_1+2x_2-x_3-4x_4,\ 2x_1+2x_2-4x_3- -x_4,\ -x_1-4x_2+2x_3+2x_4,\ -4x_1-x_2+2x_3+2x_4)$;

11) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{7}(16x_1+12x_2+9x_3+12x_4,\ 12x_2+16x_1+ +12x_3+9x_4,\ 9x_1+12x_2+16x_3+12x_4,\ 12x_1+9x_2+12x_3+16x_4)$;

12) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{15}(3x_1-12x_2+4x_3-16x_4,\ -12x_1+21x_2- -16x_3+28x_4, 4x_1-16x_2-3x_3+12x_4,\ -16x_1+28x_2+12x_2-21x_4)$;

13) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{18}(4x_1-6x_2-8x_3-10x_4,\ -6x_1+x_2-10x_3+ +32x_4,\ -8x_1-10x_2-4x_3+6x_4,\ -10x_1+32x_2+6x_3-x_4)$;

14) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{24}(-5x_1+35x_2+25x_3+7x_4,\ 35x_1-5x_2-$ $-7x_3-25x_4,\ 25x_1-7x_2-5x_3-35x_4,\ 7x_1-25x_2-35x_3-5x_4)$;

15) $\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \frac{1}{27}(18x_1-12x_2+6x_3-39x_4,\ -12x_1+14x_2-$ $-7x_3-22x_4,\ 6x_1-7x_2-10x_3-16x_4,\ -39x_1-22x_2-16x_3+50x_4)$

для кожного вектора $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$. Довести, що ψ є симетричним оператором евклідового простору $\mathbb{R}^4$. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора ψ і матрицю оператора ψ у цьому базисі.

1.16 Квадратичні форми. Еквівалентність квадратичних форм. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Нехай f і g — квадратичні форми від трьох змінних над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел:

1) $f = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3,$
$g = y_1^2 + 2y_1y_2 - 4y_1y_3 - 2y_2y_3 + 3y_3^2;$

2) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 32x_2^2 + 16x_2x_3,$
$g = y_1^2 + 2y_1y_2 + 6y_1y_3 + 8y_2y_3 + 8y_3^2;$

3) $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2,$
$g = y_1^2 + 6y_1y_2 - 2y_1y_3 + 5y_2^2 - 2y_2y_3;$

4) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 24x_2^2 - 46x_2x_3 - 21x_3^2,$
$g = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + 12y_1y_3 + 10y_2y_3 + 5y_3^2;$

5) $f = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 30x_2x_3 - 35x_3^2,$
$g = y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3;$

6) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 9x_3^2,$
$g = y_1^2 + 6y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2^2 - 4y_2y_3 - 12y_3^2;$

7) $f = x_1^2 + x_1x_2 - 17x_1x_3 - 6x_2x_3 + 66x_3^2,$
$g = y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 5y_2^2 + 10y_2y_3;$

8) $f = 9x_1^2 - 2x_1x_2 - 24x_1x_3 + 2x_2x_3 + 15x_3^2,$
$g = 4y_1^2 + 12y_1y_2 + 16y_1y_3 - 40y_2^2 - 4y_2y_3 + 12y_3^2;$

9) $f = x_1^2 + 16x_1x_2 - 2x_1x_3 - 36x_2^2 + 84x_2x_3 - 24x_3^2,$
$g = 9y_1^2 + 12y_1y_2 - 6y_1y_3 + 4y_2y_3 - 3y_3^2;$

10) $f = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2,$
$g = y_1^2 + 4y_1y_2 - 4y_1y_3 - 21y_2^2 + 22y_2y_3 - 5y_3^2;$

11) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 3x_2^2 + 26x_2x_3 + 9x_3^2,$
$g = y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3;$

12) $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 5x_2^2 + 18x_2x_3 - 13x_3^2,$
$g = 16y_1^2 + 24y_1y_2 + 16y_1y_3 + 24y_2y_3;$

13) $f = x_1^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 15x_2^2 + 12x_2x_3 - 3x_3^2,$
$g = 25y_1^2 - 10y_1y_2 + 20y_1y_3 - 8y_2^2 + 2y_2y_3 + 3y_3^2;$

14) $f = x_1^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + 3x_2^2 + 22x_2x_3 + 35x_3^2,$
$g = 9y_1^2 + 6y_1y_2 - 12y_1y_3 - 15y_2^2 + 12y_2y_3;$

15) $f = 4x_1^2 + 20x_1x_2 - 18x_1x_3 + 24x_2^2 - 44x_2x_3 + 20x_3^2,$
$g = 4y_1^2 - 4y_1y_2 - 12y_1y_3 - 15y_2^2 + 30y_2y_3;$

Знайти невироджене лінійне перетворення змінних, за допомогою якого із квадратичної форми f можна одержати квадратичну форму g. Виписати матрицю цього перетворення.

1.17 Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми

Знайти всі дійсні значення параметра α, для яких є додатно визначеною дійсна квадратична форма f від змінних x_1, x_2, x_3, якщо:

1) $f = 2x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$

2) $f = 12x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$

3) $f = -\alpha x_1^2 - 18x_2^2 + \alpha x_3^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3;$

4) $f = \alpha x_1^2 + 4\alpha x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$

5) $f = x_1^2 + \alpha x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2\alpha x_2x_3;$

6) $f = -9\alpha x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 + 2\alpha x_1x_3 + 2x_2x_3;$

7) $f = x_1^2 + \alpha x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\alpha x_1x_3 + 4x_2x_3;$

8) $f = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_1x_3;$

9) $f = 2x_1^2 - 3\alpha x_2^2 - \alpha x_3^2 + 12x_1x_2 + 2x_1x_3;$

10) $f = x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 4\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$

11) $f = 9x_1^2 + 6\alpha x_1x_2 + 2\alpha x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2;$

12) $f = 2\alpha x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + \alpha x_3^2;$

13) $f = \alpha x_1^2 + 4x_1x_2 + 2\alpha x_1x_3 + 9x_2^2 - 6x_2x_3 + 2\alpha x_3^2;$

14) $f = x_1^2 + 2\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3 + 9x_2^2 + 6x_2x_3 + (2 + \alpha)x_3^2;$

15) $f = (2 + \alpha)x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 9x_2^2 + 2\alpha x_2x_3 + x_3^2.$

1.18 Зведення квадратичної форми до головних осей

Знайти ортогональне перетворення змінних та канонічний вигляд квадратичної форми, яку можна одержати за допомогою цього перетворення, із наступної квадратичної форми:

1) $f = \frac{2}{3}x_1^2 + 4x_1x_2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_2x_3 - x_3^2;$

2) $f = -x_1^2 - \frac{16}{3}x_1x_2 - \frac{4}{3}x_1x_3 - \frac{1}{3}x_2^2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_3^2;$

3) $f = -2x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{4}{3}x_1x_3 - \frac{7}{3}x_2^2 - \frac{5}{3}x_3^2;$

4) $f = \frac{5}{3}x_1^2 - \frac{8}{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{3}x_3^2;$

5) $f = \frac{10}{3}x_1^2 + \frac{8}{3}x_1x_3 - \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_2x_3 + x_3^2;$

6) $f = -\frac{2}{9}x_1^2 + \frac{20}{9}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_1x_3 - \frac{5}{9}x_2^2 + \frac{16}{9}x_2x_3 - \frac{11}{9}x_3^2;$

7) $f = \frac{7}{9}x_1^2 - \frac{28}{9}x_1x_2 - \frac{8}{9}x_1x_3 + \frac{10}{9}x_2^2 - \frac{20}{9}x_2x_3 + \frac{19}{9}x_3^2;$

8) $f = \frac{7}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + \frac{5}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 + 2x_3^2;$

9) $f = -\frac{8}{9}x_1^2 - \frac{32}{9}x_1x_2 - \frac{40}{9}x_1x_3 + \frac{4}{9}x_2^2 - \frac{8}{9}x_2x_3 - \frac{14}{9}x_3^2;$

10) $f = -\frac{4}{9}x_1^2 + \frac{32}{9}x_1x_2 + \frac{28}{9}x_1x_3 - \frac{10}{9}x_2^2 - \frac{4}{9}x_2x_3 + \frac{5}{9}x_3^2;$

11) $f = -\frac{1}{3}x_1^2 - \frac{8}{3}x_1x_2 - x_2^2 + \frac{8}{3}x_2x_3 - \frac{5}{3}x_3^2;$

12) $f = \frac{11}{9}x_1^2 - \frac{4}{9}x_1x_2 + \frac{16}{9}x_1x_3 + \frac{2}{9}x_2^2 + \frac{20}{9}x_2x_3 + \frac{5}{9}x_3^2;$

13) $f = \frac{5}{9}x_1^2 + \frac{20}{9}x_1x_2 - \frac{16}{9}x_1x_3 + \frac{2}{9}x_2^2 + \frac{4}{9}x_2x_3 + \frac{11}{9}x_3^2;$

14) $f = \frac{10}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + \frac{8}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 + 3x_3^2;$

15) $f = \frac{2}{3}x_1^2 + 4x_1x_2 + \frac{8}{3}x_1x_3 + \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + 2x_3^2.$

Розділ 2

Приклади розв'язань задач

У цьому розділі ми пропонуємо читачеві зразки розв'язань задач із попереднього розділу. Зауважимо, розв'язати задачу означає виконати те, що вимагається в задачі. Виконавець може запропонувати свою логічну конструкцію або сукупність всіх міркувань, що приводять до потрібного розв'язку. Розв'язання аналогічних задач можна також знайти в [6, 7]. До прикладу задача 1 подібна задачі 3 на стор. 104 із [6], а задача 2 є об'єднанням задачі 2 на стор. 17 та задачі 6 на стор. 20 із [7]. Врешті решт є чимало ресурсів у світовій Інтернет мережі, які можуть сприяти правильному розв'язуванню поставлених перед студентом задач з цього навчального посібника.

Задача 1. Нехай $\mathbb{R}_{2\times 2}$ — лінійний простір всіх 2×2-матриць над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ відносно звичайних операцій додавання матриць та множення дійсного числа на матрицю. a_1, a_2, a_3, a_4 є наступними матрицями із $\mathbb{R}_{2\times 2}$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Довести, що система матриць a_1, a_2, a_3, a_4 є лінійно незалежною системою векторів лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Представити (записати) у вигляді лінійної комбінації системи векторів a_1, a_2, a_3, a_4 матрицю

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

де α, β, γ, δ — деякі дійсні числа.

Розв'язання. Нехай κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 — деякі дійсні числа, для яких справджується рівність

$$\kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4 = \bar{0}, \tag{1}$$

де $\bar{0}$ є нульовим вектором із $\mathbb{R}_{2\times 2}$, тобто $\bar{0}$ є нульовою матрицею порядку 2.

Із рівності (1) одержуємо, що

$$\begin{pmatrix} \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4 & \kappa_1+\kappa_3+\kappa_4 \\ \kappa_1+\kappa_2+\kappa_4 & \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = 0, \\ \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 = 0, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = 0, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0. \end{cases}$$

Це означає, що 4-вимірний вектор $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

з невідомими x_1, x_2, x_3, x_4. Обчислимо детермінант системи лінійних однорідних рівнянь (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

За правилом Крамера система лінійних однорідних рівнянь (2) має тільки один нульовий розв'язок, тобто

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Отже, рівність (1) справджується лише коли

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = 0, \quad \kappa_4 = 0.$$

Це означає, що система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 є лінійно незалежною системою векторів лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$.

Нехай λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — деякі дійсні числа, для яких справджується рівність $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = c$. Тоді

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \alpha, \\ \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 + \lambda_4 = \beta, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} + \lambda_4 = \gamma, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \phantom{{}+\lambda_4} = \delta. \end{cases}$$

Через це 4-вимірний вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \delta \end{array}\right). \tag{3}$$

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь методом Ґаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \delta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \gamma - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \delta - \alpha \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha + \beta + \gamma + \delta \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \gamma - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \delta - \alpha \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \beta+\gamma+\delta-2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha-\delta \end{array} \right).$$

Звідси

$$\lambda_1 = -2\alpha+\beta+\gamma+\delta, \quad \lambda_2 = \alpha-\beta, \quad \lambda_3 = \alpha-\gamma, \quad \lambda_4 = \alpha-\delta.$$

Отже,

$$c = (-2\alpha+\beta+\gamma+\delta)a_1 + (\alpha-\beta)a_2 + (\alpha-\gamma)a_3 + (\alpha-\delta)a_4.$$

Зауважимо, що є тільки один, вище наведений, спосіб представлення вектора c у вигляді лінійної комбінації системи векторів a_1, a_2, a_3, a_4, оскільки система лінійних рівнянь з розширеною матрицею (3) є визначеною.

Задача 2. Довести, що системи векторів

$$a_1 = (1,1,1), \quad a_2 = (2,1,1), \quad a_3 = (3,2,3);$$
$$b_1 = (0,1,0), \quad b_2 = (1,1,2), \quad b_3 = (1,2,1)$$

є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1,2,3)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

Розв'язання. Відомо, що система із трьох дійсних 3-вимірних векторів є базисом векторного простору $\mathbb{R}^3$, якщо детермінант складений із цих векторів, не дорівнює нулю. Тому обчислимо детермінанти, складені відповідно із векторів-стовпців a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, системи векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3 є базисами простору $\mathbb{R}^3$.

Знайдемо матрицю переходу від першого до другого базису. Для цього потрібно розкласти вектори другого базису за першим базисом, тобто знайти координати векторів другого базису у першому базисі. Нехай τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} — координати вектора b_j у базисі a_1, a_2, a_3, де $j \in \{1,2,3\}$. Тоді

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Перейшовши від рівностей векторів (4) до рівностей відповідних компонент, отримаємо три системи лінійних рівнянь, вважаючи τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} невідомими:

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \ \ \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \ \ \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \ \ \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \ \ \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \ \ \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \ \ \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Оскільки матриці цих систем лінійних рівнянь попарно рівні, то розв'яжемо їх одночасно, виконуючи наступні перетворення над матрицею, складеною із векторів-стовпців a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

— матриця переходу від базису a_1, a_2, a_3 до базису b_1, b_2, b_3 простору $\mathbb{R}^3$. Нехай κ_1, κ_2, κ_3 та κ'_1, κ'_2, κ'_3 — координати деякого вектора $x \in \mathbb{R}^3$ відповідно у базисах a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3, тобто

$$x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 = \kappa'_1 b_1 + \kappa'_2 b_2 + \kappa'_3 b_3.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \\ \kappa'_3 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо цю рівність у випадку вектора $c = (1, 2, 3)$. Знайдемо спочатку координати вектора c у базисі a_1, a_2, a_3, а потім у базисі b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = -2$, $\varkappa_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отже, $\varkappa'_1 = 2$, $\varkappa'_2 = 2$, $\varkappa'_3 = -1$. Далі переконуємося у тому, що справджується рівність

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно

$$\begin{aligned} 2 &= 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-1), \\ -2 &= 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1), \\ 1 &= -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1). \end{aligned}$$

Задача 3. Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожному дійсному тривимірному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ ставить у відповідність вектор $\varphi(x)$ із $\mathbb{R}^3$ такий, що $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, 3x_2 - x_1)$. Довести, що φ є ізоморфізмом. Знайти образи $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ відповідно векторів $a = (0, 0, -1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 1)$. Довести, що система векторів $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ є базисом $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — будь-які вектори простору $\mathbb{R}^3$, а α — будь-яке дійсне число. Тоді

$$\varphi(x + y) = \varphi\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)\big) =$$
$$= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3),$$
$$3(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)) =$$
$$= ((x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3), (2x_1 - x_3) + (2y_1 - y_3),$$
$$(3x_2 - x_1) + (3y_2 - y_1)) =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, 3x_2 - x_1) +$$
$$+ (y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 - y_3, 3y_2 - y_1) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\alpha x) = \varphi\big((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)\big) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3, 2(\alpha x_1) - \alpha x_3,$$
$$3(\alpha x_2) - \alpha x_1) = \alpha(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, 3x_2 - x_1) = \alpha\varphi(x),$$

Це означає, що φ є лінійним відображенням із лінійного простору $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Доведемо, що лінійне відображення φ є бієктивним відображенням. Для цього покажемо, що будь-який вектор $z = (z_1, z_2, z_3)$ із $\mathbb{R}^3$ має єдиний прообраз $\varphi^{-1}(z)$ в $\mathbb{R}^3$.

Розглянемо систему лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, x_3

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = z_1, \\ 2x_1 - x_3 & = z_2, \\ -x_1 + 3x_2 & = z_3. \end{array}\right. \tag{5}$$

Розв'язок цієї системи лінійних рівнянь, якщо такий існує, є прообразом вектора $z = (z_1, z_2, z_3)$ при відображенні φ. Матриця

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

системи лінійних рівнянь (5) є оборотною матрицею і

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь (5) одержуємо, що її єдиним розв'язком є вектор-стовпець

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}z_1 + \frac{3}{10}z_2 - \frac{1}{10}z_3 \\ \frac{1}{10}z_1 + \frac{1}{10}z_2 + \frac{3}{10}z_3 \\ \frac{3}{5}z_1 - \frac{2}{5}z_2 - \frac{1}{5}z_3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\tfrac{3}{10}z_1 + \tfrac{3}{10}z_2 - \tfrac{1}{10}z_3, \tfrac{1}{10}z_1 + \tfrac{1}{10}z_2 + \tfrac{3}{10}z_3, \tfrac{3}{5}z_1 - \tfrac{2}{5}z_2 - \tfrac{1}{5}z_3\right).$$

Підсумовуючи вище сказане, можна стверджувати, що відображення φ є ізоморфізмом.

Обчислимо образи, даних в умові, векторів a, b, c:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (0+0+(-1), 2\cdot 0-(-1), 3\cdot 0-0) = (-1,1,0), \\ \varphi(b) &= (0+1+0, 2\cdot 0-0, 3\cdot 1-0) = (1,0,3), \\ \varphi(c) &= (1+0+1, 2\cdot 1-1, 3\cdot 0-1) = (2,1,-1). \end{aligned}$$

Через те, що відображення φ є ізоморфізмом, для того щоб довести, що система векторів $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ є базисом $\mathbb{R}^3$ нам досить показати, що система векторів a, b, c є базисом цього простору (див. [2], ст. 264). Детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

складений із цих векторів, легко обчислюється: $\Delta = 1$. Оскільки цей детермінант виявився ненульовим, то система векторів a, b, c разом з системою образів цих векторів $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ є базисами $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. Знайти деякий базис суми L_1+L_2, а також деякий базис перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 дійсного векторного простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка системи векторів $a_1 = (7, 2, -4, 1, 1)$, $a_2 = (10, -1, 0, -2, -6)$.

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків даної в умові системи лінійних однорідних рівнянь. Для цього використаємо метод Ґаусса-Жордана розв'язування систем лінійних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси слідує, що $b_1 = (-17, 4, 9, 1, 0)$, $b_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$ — фундаментальна система розв'язків даної в умові системи лінійних однорідних рівнянь, а отже і, — базис підпростору L_1.

Для того, щоб знайти базис підпростору $L_1 + L_2$, знайдемо базис системи векторів-рядків матриці

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

складеної з векторів b_1, b_2, a_1, a_2. Зробимо це методом обвідних мінорів. Рядки, в яких міститиметься найбільший за порядком ненульовий мінор матриці A, утворюватимуть базис суми L_1+L_2 підпросторів L_1 і L_2.

Очевидно, мінор другого порядку, що знаходиться у перших двох рядках та останніх двох стовпцях матриці A не дорівнює 0. Обчислимо мінор

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Обчислимо обвідні мінори четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -17 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 24 & -13 & 0 & 1 \\ -24 & 18 & 0 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -17 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 24 & -12 & 0 & 0 \\ -24 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -13 & 0 & 1 \\ 7 & 18 & 0 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -12 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, система векторів b_1, b_2, a_1 є базисом суми $L_1 + L_2$.

Далі, нехай c — довільний вектор із перерізу $L_1 \cap L_2$. Тоді з одного боку існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, що

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (7\gamma_1 + 10\gamma_2, 2\gamma_1 - \gamma_2, -4\gamma_1, \gamma_1 - 2\gamma_2, \gamma_1 - 6\gamma_2),$$

а з іншого вектор c є розв'язком системи лінійних рівнянь (6). Підставляючи відповідним чином компоненти вектора c у кожне рівняння цієї системи, одержимо наступну систему рівностей

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ 10\gamma_1 - 10\gamma_2 = 0, \\ 10\gamma_1 - 10\gamma_2 = 0, \\ 11\gamma_1 - 11\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Як наслідок, одержуємо $\gamma_1 = \gamma_2$, а тому $c = \gamma_1(a_1 + a_2)$. Вектор

$$c_0 = a_1 + a_2 = (17, 1, -4, -1, -5)$$

належить перерізу $L_1 \cap L_2$. А з вище сказаного слідує, що будь-який вектор цього перерізу пропорційний вектору c_0. Тому вектор c_0 є базисом перерізу $L_1 \cap L_2$.

Задача 5. Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що відображає вектори базису $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,0,0)$, $a_3 = (2,2,1)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (0,0,0)$, $b_2 = (1,0,0)$, $b_3 = (1,1,0)$. Знайти матрицю лінійного оператора φ у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. За теоремою про існування лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору (див. [2], ст. 354) існує лише один лінійний оператор, який задовольняє умову задачі. Нехай φ є шуканим лінійним оператором. Укажемо образ $\varphi(x)$ будь-якого вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$. Розкладемо вектор x за базисом a_1, a_2, a_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$. Для цього знайдемо обернену матрицю до матриці переходу від канонічного базису цього простору до базису a_1, a_2, a_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$x = (-x_2 + 2x_3)a_1 + (x_1 - x_2)a_2 + (x_2 - x_3)a_3. \tag{7}$$

Тому

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\big((-x_2 + 2x_3)a_1 + (x_1 - x_2)a_2 + (x_2 - x_3)a_3\big) = \\ &= (-x_2 + 2x_3)\varphi(a_1) + (x_1 - x_2)\varphi(a_2) + (x_2 - x_3)\varphi(a_3) = \\ &= (-x_2 + 2x_3)b_1 + (x_1 - x_2)b_2 + (x_2 - x_3)b_3 = \\ &= (0,0,0) + (x_1 - x_2, 0, 0) + (x_2 - x_3, x_2 - x_3, 0) = \\ &= (x_1 - x_3, x_2 - x_3, 0). \end{aligned}$$

Насамкінець випишемо матрицю A лінійного оператора φ у канонічному базисі $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ простору $\mathbb{R}^3$. Для цього обчислимо координати образів базисних векторів e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$ у цьому ж базисі:

$$\varphi(e_1) = (1,0,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_2) = (0,1,0) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_3) = (-1,-1,0) = -1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Таким чином

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ раціонального векторного простору $\mathbb{Q}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти деякі базиси образу $\operatorname{Im}\varphi$ та ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного оператора φ. Переконатися у тому, що $\dim_{\mathbb{Q}}\operatorname{Im}\varphi + \dim_{\mathbb{Q}}\operatorname{Ker}\varphi = \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^4$.

Розв'язання. Знайдемо деякий базис образу $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного оператора φ. Відомо (див. [2], ст. 364), що $\operatorname{Im}\varphi$ є лінійною оболонкою системи образів базисних векторів, тобто $\operatorname{Im}\varphi = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$, де

$$\begin{aligned} b_1 &= \varphi(c_1) = c_1 - 2c_2 + c_3 + 2c_4, \\ b_2 &= \varphi(c_2) = 2c_1 + c_2 + c_4, \\ b_3 &= \varphi(c_3) = 3c_1 - c_2 + c_3 + 3c_4, \\ b_4 &= \varphi(c_4) = 4c_1 - 3c_2 + 2c_3 + 5c_4. \end{aligned}$$

Тому для знаходження базису образу досить знайти базис системи векторів-стовпців матриці A. Зробимо це методом обвідних мінорів:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси слідує, що $\operatorname{rank} A = 2$. Через це $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Im} \varphi = 2$ і оскільки мінор (8) знаходиться у перших двох стовпцях матриці A, то система векторів b_1, b_2 є базисом підпростору $\operatorname{Im} \varphi$.

Знайдемо деякий базис ядра $\operatorname{Ker} \varphi$ лінійного оператора φ. Нехай x — довільний вектор із $\operatorname{Ker} \varphi$ і

$$x = \chi_1 c_1 + \chi_2 c_2 + \chi_3 c_3 + \chi_4 c_4$$

— розклад цього вектора за базисом c_1, c_2, c_3, c_4. Тоді для координат χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 цього вектора справджується рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Тому 4-вимірний вектор $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь з матрицею A. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків цієї системи лінійних однорідних рівнянь. Використавши попередні обчислення рангу матриці A, розглянемо систему лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2 і вільним невідомими x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 - 4x_4, \\ -2x_1 + x_2 = x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Як наслідок система векторів $(-1, -1, 1, 0)$, $(-2, -1, 0, 1)$ є шуканою фундаментальною системою розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з матрицею A. А отже, система векторів d_1, d_2, де

$$d_1 = -c_1 - c_2 + c_3, \quad d_2 = -2c_1 - c_2 + c_4.$$

є базисом підпростору $\operatorname{Ker} \varphi$.

Задача 7. Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ ставить у відповідність кожному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ цього простору вектор

$$\varphi(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора ψ простору $\mathbb{R}^3$ у базисі $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 1)$, $a_3 = (3, -2, 3)$. Знайти у канонічному базисі векторного простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi\psi - 2\psi^2$.

Розв'язання. Обчислимо образи $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ векторів канонічного базису $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1)$ простору $\mathbb{R}^3$ і розкладемо їх за цим базисом:

$$\varphi(e_1) = (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$
$$\varphi(e_2) = (-1, 1, 0) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$
$$\varphi(e_3) = (0, -1, 1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3.$$

Тому

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ у канонічному базисі.

Обчислимо матрицю переходу від базису a_1, a_2, a_3 до канонічного базису e_1, e_2, e_3. Вона є оберненою до матриці

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

яка, навпаки, є матрицею переходу від базису e_1, e_2, e_3 до базису a_1, a_2, a_3:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця C оператора ψ у канонічному базисі дорівнюватиме

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Нарешті для знаходження матриці лінійного оператора $\varphi\psi - 2\psi^2$ використаємо теореми про зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями:

$$BC - 2C^2 = (B - 2C) \cdot C =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 61 & 28 \\ -4 & -37 & -17 \\ 7 & 52 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -11 & 214 & 110 \\ 6 & -137 & -70 \\ -1 & 225 & 108 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі цього простору. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори оператора φ.

Розв'язання. Нехай A_2, A_3, A_4 — матриці відповідно лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 у канонічному базисі $\mathbb{R}^4$. Тоді за теоремою про зв'язок між діями на лінійними операторами та діями над їх матрицями справджуються рівності:

$$A_2 = A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 12 & -23 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 29 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -8 & 185 & 0 & 55 \\ 0 & 36 & 0 & 9 \\ 0 & 145 & -8 & 25 \\ 0 & -63 & 0 & -36 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 347 & -48 & -59 \\ 0 & 81 & 0 & 0 \\ 16 & 381 & -32 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо характеристичний многочлен $f(\lambda)$ оператора φ:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -7 & -4-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 18\lambda - 36. \qquad (10)$$

Далі, обчислимо $f(A)$:

$$f(A) = A^4 - 2A^3 - 5A^2 + 18A - 36E =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 347 & -48 & -59 \\ 0 & 81 & 0 & 0 \\ 16 & 381 & -32 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -8 & 185 & 0 & 55 \\ 0 & 36 & 0 & 9 \\ 0 & 145 & -8 & 25 \\ 0 & -63 & 0 & -36 \end{pmatrix} -$$

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} -8 & -1 & 12 & -23 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 29 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -4 \end{pmatrix} -$$

$$-36 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через це і через зв'язок між діями над операторами та діями над їх матрицями слідує, що $f(\varphi) = 0$.

Знайдемо корені характеристичного многочлена $f(\lambda)$, використавши його розклад (10) на множники

$$f(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4).$$

Звідси слідує, що коренями характеристичного многочлена $f(\lambda)$, а отже і власними значеннями лінійного оператора φ, є тільки числа -3 і 3. Знайдемо власні вектори, що належать цим власним значенням.

Розглянемо спочатку випадок власного значення -3. Розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 7x_2 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_2 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці системи лінійних однорідних рівнянь (11)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 19 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 19 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 57 & 13 \\ 0 & -2 & 19 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 57 & 13 \\ 0 & 0 & 133 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{200}{133} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{133} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вектор

$$(200\gamma, 19\gamma, 30\gamma, -133\gamma) \tag{12}$$

є загальним розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (11), а всі власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню -3, мають вигляд (12), де $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Так само знаходимо власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню 3, розв'язавши відповідну систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ - 7x_2 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Прийдемо до висновку, що будь-який власний вектор лінійного оператора φ, що належить власному значенню 3 представляється у вигляді

$$\gamma(26, 7, 24, -7),$$

де $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 9. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно лінійних операторів φ і ψ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Довести, що векторний простір $\mathbb{R}^3$ має базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти цей базис і матрицю оператора φ у цьому базису. Довести, що векторний простір $\mathbb{R}^3$ немає базису, який складається з власних векторів оператора ψ.

Розв'язання. Знайдемо власні вектори кожного із заданих в умові завдання лінійних операторів φ і ψ. Для цього спочатку відшукаємо власні значення, яким належать ці вектори. Власними ж значеннями лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору є корені характеристичного многочлена цього лінійного оператора. Тому знайдемо характеристичні многочлени кожного з лінійних операторів φ, ψ:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2 - 1 & -\lambda & 1-\lambda \\ -3+3\lambda & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda-1) \\ 3(\lambda-1) & -(\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2);$$

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -3+5\lambda & -\lambda^2-\lambda+1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3+5\lambda & -\lambda^2-\lambda+1 \\ 3-\lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Отже, власними значеннями лінійного оператора φ є дійсні числа 1, 2. Для відшукання власних векторів лінійного оператора φ, що належать власному значенню 1, розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця система рівнянь еквівалентна системі лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси слідує, що множиною всіх власних векторів лінійного оператора φ, які належать власному значенню 1 є множина

$$\left\{\alpha u + \beta v \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\},$$

де $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$.

Далі обчислимо власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню 2. Розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Після виконання елементарних перетворень над рядками цієї матриці:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

одержуємо, що кожен власний вектор оператора φ, що належить власному значенню 2, має вигляд γw, де $w = (1, 1, 3)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Система векторів u, v, w є базисом простору $\mathbb{R}^3$, через те, що власні вектори u, v належать одному власному значенню, а власний вектор w — іншому і при цьому підсистема векторів u, v є лінійно незалежною.

Оскільки

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w, \\ \varphi(v) &= v = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w, \\ \varphi(w) &= 2w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 2 \cdot w, \end{aligned}$$

то

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ у базисі u, v, w.

Характеристичним многочленом оператора ψ є многочлен $-\lambda \times \times(\lambda - 1)^2$. Тому 0 і 1 — всі власні значення оператора ψ. Всі власні вектори оператора ψ, що належать власному значенню 0, мають вигляд

$$\alpha(1, 1, 3), \tag{13}$$

де $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Власні ж вектори, що належать власному значенню 1, мають вигляд

$$\beta(1, 1, 2), \tag{14}$$

де $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Будь-які три вектори вигляду (13) або (14) утворюють лінійно залежну систему, оскільки завжди у цій системі векторів знайдуться два пропорційні вектори. Таким чином, у просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів лінійного оператора ψ.

Задача 10. Нехай φ і ψ — лінійні оператори векторного простору $\mathbb{R}^3$ такі, що

$$\varphi(x) = (4x_2 - 2x_1 - 3x_3,\ 6x_1 - 4x_2 + 7x_3,\ 5x_1 - 5x_2 + 7x_3),$$
$$\psi(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 10x_1 - 6x_2 + 3x_3, -12x_1 + 2x_2 - 8x_3)$$

для кожного вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ із $\mathbb{R}^3$. Знайти якісь жорданові базиси векторного простору $\mathbb{R}^3$, відповідно в яких матриці лінійних операторів φ і ψ мають нормальну форму Жордана.

Розв'язання. Знайдемо власні значення і власні вектори кожного із лінійних операторів φ і ψ. Для цього спочатку обчислимо характеристичні многочлени цих операторів, попередньо виписавши матриці A і B цих лінійних операторів у деякому, наприклад канонічному, базисі векторного простору $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 6 & -4 & 7 \\ 5 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -6 & 3 \\ -12 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо характеристичні многочлени матриць A і B, а потім розкладемо їх на лінійні множники:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & -3 \\ 6 & -4-\lambda & 7 \\ 5 & -5 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 12 = -(\lambda + 3)(\lambda - 2)^2,$$

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 10 & -6-\lambda & 3 \\ -12 & 2 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 48\lambda - 64 = -(\lambda + 4)^3,$$

де E — одинична матриця третього порядку. Зауважимо (див. [2], ст. 382), що жорданові базиси векторного простору $\mathbb{R}^3$ для операторів φ і ψ існують через те, що їх характеристичні многочлени розкладаються у добуток лінійних множників.

Таким чином, власними значеннями лінійного оператора φ є дійсні числа -3 і 2, а лінійного оператора ψ — дійсне число -4.

Знайдемо власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню -3. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$A+3E=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -25 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то власними векторами лінійного оператора φ, що належать власному значенню -3 є вектори вигляду αu_1, де $u_1=(-1,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Аналогічно знаходимо власні вектори цього ж лінійного оператора, але які належать власному значенню 2:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 6 & -6 & 7 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо, що $\{\alpha(1,1,0)\mid \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ є шуканою множиною власних векторів лінійного оператора φ, що належать власному значенню 2. Позначимо вектор $(1,1,0)$ через u_2.

Власне значення 2 є двократним коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ, а підпростір власних векторів лінійного оператора φ, що йому належать, має розмірність 1. Тому знаходимо деякий вектор u_3 такий, що

$$\varphi(u_3)=2u_3+u_2.$$

Цього разу розв'язуємо систему лінійних рівнянь з матрицею $A-2E$ і стовпцем вільних членів u_2^T:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, в якості вектора u_3 необхідно взяти вектор вигляду

$$(-1,0,1)+\beta(1,1,0),$$

де $\beta \in \mathbb{R}$. Нехай $u_3 = (-1, 0, 1)$.

Оскільки

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$\varphi(u_1) = -3u_1, \quad \varphi(u_2) = 2u_2, \quad \varphi(u_3) = 2u_3 + u_2,$$

то система векторів u_1, u_2, u_3 є жордановим базисом векторного простору $\mathbb{R}^3$ для лінійного оператора φ. Матриця лінійного оператора φ у цьому базисі має вигляд

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

У випадку лінійного оператора ψ обчислюємо ранги матриць

$$B + 4E, \quad (B + 4E)^2, \quad (B + 4E)^3, \quad \ldots$$

допоки значення не будуть повторюватися:

$$\operatorname{rank}(B + 4E) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 10 & -2 & 3 \\ -12 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rank}\left((B + 4E)^2\right) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rank}\left((B + 4E)^3\right) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Тому (див. [2], ст. 387) число кліток Жордана порядку 3 з елементом -4 на головній діагоналі у нормальній формі Жордана матриці B дорівнює

$$\operatorname{rank}\left((B + 4E)^2\right) - 2 \cdot \operatorname{rank}\left((B + 4E)^3\right) + \operatorname{rank}\left((B + 4E)^4\right) = \\ = 1 - 2 \cdot 0 + 0 = 1.$$

Тобто матриця B подібна клітці Жордана

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Це означає, що жордановий базис векторного простору $\mathbb{R}^3$ для лінійного оператора ψ складається з векторів v_1, v_2, v_3, для яких

$$\psi(v_1) = -4v_1, \quad \psi(v_2) = -4v_2 + v_1, \quad \psi(v_3) = -4v_3 + v_2.$$

Для знаходження вектора v_1 розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею $B + 4E$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 10 & -2 & 3 \\ -12 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В якості v_1 візьмемо вектор $(1, 2, -2)$. Тепер розв'язуємо систему лінійних рівнянь з матрицею $B + 4E$ і стовпцем вільних членів v_1^T:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -1 & 2 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 2 \\ -12 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Тому в якості v_2 беремо, наприклад, вектор $(0, -1, 0)$. Нарешті, розв'язуємо систему лінійних рівнянь з матрицею $B + 4E$ і стовпцем вільних членів v_2^T:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & -2 & 3 & -1 \\ -12 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Тому через v_3 позначимо деякий розв'язок цієї системи лінійних рівнянь, наприклад, вектор $(0, 2, 1)$. Отже,

$$v_1 = (1, 2, -2), \quad v_2 = (0, -1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 1)$$

є жордановим базисом векторного простору $\mathbb{R}^3$ для лінійного оператора ψ, а його матриця у цьому базисі має вигляд (15).

Задача 11. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

— матриці над полем дійсних чисел. Знайти канонічний вигляд кожної із характеристичних матриць $A-\lambda E$ і $B-\lambda E$, де E — одинична матриця порядку 3. Знайти унімодулярні матриці L і R такі, що $L(B-\lambda E)R$ є λ-матрицею канонічного вигляду.

Розв'язання. Канонічний вигляд (або ще кажуть нормальну форму Сміта) λ-матриці $A-\lambda E$ шукатимемо, обчислюючи найбільший спільний дільник $d_k(\lambda)$ мінорів k-го порядку для кожного $k\in\{1,\ 2,\ 3\}$ (див. [4], стор. 370). Оскільки серед мінорів 1-го порядку матриці

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -6-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -6-\lambda \end{pmatrix}$$

є многочлени нульового степеня, то $d_1(\lambda)=1$. Обчислюємо мінори 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+9\lambda+20=(\lambda+5)(\lambda+4),$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda-10=-2(\lambda+5),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3-\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda+5,$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda+5,$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+12\lambda+35=(\lambda+7)(\lambda+5),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda-5=-(\lambda+5),$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda+5,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 10 = 2(\lambda+5),$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 20 = (\lambda+5)(\lambda+4).$$

Найбільшим спільним дільником всіх мінорів другого порядку матриці $A - \lambda E$ є многочлен $\lambda + 5$, тобто

$$d_2(\lambda) = \lambda + 5.$$

Нарешті, оскільки детермінант

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 15\lambda^2 - 75\lambda - 125$$

є єдиним мінором третього порядку матриці $A - \lambda E$, то

$$d_3(\lambda) = \lambda^3 + 15\lambda^2 + 75\lambda + 125 = (\lambda+5)^3.$$

Звідси слідує, що інваріантними множниками матриці $A-\lambda E$ є многочлени:

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1, \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda + 5,$$

$$e_3(\lambda) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = \frac{(\lambda+5)^3}{\lambda+5} = (\lambda+5)^2,$$

а її канонічним виглядом є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+5)^2 \end{pmatrix}.$$

Канонічний вигляд матриці $B - \lambda E$ будемо шукати виконуючи послідовно елементарні перетворення над рядками або стовпцями еквівалентних їй матриць. Причому кожного разу разом з перетворенням будемо вказувати відповідну матрицю цього елементарного перетворення, позначаючи її відповідно буквою L з індексом, якщо це перетворення над рядками, і R з індексом, якщо перетворення над стовпцями.

Поміняємо місцями перший і третій стовпці матриці

$$B-\lambda E=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ -2 & 8-\lambda & 1 \\ 5 & -6 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Одержимо матрицю $B_1 = B \cdot R_1$, де

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4-\lambda \\ 1 & 8-\lambda & -2 \\ 3-\lambda & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad R_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додамо до другого рядка матриці B_1 перший, помножений на -1: $B_2 = L_1 \cdot B_1$, де

$$B_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4-\lambda \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-6 \\ 3-\lambda & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до третього рядка матриці B_2 перший, помножений на $\lambda-3$: $B_3 = L_2 \cdot B_2$, де

$$B_3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4-\lambda \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 3\lambda-15 & -\lambda^2+7\lambda-7 \end{pmatrix}, \quad L_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda-3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до другого стовпця матриці B_3 перший, помножений на -3: $B_4 = B_3 \cdot R_2$, де

$$B_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 3\lambda-15 & -\lambda^2+7\lambda-7 \end{pmatrix}, \quad R_2=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до третього стовпця матриці B_4 перший, помножений на $\lambda-4$: $B_5 = B_4 \cdot R_3$, де

$$B_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 3\lambda-15 & -\lambda^2+7\lambda-7 \end{pmatrix}, R_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до другого стовпця матриці B_5 третій: $B_6 = B_5 \cdot R_4$, де

$$B_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-6 \\ 0 & -\lambda^2+10\lambda-22 & -\lambda^2+7\lambda-7 \end{pmatrix}, R_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до третього стовпця матриці B_6 другий, помножений на $\lambda-6$: $B_7 = B_6 \cdot R_5$, де

$$B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+10\lambda-22 & -\lambda^3+15\lambda^2-75\lambda+125 \end{pmatrix},$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до третього рядка матриці B_7 другий, помножений на $-\lambda^2+$ $+10\lambda-22$: $B_8 = L_4 \cdot B_7$, де

$$B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+15\lambda^2-75\lambda+125 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+10\lambda-22 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, помножимо і другий, і третій рядки матриці B_8 на -1: $B_9 = L_4 \cdot B_8$, де

$$B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-15\lambda^2+75\lambda-125 \end{pmatrix},$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця B_9 є канонічним виглядом матриці $B-\lambda E$, а в якості матриць перетворень над рядками та над стовпцями можна взяти відповідно матриці:

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \lambda-3 & \lambda^2-10\lambda+22 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda-5 \\ 0 & 1 & \lambda-6 \\ 1 & \lambda-7 & \lambda^2-12\lambda+38 \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Ортогоналізувати методом Ґрама-Шмідта задану систему векторів

$$a_1 = (1, 2, 3, 4),\ a_2 = (0, 2, 0, 5),\ a_3 = (-1, 1, -2, 13),\ a_4 = (1, -4, 0, 0),$$

чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$, а потім нормувати кожен вектор одержаної ортогональної системи векторів.

Розв'язання. Як відомо, процес ортогоналізації застосовний лише до лінійно незалежних систем векторів. Тому спочатку обчислюємо детермінант матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 13 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

складеної із векторів a_1, a_2, a_3, a_4:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-16 - 45 + 60 - 78) = 79.$$

Пересвідчившись, що $|A| \neq 0$, робимо висновок, що вектори a_1, a_2, a_3, a_4 утворюють лінійно незалежну систему.

В якості першого вектора b_1 шуканої ортогональної системи векторів беремо вектор $a_1 = (1, 2, 3, 4)$. Наступний вектор b_2 обчислюємо у вигляді лінійної комбінації векторів b_1, a_2:

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 =$$

$$= (0, 2, 0, 5) - \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} \cdot (1, 2, 3, 4) =$$

$$= (0, 2, 0, 5) - \tfrac{24}{30}(1, 2, 3, 4) = \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}\right).$$

Вектор b_3 будемо обчислювати у вигляді лінійної комбінації векторів a_3, b_1 і b_2:

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 =$$

$$= (-1, 1, -2, 13) - \tfrac{47}{30}(1, 2, 3, 4) - \tfrac{\frac{147}{5}}{\frac{49}{5}} \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}\right) =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}\right).$$

Нарешті,

$$b_4 = a_4 - \frac{\langle b_1, a_4\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle b_2, a_4\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 - \frac{\langle b_3, a_4\rangle}{\langle b_3, b_3\rangle} b_3 =$$

$$= (1, -4, 0, 0) - \tfrac{-7}{30}(1, 2, 3, 4) - \tfrac{\frac{-12}{5}}{\frac{49}{5}}\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}\right) -$$

$$-\tfrac{\frac{79}{6}}{\frac{79}{6}}\left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}\right) = \left(\tfrac{59}{49}, -\tfrac{5}{49}, -\tfrac{19}{49}, \tfrac{2}{49}\right).$$

Нами побудовано ортогональну систем векторів

$$b_1 = (1, 2, 3, 4), \quad b_2 = \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}\right),$$

$$b_3 = \left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}\right), \quad b_4 = \left(\tfrac{59}{49}, -\tfrac{5}{49}, -\tfrac{19}{49}, \tfrac{2}{49}\right).$$

Для перетворення одержаної системи векторів у ортонормований базис «поділимо», тобто помножимо на обернене число, кожен із векторів b_1, b_2, b_3, b_4 відповідно на його норму:

$$\|b_1\| = \sqrt{30}, \quad \|b_2\| = \tfrac{7\sqrt{5}}{5}, \quad \|b_3\| = \tfrac{\sqrt{474}}{6}, \quad \|b_4\| = \tfrac{\sqrt{79}}{7}.$$

Тоді

$$c_1 = \tfrac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, 4) = \left(\tfrac{\sqrt{30}}{30}, \tfrac{\sqrt{30}}{15}, \tfrac{\sqrt{30}}{10}, \tfrac{2\sqrt{30}}{15}\right),$$

$$c_2 = \tfrac{1}{\frac{7\sqrt{5}}{5}}\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}\right) = \left(-\tfrac{4\sqrt{5}}{35}, \tfrac{2\sqrt{5}}{35}, -\tfrac{12\sqrt{5}}{35}, \tfrac{9\sqrt{5}}{35}\right),$$

$$c_3 = \tfrac{1}{\frac{\sqrt{474}}{6}}\left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}\right) = \left(-\tfrac{\sqrt{474}}{474}, -\tfrac{10\sqrt{474}}{237}, \tfrac{\sqrt{474}}{158}, \tfrac{4\sqrt{474}}{237}\right),$$

$$c_4 = \tfrac{1}{\frac{\sqrt{79}}{7}}\left(\tfrac{59}{49}, -\tfrac{5}{49}, -\tfrac{19}{49}, \tfrac{2}{49}\right) = \left(\tfrac{59\sqrt{79}}{553}, -\tfrac{5\sqrt{79}}{553}, -\tfrac{19\sqrt{79}}{553}, \tfrac{2\sqrt{79}}{553}\right)$$

— шукана ортонормована система векторів.

Задача 13. Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$, вказавши деякий його базис, та проекції вектора $c = (-24, 20, 5, -1)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

Розв'язання. Ортогональне доповнення $L^\perp$ до простору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (16) співпадає з лінійною оболонкою системи векторів-рядків

$$a_1 = (1, 2, -1, 1),\ a_2 = (2, 3, 4, -1),\ a_3 = (1, 1, 5, -2)$$

матриці цієї системи рівнянь. Дійсно, для будь-якого вектора $l = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ із L справджуються рівності

$$\begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + (-1)\cdot\lambda_3 + 1\cdot\lambda_4 = 0, \\ 2\cdot\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 4\cdot\lambda_3 + (-1)\cdot\lambda_4 = 0, \\ 1\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 5\cdot\lambda_3 + (-2)\cdot\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Тому вектор l ортогональний з кожним із векторів a_1, a_2, a_3, а через це ортогональний і із довільним вектором із лінійної оболонки $\langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$. Це означає, що $\langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle \subset L^\perp$. Якщо ж вектор $a' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$ міститься в $L^\perp$, то система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 + \alpha'_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

еквівалентна системі лінійних рівнянь (16), бо кожна з цих систем лінійних однорідних рівнянь має множину розв'язків L. Звідси слідує, що $a' \in \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$, а через це $L^\perp \subset \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$ і, як наслідок, $L^\perp = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$.

Далі, за допомогою методу обвідних мінорів знайдемо базис системи векторів-рядків a_1, a_2, a_3 матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система векторів $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, -1)$ є базисом системи векторів a_1, a_2, a_3, а отже, — базисом підпростору $L^\perp$.

Нехай b_1, b_2 — базис підпростору L. Тоді a_1, a_2, b_1, b_2 — базис простору $\mathbb{R}^4$ і

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \tag{17}$$

для деяких α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Нехай c_L, $c_{L^\perp}$ — проекції вектора c відповідно на підпростори L, $L^\perp$. Із теореми про ортогональний розклад та із рівності (17) слідує, що

$$c_L = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \quad c_{L^\perp} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2.$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти α_1, α_2 порівняємо скалярні добутки лівої і правої частин рівності (17) на вектор a_i для кожного $i \in \{1,\ 2\}$. Враховуючи, що $\langle c_L, a_1 \rangle = 0$ і $\langle c_L, a_2 \rangle = 0$, матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \langle c, a_1 \rangle = \alpha_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \alpha_2 \langle a_2, a_1 \rangle, \\ \langle c, a_2 \rangle = \alpha_1 \langle a_1, a_2 \rangle + \alpha_2 \langle a_2, a_2 \rangle \end{cases}$$

або ж

$$\begin{cases} 10 = 7\alpha_1 + \ \ 3\alpha_2, \\ 33 = 3\alpha_1 + 30\alpha_2. \end{cases}$$

Звідси $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Таким чином, вектори

$$c_{L^\perp} = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = (3, 5, 3, 0),$$

$$c_L = c - c_{L^\perp} = (-24, 20, 5, -1) - (3, 5, 3, 0) = (-27, 15, 2, -1)$$

є шуканими проекціями вектора c відповідно на підпростори $L^\perp$ і L.

Задача 14. Нехай f — лінійний оператор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$ такий, що

$$f\big((x_1,x_2,x_3)\big)=\big(\tfrac{6}{23}x_1-\tfrac{13}{23}x_2-\tfrac{18}{23}x_3,\ -\tfrac{3}{23}x_1+\tfrac{18}{23}x_2-\tfrac{14}{23}x_3,\\ -\tfrac{22}{23}x_1-\tfrac{6}{23}x_2-\tfrac{3}{23}x_3\big)$$

для довільного вектора (x_1,x_2,x_3) із $\mathbb{R}^3$. Довести, що f є ортогональним оператором. Знайти деякий ортонормований базис, у якому матриця ортогонального оператора f має блочно діагональний вигляд, на діагоналі якої стоять або клітки вигляду 1, або -1, або клітки вигляду

$$\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma\\ \sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix},$$

де $\gamma\in\mathbb{R}$ і $\gamma\neq\pi k$ для довільного цілого числа k, а також вказати саму матрицю лінійного оператора f у знайденому базисі.

Розв'язання. Випишемо матрицю лінійного оператора f у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^3$:

$$F=\begin{pmatrix}\frac{6}{23} & -\frac{13}{23} & -\frac{18}{23}\\ -\frac{3}{23} & \frac{18}{23} & -\frac{14}{23}\\ -\frac{22}{23} & -\frac{6}{23} & -\frac{3}{23}\end{pmatrix}=-\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-6 & 13 & 18\\ 3 & -18 & 14\\ 22 & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток матриць

$$F\cdot F^T=-\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-6 & 13 & 18\\ 3 & -18 & 14\\ 22 & 6 & 3\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{23}\right)\begin{pmatrix}-6 & 3 & 22\\ 13 & -18 & 6\\ 18 & 14 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{529}\begin{pmatrix}36+169+324 & -18-13\cdot18+14\cdot18 & -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6\\ -18-13\cdot18+14\cdot18 & 9+324+196 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6\\ -22\cdot6+13\cdot6+9\cdot6 & 11\cdot6-18\cdot6+7\cdot6 & 484+36+9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отже, F є ортогональною матрицею. А оскільки канонічний базис є ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$ і F є матрицею лінійного оператора f у цьому базисі, то f є ортогональним оператором.

Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора f

$$|F-\lambda E| = \left(-\tfrac{1}{23}\right)^3 \begin{vmatrix} -6+23\lambda & 13 & 18 \\ 3 & -18+23\lambda & 14 \\ 22 & 6 & 3+23\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + \tfrac{21}{23}\lambda^2 + \tfrac{21}{23}\lambda - 1.$$

Оскільки

$$-\lambda^3 + \tfrac{21}{23}\lambda^2 + \tfrac{21}{23}\lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \tfrac{44}{23}\lambda + 1),$$

то -1 є єдиним власним значенням евклідового оператора f.

Знаходимо власні вектори, що належить власному значенню -1. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею:

$$-\tfrac{1}{23}\begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 22 & 6 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -29 & 13 & 18 \\ 3 & -41 & 14 \\ 1 & 293 & -118 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 8510 & -3404 \\ 0 & -920 & 368 \\ 1 & 293 & -118 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 1 & 293 & -118 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ є базисом простору власних векторів ортогонального оператора f, що належить власному значенню -1. Пронормуємо цей вектор, одержимо вектор $u = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Далі знаходимо комплексні корені характеристичного многочлена оператора f. Для цього обчислюємо корені квадратного тричлена $\lambda^2 - \frac{44}{23}\lambda + 1$:

$$\tfrac{22}{23} - \tfrac{3\sqrt{5}}{23}i, \qquad \tfrac{22}{23} + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}i.$$

Зауважимо, що це також власні значення, але вже унітарного оператора f унітарного простору $\mathbb{C}^3$ з матрицею F у канонічному базисі. Знайдемо деякий власний вектор унітарного оператора f, що належить власному значенню $\frac{22}{23} - \frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Знову ж таки розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -6+(22-3\sqrt{5}i) & 13 & 18 \\ 3 & -18+(22-3\sqrt{5}i) & 14 \\ 22 & 6 & 3+(22-3\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 16-3\sqrt{5}i & 13 & 18 \\ 3 & 4-3\sqrt{5}i & 14 \\ 22 & 6 & 25-3\sqrt{5}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 16-3\sqrt{5}i & 13 & 18 \\ 3 & 4-3\sqrt{5}i & 14 \\ 1 & -22+21\sqrt{5}i & -73-3\sqrt{5}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 16-3\sqrt{5}i & 13 & 18 \\ 3 & 4-3\sqrt{5}i & 14 \\ 1 & -22+21\sqrt{5}i & -73-3\sqrt{5}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 50-302\sqrt{5}i & 1231-171\sqrt{5}i \\ 0 & 70-66\sqrt{5}i & 233+9\sqrt{5}i \\ 1 & -22+21\sqrt{5}i & -73-3\sqrt{5}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \\ 1 & -22+21\sqrt{5}i & -73-3\sqrt{5}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{3\sqrt{5}}{10}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i \end{pmatrix}.$$

Звідси слідує, що вектор

$$\left(-1+\tfrac{3\sqrt{5}}{10}i,\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{3\sqrt{5}}{5}i,\ 1\right) \tag{18}$$

є базисом підпростору власних векторів унітарного оператора f, що належать власному значенню $\frac{22}{23}-\frac{3\sqrt{5}}{23}i$. Розглянемо вектори

$$\left(-1,-\tfrac{1}{2},1\right), \qquad \left(\tfrac{3\sqrt{5}}{10},-\tfrac{3\sqrt{5}}{5},0\right). \tag{19}$$

Це — пара ортогональних векторів і їх лінійна комбінація з коефіцієнтами 1, i дорівнює вектору (18). За властивістю унітарного оператора кожен з цих векторів також ортогональний до раніше знайденого власного вектора u.

Пронормувавши кожен із векторів системи векторів (19), одержимо вектори:

$$v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \qquad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Можна пересвідчитись, що

$$f(v) = \tfrac{22}{23}v + \tfrac{3\sqrt{5}}{23}w, \qquad f(w) = -\tfrac{3\sqrt{5}}{23}v + \tfrac{22}{23}w.$$

Тому система векторів

$$u = \left(\tfrac{4\sqrt{5}}{15}, \tfrac{2\sqrt{5}}{15}, \tfrac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad v = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad w = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

є шуканим ортонормованим базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$, а

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{22}{23} & -\frac{3\sqrt{5}}{23} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{23} & \frac{22}{23} \end{pmatrix}$$

— матриця ортогонального оператора f у цьому базисі.

Задача 15. Нехай ψ — оператор чотиривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^4$ такий, що

$$\psi\big((x_1,x_2,x_3,x_4)\big) = \tfrac{1}{15}(4x_1 - 19x_2 + 2x_3 - 2x_4,\\ -19x_1 + \tfrac{65}{2}x_2 - 2x_3 + 5x_4, 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16x_4,\\ -2x_4 + 5x_2 - 16x_3 + 25x_1),$$

де $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$. Довести, що ψ є симетричним оператором евклідового простору $\mathbb{R}^4$. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора ψ і матрицю оператора ψ у цьому базисі.

Розв'язання. Випишемо матрицю лінійного оператора ψ у канонічному базисі евклідового простору $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{19}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{19}{15} & \frac{13}{6} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{16}{15} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{16}{15} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно матриця A^T, транспонована до A, дорівнює A. Тому A є симетричною матрицею і через це за ознакою симетричного оператора скінченновимірного евклідового простору ψ є симетричним оператором евклідового простору $\mathbb{R}^4$.

Обчислимо характеристичний многочлен лінійного оператора ψ:

$$|A - \lambda E| = \left(\tfrac{1}{15}\right)^4 \begin{vmatrix} 4-15\lambda & -19 & 2 & -2 \\ -19 & \frac{65}{2}-15\lambda & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 1-15\lambda & -16 \\ -2 & 5 & -16 & 25-15\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 - \tfrac{25}{6}\lambda^3 + 2\lambda^2 + \tfrac{25}{6}\lambda + 1. \tag{20}$$

Розкладемо цей характеристичний многочлен на лінійні множники. Враховуючи особливості коефіцієнтів многочлена (20) зробимо це у наступний спосіб:

$$\lambda^4 - \tfrac{25}{6}\lambda^3 + 2\lambda^2 + \tfrac{25}{6}\lambda + 1 = (\lambda^4+1) - \tfrac{25}{6}(\lambda^3 - \lambda) + 2\lambda^2 =$$

$$= (\lambda^2-1)^2 - \tfrac{25}{6}\lambda(\lambda^2-1) + 4\lambda^2 = \left((\lambda^2-1) - \tfrac{8}{3}\lambda\right)\left((\lambda^2-1) - \tfrac{3}{2}\lambda\right),$$

де $\frac{8}{3}$, $\frac{3}{2}$ — корені многочлена $x^2 - \frac{25}{6}x + 4$. Нарешті

$$\left((\lambda^2-1)-\tfrac{8}{3}\lambda\right)\left((\lambda^2-1)-\tfrac{3}{2}\lambda\right) = \left(\lambda^2-\tfrac{8}{3}\lambda-1\right)\left(\lambda^2-\tfrac{3}{2}\lambda-1\right) =$$

$$= (\lambda-3)\left(\lambda+\tfrac{1}{3}\right)(\lambda-2)\left(\lambda+\tfrac{1}{2}\right).$$

Отже $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 2, 3 — всі власні значення симетричного оператора ψ. Знаходимо його власні вектори, що належать власному значенню $-\frac{1}{2}$. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} \frac{23}{2} & -19 & 2 & -2 \\ -19 & 40 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & \frac{17}{2} & -16 \\ -2 & 5 & -16 & \frac{65}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що $\left\{\alpha(-1,-\frac{1}{2},2,1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$ — множина всіх власних векторів, що належать власному значенню $-\frac{1}{2}$.

Аналогічного для кожного з власних значень $-\frac{1}{3}$, 2, 3 розв'язуємо відповідні системи лінійних однорідних рівнянь з матрицями:

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -19 & 2 & -2 \\ -19 & \frac{75}{2} & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -16 \\ -2 & 5 & -16 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -26 & -19 & 2 & -2 \\ -19 & \frac{5}{2} & -2 & 5 \\ 2 & -2 & -29 & -16 \\ -2 & 5 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -41 & -19 & 2 & -2 \\ -19 & -\frac{25}{2} & -2 & 5 \\ 2 & -2 & -44 & -16 \\ -2 & 5 & -16 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\{\alpha(4,2,2,1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

— множина всіх власних векторів, що належать власному значенню $-\frac{1}{3}$;

$$\left\{\alpha(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$$

— множина всіх власних векторів, що належать власному значенню 2;

$$\left\{\alpha(-1, 2, -\tfrac{1}{2}, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$$

— множина всіх власних векторів, що належать власному значенню 3.

Власні вектори

$$\begin{gathered} a_1 = (-1, -\tfrac{1}{2}, 2, 1), \quad a_2 = (4, 2, 2, 1), \\ a_3 = (\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1), \quad a_4 = (-1, 2, -\tfrac{1}{2}, 1) \end{gathered} \tag{21}$$

симетричного оператора ψ належать попарно різним власним значенням. Через це система векторів (21) є ортогональною. Пронормувавши систему векторів (21), одержимо шуканий ортонормований базис евклідового простору $\mathbb{R}^4$, що складається з власних векторів симетричного оператора ψ:

$$b_1 = \left(-\tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}\right), \quad b_2 = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}\right).$$

$$b_3 = \left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{2}{5}, -\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}\right), \quad b_4 = \left(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}\right).$$

Матрицею симетричного оператора ψ у цьому базисі є матриця

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. Нехай $f = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 18x_2x_3 + 7x_3^2$ і $g = 4y_1^2 - 4y_1y_2 - 12y_1y_3 - 15y_2^2 + 30y_2y_3$ — квадратичні форми від трьох змінних над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Знайти невироджене лінійне перетворення змінних, за допомогою якого із квадратичної форми f можна одержати квадратичну форму g. Виписати матрицю цього перетворення.

Розв'язання. Знайдемо невироджені лінійні перетворення невідомих, за допомогою яких із квадратичних форм f і g можна одержати квадратичні форми нормальних виглядів. Виписуємо матрицю квадратичної форми f:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перетворення невідомих квадратичної форми f, обернене до перетворення

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + 3x_2 + 4u_3, \\ u_2 = x_2, \\ u_3 = x_3, \end{cases}$$

тобто перетворення

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - 3u_2 - 4u_3, \\ x_2 = u_2, \\ x_3 = u_3 \end{cases}$$

з матрицею

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результаті цього перетворення одержимо квадратичну форму f_1 з матрицею

$$F_1 = Q_1^T F Q_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тобто
$$f_1 = u_1^2 - u_2^2 - 6u_2u_3 - 9u_3^2.$$

Далі виконуємо перетворення невідомих квадратичної форми f_1, обернене до до перетворення
$$\begin{cases} v_1 = u_1, \\ v_2 = -u_2 - 3u_3, \\ v_3 = u_3, \end{cases}$$
тобто перетворення
$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = -v_2 - 3v_3, \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$
з матрицею
$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
В результаті цього перетворення одержимо квадратичну форму $f_2 = = v_1^2 - v_2^2$ нормального вигляду з матрицею
$$F_2 = Q_2^T F_1 Q_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, поступово виконуючи невироджені лінійні перетворення невідомих, «перетворимо» квадратичну форму g у квадратичну форму нормального вигляду. Виписуємо матрицю квадратичної форми g:
$$G = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & -15 & 15 \\ -6 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$
Виконаємо перетворення невідомих квадратичної форми g, обернене до перетворення
$$\begin{cases} w_1 = 4y_1 - 2y_2 - 6y_3, \\ w_2 = y_2, \\ w_3 = y_3, \end{cases}$$

тобто перетворення

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}3w_2 + \frac{3}{2}w_3, \\ y_2 = w_2, \\ y_3 = w_3 \end{cases}$$

з матрицею

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результаті цього перетворення одержимо квадратичну форму g_1 з матрицею

$$G_1 = R_1^T G R_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & -15 & 15 \\ -6 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 12 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$g_1 = \frac{1}{4}w_1^2 - 16w_2^2 + 24w_2w_3 - 9w_3^2.$$

Далі виконуємо перетворення невідомих квадратичної форми g_1, обернене до до перетворення

$$\begin{cases} z_1 = w_1, \\ z_2 = -16w_2 + 12w_3, \\ z_3 = w_3, \end{cases}$$

тобто перетворення

$$\begin{cases} w_1 = z_1, \\ w_2 = -\frac{1}{16}z_2 + \frac{3}{4}z_3, \\ w_3 = z_3 \end{cases}$$

з матрицею

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У результаті цього перетворення одержимо квадратичну форму $g_2 = \frac{1}{4}z_1^2 - \frac{1}{16}z_2^2$ канонічного вигляду з матрицею

$$G_2 = R_2^T G_1 R_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Насамкінець, виконаємо перетворення

$$\begin{cases} z_1 = 2v_1, \\ z_2 = 4v_2, \\ z_3 = v_3 \end{cases}$$

з матрицею

$$R_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо квадратичну форму $g_3 = v_1^2 - v_2^2$ нормального вигляду. Таким чином,

$$f \sim f_1 \sim f_2 \sim g_3 \sim g_2 \sim g_1 \sim g,$$

а матриця

$$S = Q_1 Q_2 R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 11 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є матрицею невиродженого лінійного перетворення невідомих, за допомогою якого із квадратичної форми f одержуємо квадратичну форму g.

Задача 17. Знайти всі значення параметра α, для яких є додатно визначеною дійсна квадратична форма $f = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ від змінних x_1, x_2, x_3.

Розв'язання. Згідно критерію Сільвестра квадратична форма f є додатно визначеною, якщо всі головні мінори матриці

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 3 \\ -2 & \alpha & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

квадратичної форми f є додатними дійсними числами. Обчислимо головні мінори матриці F:

$$|\alpha| = \alpha,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ -2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 4,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & 3 \\ -2 & \alpha & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 17\alpha - 24.$$

Таким чином, квадратична форма f є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли справджуються нерівності

$$\begin{cases} \alpha > 0, \\ \alpha^2 - 4 > 0, \\ \alpha^3 - 17\alpha - 24 > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Враховуючи те, що

$$\alpha^2 - 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 2),$$

$$\alpha^3 - 17\alpha - 24 = (\alpha + 3)\left(\alpha - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(\alpha - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right),$$

із (22) одержуємо, що

$$\begin{cases} \alpha \in (0, \infty), \\ \alpha \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty), \\ \alpha \in \left(-3, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Отже, дана в умові квадратична форма f є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли $\alpha \in \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}, \infty\right)$.

Задача 18. Знайти ортогональне перетворення змінних та канонічний вигляд квадратичної форми, яку можна одержати за допомогою цього перетворення, із наступної квадратичної форми

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Розв'язання. Для того, щоб знайти канонічний вигляд квадратичної форми f знайдемо власні значення симетричного оператора φ тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, матриця якого дорівнює матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

квадратичної форми f. Характеристичний многочлен матриці F дорінює

$$|F - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 7\lambda + 9 & -\lambda \\ -1 & -\lambda + 5 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 9 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} \lambda^2 - 7\lambda + 9 & 1 \\ 2\lambda - 9 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

Звідси слідує, що власними значеннями симетричного оператора φ є числа 3, 6, 0. Як наслідок квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g канонічного вигляду $3y_1^2 + 6y_2^2$.

Щоб знайти ортогональне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 в змінні y_1, y_2, y_3, за допомогою якого із квадратичної форми f можна одержати квадратичну форму g, знайдемо ортонормований базис евклідового простору $\mathbb{R}^3$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Для знаходження власних векторів розв'язуємо послідовно системи лінійних однорідних рівнянь з матрицями:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $a_1 = (1, 1, -1)$ — базис простору власних векторів φ, що належать власному значенню 3; $a_2 = (-1, 2, 1)$ — базис простору власних векторів симетричного оператора φ, що належать власному значенню 6; $a_3 = (1, 0, 1)$ — базис простору власних векторів φ, що належать власному значенню 0.

За властивістю симетричного оператора система векторів a_1, a_2, a_3 є ортогональною системою векторів, а отже, вона є ортогональним базисом евклідового простору $\mathbb{R}^3$.

Пронормуємо цю систему векторів:

$$b_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad b_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad b_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Тому лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 в змінні y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}y_2, \\ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3 \end{cases}$$

є одним з ортогональних перетворень цих змінних, за допомогою якого із даної квадратичної форми f можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду $3y_1^2 + 6y_2^2$.

Зацікавленому читачу. Розглянемо поверхню, яка у декартовій системі координат $Oxyz$ тривимірного простору задається рівнянням

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz = 6.$$

Ліва частина цього рівняння є квадратичною формою з трьома змінними x, y і z, матриця якої співпадає (тобто дорівнює) з матрицею квадратичної форми із задачі 18. Використовуючи результати розв'язання цієї задачі можемо стверджувати, що перетворення простору обернене до ортогонального перетворення

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}x' - \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z', \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x' + \frac{\sqrt{6}}{3}y', \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{3}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases} \tag{23}$$

відображає систему координат $Oxyz$ у систему координат $Ox'y'z'$, в якій дана поверхня задається рівнянням $3{x'}^2 + 6{y'}^2 = 6$ або канонічним рівнянням $\frac{{x'}^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{{y'}^2}{1^2} = 1$. Таким чином, даною поверхнею є еліптичний циліндр з віссю, що проходить через початок координат і має напрямний вектор $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Аналогічно розв'язанню задачі 14 знаходимо ортонормований базис u_1, u_2, u_3 евклідового простору $\mathbb{R}^3$, в якому матриця ортогонального перетворення (23) має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де $\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Вектор u_1 є одиничним вектором, який колінеарний вектору $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2, 1)$. Це означає, що ортогональне перетворення (23) є поворотом простору на кут γ навколо прямої, що проходить через початок координат і має напрямний вектор u_1.

Ми настійно радимо читачу використати пакет динамічної математики GeoGebra [10] для наочного представлення вище наведених міркувань.

Перелік джерел посилань

1. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра: начальний посібник. Львів: Львів. нац. ун-т імен Івана Франка, 2008. 226 с.
2. Завало С. Т. Курс алгебри. Київ: Вища школа, 1985. 503 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. 3-е изд. Москва: Физико-математическая литература, 2004. 272 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. 432 с.
5. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984. 416 с.
6. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Частина I / Завало С. Т., Левищенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Київ: Вища школа, 1983. 232 с.
7. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори). Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010. 257 с.
8. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. 320 с.
9. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. 9-е изд. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 383 с.
10. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra / Гризун Л. Е., Пікалова В. В., Русіна І. Д., Цибулька В. А. URL: https://www.geogebra.org/m/jjqf2vfk
(дата звернення: 02.02.2020).

ШАПОЧКА Ігор Валерійович

Лінійна алгебра.

Навчальний посібник
для індивідуальних робіт

Формат $60 \times 84/16$. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 5,58. Замовлення №21.
Наклад 100 прим.

Видавництво Ужгородського національного університету «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
e-mail: hoverla@i.ua

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції —
Серія Зт №32 від 31 травня 2006 року*