ББК 22.1+72.4 (4УКР)
У-33
УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: П. М. Гудивок (гол. ред.) та інші. – Ужгород: УжНУ, 2008. – Вип. 17. – 245 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою УжНУ (протокол №10 від 27.11.2008).

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

ЗМІСТ

УДК 519.21

В. П. Рудько, Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

СИЛОВСЬКІ p-ПІДГРУПИ В $GL(n, \mathbb{Z}[\varepsilon])$

The criterion of the isomorphism of the Sylow subgroups of the general linear group over the ring $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ have been found in the paper.

Знаходиться критерій ізоморфізму силовських підгруп повної лінійної групи над кільцем $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Силовські p-підгрупи повних лінійних груп над кільцями головних ідеалів характеристики нуль вивчались в роботах [1–6]. В [6] знайдено критерій ізоморфізму силовських p-підгруп групи $GL(n, K)$ над кільцем K головних ідеалів характеристики нуль з необоротним елементом p. В даній роботі встановлюється критерій ізоморфізму силовських p-підгруп групи $GL(n, R)$ над кільцем R типу кільця $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Нехай R — область цілісності характеристики нуль, просте число p — необоротне в R, силовська p-підгрупа P_p в групі R^* має порядок p і $P_p = \langle \varepsilon \rangle$ $(\varepsilon^p = 1)$. Відмітимо, що кільце $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ міститься в R і задовольняє названим умовам.

Наступне твердження добре відоме.

Лема 1. *Нехай F — поле відношень кільця R. Якщо $t < p$, то елементарна абелева група $P_p^t = P_p \times \cdots \times P_p$ порядку p^t буде єдиною, з точністю до спряженності, силовською p-підгрупою групи $GL(t, F)$. Зокрема, будь-яка p-підгрупа групи $GL(t, R)$ буде елементарною абелевою групою.*

Теорема 1. *Нехай $2 \le m < p$. З точністю до ізоморфізму, всі силовські p-підгрупи групи $GL(m, R)$ вичерпуються елементарними абелевими групами відповідно порядків $p^2, \ldots, p^m$.*

Теорема 2. *Нехай $p > 2$. Силовські p-підгрупи групи $GL(n, R)(n > 1)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n = 2$.*

Введемо в розгляд матриці

$$a_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^{j-1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \le j \le m).$$

Лема 2. *Елементарна абелева група*

$$H_j = \langle a_j, \varepsilon e_j \rangle \quad (e_j - \textit{одиниця в} \quad GL(j, R))$$

порядку p^2 буде силовською p-підгрупою групи $GL(j, R)$.

Доведення. Проведемо індукцію по j $(2 \le j < p)$. Група H_2 є силовська p-підгрупа групи $GL(2, R)$. Нехай $2 \le j < p - 1$ і H_j є силовською p-підгрупою групи $GL(j, R)$. Покажемо, що група H_{j+1} буде силовською p-підгрупою в групі $GL(j + 1, R)$. Нехай

$$a \in GL(j + 1, R), \quad a^p = e_{j+1} \quad \text{і} \quad aa_{j+1} = a_{j+1}a.$$

Із цих співвідношень випливає, що a — верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої належать групі P_p. Нехай

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & a' \end{pmatrix} \quad (\alpha \in P_p,\ a' \in GL(j,R)).$$

Так як $a'a_j = a_j a'$, $a'^p = e_j$ і H_j – силовська p-підгрупа, то $a' \in H_j$, тобто $a' = a_j^u(\varepsilon e_j)^v$. Нехай

$$b = a_{j+1}^{-u}(\varepsilon e_{j+1})^{-v}a.$$

Тоді

$$b = \begin{pmatrix} \varepsilon^t & * \\ 0 & e_j \end{pmatrix},$$

де $* = (\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in R^j$ і $b^p = e_{j+1}$.
Так як $ba_{j+1} = a_{j+1}b$, то

$$\begin{aligned} &\varepsilon^t + \varepsilon^{j-1}\alpha_1 = \varepsilon^j\alpha_1 + 1, \\ &\alpha_1 + \varepsilon^{j-2}\alpha_2 = \varepsilon^j\alpha_2, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = (\varepsilon^t - 1)(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-1})^{-1}, \\ &\alpha_2 = \alpha_1(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-2})^{-1}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що, якщо $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \in R^*$ але, так як $\pi = \varepsilon - 1$ — необоротний елемент в кільці R, то α_2 не міститься в кільці R. Отже, $\alpha_1 = 0$ і тоді $\varepsilon^t = 1$, тобто $b = e_{j+1}$ і $a \in H_{j+1}$, що завершує індукцію. Лема доведена.

Нехай d_i $(i = 1, \dots, m)$ — діагональна матриця порядку m, в якій i-ий елемент діагоналі рівний ε, а всі інші діагональні елементи рівні одиниці.

Лема 3. *Нехай $2 \le m - s$. Елементарна абелева група*

$$G_s \rightleftharpoons P_p^s \times H_{m-s}$$

порядку p^{s+2} $(s = 1, \dots, m-2)$ буде силовською p-підгрупою групи $GL(m,R)$.

Доведення. Якщо це не так, то існує матриця $a \in GL(m,R)$, яка централізує групу G_s і $a^s = e_m$. В групі G_s існує матриця з різними діагональними елементами, яка також комутує з матрицею a. З цієї умови неважко одержати, що

$$a = \begin{pmatrix} a' & * \\ 0 & a'' \end{pmatrix},$$

де p-елементи a' і a'' централізують групу P_p^s і групу H_{m-s} відповідно. Але ці групи є силовськими підгрупами в своїх групах. Це значить, що

$$a' \in P_p^s, \quad a'' \in H_{m-s}.$$

Тоді для деякого елемента $g \in P_p^s \times H_{m-s}$ добуток ga буде унітрикутною матрицею і елементом порядку p. Так як $char R = 0$, то $ga = e_m$ і, отже, $a \in G_s$, що доводить лему.

Теорема 1 випливає із лем 2–3.

Нехай H — підгрупа групи $GL(d,R)$, $C_p = \langle\sigma\rangle$ — циклічна порядку p група підстановок, породжена циклом σ. Нехай

$$W(H) = H \wr C_p = \langle H^p,\, \widetilde{\sigma}\rangle$$

— сплетення матричної групи H з групою підстановок C_p ($\widetilde{\sigma}$ — матриця підстановки σ над кільцем $M(d,R)$). Група $W(H)$ є підгрупою групи $GL(dp,R)$.

Лема 4 ([6]). *Група $W(P_p)$ $(p>2)$ є незвідною силовською p-підгрупою групи $GL(p,R)$.*

Лема 5 ([6]). *Нехай $d>1$ і H — незвідна силовська p-підгрупа групи $GL(d,R)$. Тоді $W(H)$ — незвідна силовська p-підгрупа групи $GL(dp,R)$.*

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови леми 5. Покладемо*

$$W_0(H)=H,\ W_1(H)=W(H),\ \ldots,\ W_j(H)=W(W_{j-1}(H)) \quad (j=1,2,\ldots).$$

Група $W_j(H)$ буде незвідною силовською p-підгрупою групи $GL(dp^j,R)$.

Наслідок 2. *Нехай $0\le d_0<d$ і H_0 — силовська p-підгрупа групи $GL(d_0,R)$ (якщо $d_0>0$). Нехай*

$$n=d_0+d(n_0+n_1p+\cdots+n_sp^s) \quad (0\le n_j<p,\ n_s\ne 0,\ s\ge 0).$$

Група

$$G(H)=H_0\times W_0(H)^{n_0}\times W_1(H)^{n_1}\times\cdots\times W_s(H)^{n_s}$$

буде силовською p-підгрупою групи $GL(n,R)$.

Нехай

$$V_p=\left\{\begin{array}{ll} W(P_p)=P_p\wr C_p & (p>3), \\ (P_3\wr C_3)\wr C_3 & (p=3)\end{array}\right\}.$$

Очевидно V_p є силовською p-підгрупою групи $GL(d_p,R)$, де $d_p=p$ при $p>3$ і $d_3=9$. Нехай

$$\widehat{V}_p=V_p\cap SL(d_p,R).$$

Очевидно $(V_p:\widehat{V}_p)=p$, зокрема, $V_p\,/\,\widehat{V}_p=diag[\varepsilon,1,\ldots,1]\widehat{V}_p$.

Нехай група V_p діє в R-модулі L_p з базисом $e_1,\ldots,e_{d_p}$. Розглянемо в L_p R-підмодуль

$$M_p=\langle\pi^2e_1,\,\pi(e_2-e_1,),\ldots,\pi(e_{d_p-1}-e_{d_p-2}),\,e_1+e_2+\cdots+e_{d_p}\rangle.$$

Лема 6. *Модуль M_p є $R\widehat{V}_p$-модулем і не буде RV_p-модулем.*

Нехай T_p — матриця переходу від вказаного R-базиса в M_p до R-базиса $\{e_j\}$ в L_p (ці базиси будуть базисами в лінійному просторі FL_p).

Лема 7. *Група $U_p=T_p^{-1}\widehat{V}_pT_p$ належить групі $GL(d_p,R)$ і буде в цій групі силовською p-підгрупою.*

Леми 6–7 доводяться аналогічно відповідним лемам роботи [6].

Наслідок 3. *Якщо $n\ge d_p$, то силовські p-підгрупи групи $GL(n,R)$ не ізоморфні.*

Доведення. Групи $G(V_p)$ і $G(U_p)$ мають різні порядки (див. також наслідок 2). Доведення теореми 2 для $p > 3$ випливає з наслідку 3 і теореми 1.

Нехай далі $p = 3$.

Лема 8. *В наступній таблиці вказані неізоморфні силовські 3-підгрупи групи $GL(m, R) (2 \leq m \leq 8)$ і вказані їх порядки :*

$$m = 2 : H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 9;$$

$$m = 3 : P_3 \wr C_3, 81; \; P_3 \times H_2, 27;$$

$$m = 4 : H_2 \times H_2, 81; \; (P_3 \wr C_3) \times P_3, 3^5;$$

$$m = 5 : H_2 \times H_2 \times P_3, 3^5; (P_3 \wr C_3) \times H_2, 3^6;$$

$$m = 6 : (P_3 \wr C_3)^2, 3^8; \; H_2 \wr C_3, 3^7;$$

$$m = 7 : (P_3 \wr C_3)^2 \times P_3, 3^9; \; (H_2 \wr C_3) \times P_3, 3^8;$$

$$m = 8 : (P_3 \wr C_3)^2 \wr H_2, 3^{10}; \; (H_2 \wr C_3) \times H_2, 3^9.$$

Із леми 8 випливає доведення теореми 2 для $p = 3$.

В [4] показано, що силовські 2-підгрупи групи $GL(n, \mathbf{Z})$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n \leq 3$.

1. *Гудивок П. М.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**, № 6. – С. 121–128.
2. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 918–924.
3. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об изоморфизме силовских p-подгрупп полной линейной группы над кольцом целых чисел // Докл. АН Украины. – 1992. – № 9. – С. 3–5.
4. *Gudivok P. M., Rud'ko V. P.* On isomorphism of Sylow subgroups of the general linear groups over the of integers // J. Math. Sci. – 2000. – **102**, № 3. – P. 3998–4008.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доповіді НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5–7.
6. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над областями главных идеалов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 31–46.

Одержано 5.11.2008