

ББК 22.1+72.4 (4УКР)

У-33

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. /
Редкол.: П. М. Гудивок (гол. ред.) та інші. – Ужгород: УжНУ, 2008. – Вип. 17. –
245 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Гудивок П. М., доктор фізико-математичних наук,
професор.

Заст. головн. редактора — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук,
професор.

Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук,
доцент.

Члени редакційної колегії:

Бабич М. Д., доктор фізико-математичних наук, професор;

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор;

Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор;

Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор;

Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Маляр М. М., кандидат технічних наук, доцент;

Моца А. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Перестюк М. О., член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;

Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор.

Рекомендовано до друку Вченою радою УжНУ (протокол №10 від 27.11.2008).

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Серія КВ №7972.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14,
математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

© П. М. Гудивок, І. А. Мич,
упорядкування, 2008

© Ужгородський нац. університет, 2008

ЗМІСТ

1. Айзенберг И. Н., Семйон И. В., Циткин А. И. Наум Нисонович Айзенберг: Человек и Ученый	4
2. Антосяк П. П. Декомпозиційні процедури у задачі знаходження строгого результуючого ранжування об'єктів у вигляді медіани Кемені-Снелла	27
3. Бабич М. Д., Гецко О. М. Оптимізація обчислень при глобальному розв'язуванні нелінійних задач	36
4. Bodyanskiy Ye., Viktorov Ye., Pliss I. The Cascade Neo-Fuzzy Neural Network and its Learning Algorithm	47
5. Бондаренко В. М. Ультрапредставления колчанов	58
6. Брилла А. Ю. Досяжність оптимальних розв'язків задач лексикографічно-паретівської та парето-лексикографічної оптимізації з опуклими критеріальними функціями за зваженою сумою рівноважливих критеріїв	63
7. Гече Ф. Е. Нейрофункції и логические схемы в нейробазисе	66
8. Глебена М. І., Цегелик Г. Г. Новий підхід до побудови чисельного методу відшукування абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій двох дійсних змінних.	74
9. Головач И. И. Информация, как фундаментальная философская категория	80
10. Гудивок П. М., Желізняк М. П. Про нерозкладні матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль	91
11. Кирилук А. О. Перша група когомологій для незвідних 3-підгруп групи $GL(3, \mathbb{Z}[\epsilon])$	95
12. Король І. І. Інтегрування крайових задач для систем диференціальних рівнянь із запізненням	100
13. Маляр М. М., Швалагін О. Ю. Обробка експертної інформації у дворівневій задачі вибору	109
14. Мамай Л. М. Про наближене розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю	115
15. Маринець В. В., Добридень А. В. Про деякі неklasичні задачі для квазілінійних рівнянь гіперболічного типу	131
16. Масол В. І., Ромашова Л. О. Теореми існування єдиного розв'язку однорідної системи випадкових рівнянь у полі $GF(3)$	144
17. Mihovski S. V. Roots of polynomials over commutative rings	160
18. Moraga C. Multiple-valued threshold logic	169
19. Пагіря М. М. Обернений ланцюговий дріб Тіле	178
20. Рудько В. П., Юрченко Н. В. Силоські p -підгрупи в $GL(n, \mathbb{Z}[\epsilon])$	192
21. Slyuka-Tylyshchak A. I. Conditions of existence with probability one generalized solution of the boundary-value problems of hyperbolic equations with random initial conditions	196
22. Stanković M. Reversible Synthesis by Using Decision Diagrams	203

УДК 519.21

В. П. Рудько, Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

СИЛОВСЬКІ p -ПІДГРУПИ В $GL(n, \mathbb{Z}[\varepsilon])$

The criterion of the isomorphism of the Sylow subgroups of the general linear group over the ring $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ have been found in the paper.

Знаходиться критерій ізоморфізму силовських підгруп повної лінійної групи над кільцем $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Силовські p -підгрупи повних лінійних груп над кільцями головних ідеалів характеристики нуль вивчались в роботах [1–6]. В [6] знайдено критерій ізоморфізму силовських p -підгруп групи $GL(n, K)$ над кільцем K головних ідеалів характеристики нуль з необоротним елементом p . В даній роботі встановлюється критерій ізоморфізму силовських p -підгруп групи $GL(n, R)$ над кільцем R типу кільця $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Нехай R — область цілісності характеристики нуль, просте число p — необоротне в R , силовська p -підгрупа P_p в групі R^* має порядок p і $P_p = \langle \varepsilon \rangle$ ($\varepsilon^p = 1$). Відмітимо, що кільце $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ міститься в R і задовольняє названим умовам.

Наступне твердження добре відоме.

Лема 1. *Нехай F — поле відношень кільця R . Якщо $t < p$, то елементарна абелева група $P_p^t = P_p \times \dots \times P_p$ порядку p^t буде єдиною, з точністю до спряженості, силовською p -підгрупою групи $GL(t, F)$. Зокрема, будь-яка p -підгрупа групи $GL(t, R)$ буде елементарною абелевою групою.*

Теорема 1. *Нехай $2 \leq t < p$. З точністю до ізоморфізму, всі силовські p -підгрупи групи $GL(t, R)$ вичерпуються елементарними абелевими групами відповідно порядків p^2, \dots, p^m .*

Теорема 2. *Нехай $p > 2$. Силовські p -підгрупи групи $GL(n, R)$ ($n > 1$) ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n = 2$.*

Введемо в розгляд матриці

$$a_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^{j-1} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \varepsilon & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \leq j \leq m).$$

Лема 2. *Елементарна абелева група*

$$H_j = \langle a_j, \varepsilon e_j \rangle \quad (e_j - \text{одиниця в } GL(j, R))$$

порядку p^2 буде силовською p -підгрупою групи $GL(j, R)$.

Доведення. Проведемо індукцію по j ($2 \leq j < p$). Група H_2 є силовська p -підгрупа групи $GL(2, R)$. Нехай $2 \leq j < p - 1$ і H_j є силовською p -підгрупою групи $GL(j, R)$. Покажемо, що група H_{j+1} буде силовською p -підгрупою в групі $GL(j+1, R)$. Нехай

$$a \in GL(j+1, R), \quad a^p = e_{j+1} \quad \text{і} \quad aa_{j+1} = a_{j+1}a.$$

Із цих співвідношень випливає, що a — верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої належать групі P_p . Нехай

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & a' \end{pmatrix} \quad (\alpha \in P_p, a' \in GL(j, R)).$$

Так як $a'a_j = a_j a'$, $a'^p = e_j$ і H_j — силовська p -підгрупа, то $a' \in H_j$, тобто $a' = a_j^u (\varepsilon e_j)^v$. Нехай

$$b = a_{j+1}^{-u} (\varepsilon e_{j+1})^{-v} a.$$

Тоді

$$b = \begin{pmatrix} \varepsilon^t & * \\ 0 & e_j \end{pmatrix},$$

де $* = (\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in R^j$ і $b^p = e_{j+1}$.

Так як $ba_{j+1} = a_{j+1}b$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon^t + \varepsilon^{j-1} \alpha_1 &= \varepsilon^j \alpha_1 + 1, \\ \alpha_1 + \varepsilon^{j-2} \alpha_2 &= \varepsilon^j \alpha_2, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\varepsilon^t - 1)(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-1})^{-1}, \\ \alpha_2 &= \alpha_1(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-2})^{-1}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що, якщо $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \in R^*$ але, так як $\pi = \varepsilon - 1$ — необоротний елемент в кільці R , то α_2 не міститься в кільці R . Отже, $\alpha_1 = 0$ і тоді $\varepsilon^t = 1$, тобто $b = e_{j+1}$ і $a \in H_{j+1}$, що завершує індукцію. Лема доведена.

Нехай d_i ($i = 1, \dots, m$) — діагональна матриця порядку m , в якій i -ий елемент діагоналі рівний ε , а всі інші діагональні елементи рівні одиниці.

Лема 3. Нехай $2 \leq m - s$. Елементарна абелева група

$$G_s \cong P_p^s \times H_{m-s}$$

порядку p^{s+2} ($s = 1, \dots, m - 2$) буде силовською p -підгрупою групи $GL(m, R)$.

Доведення. Якщо це не так, то існує матриця $a \in GL(m, R)$, яка централізує групу G_s і $a^s = e_m$. В групі G_s існує матриця з різними діагональними елементами, яка також комутує з матрицею a . З цієї умови неважко одержати, що

$$a = \begin{pmatrix} a' & * \\ 0 & a'' \end{pmatrix},$$

де p -елементи a' і a'' централізують групу P_p^s і групу H_{m-s} відповідно. Але ці групи є силовськими підгрупами в своїх групах. Це значить, що

$$a' \in P_p^s, \quad a'' \in H_{m-s}.$$

Тоді для деякого елемента $g \in P_p^s \times H_{m-s}$ добуток ga буде унітрикутною матрицею і елементом порядку p . Так як $\text{char} R = 0$, то $ga = e_m$ і, отже, $a \in G_s$, що доводить лему.

Теорема 1 випливає із лем 2–3.

Нехай H — підгрупа групи $GL(d, R)$, $C_p = \langle \sigma \rangle$ — циклічна порядку p група підстановок, породжена циклом σ . Нехай

$$W(H) = H \wr C_p = \langle H^p, \tilde{\sigma} \rangle$$

— сплетення матричної групи H з групою підстановок C_p ($\tilde{\sigma}$ — матриця підстановки σ над кільцем $M(d, R)$). Група $W(H)$ є підгрупою групи $GL(dp, R)$.

Лема 4 ([6]). Група $W(P_p)$ ($p > 2$) є незвідною силовською p -підгрупою групи $GL(p, R)$.

Лема 5 ([6]). Нехай $d > 1$ і H — незвідна силовська p -підгрупа групи $GL(d, R)$. Тоді $W(H)$ — незвідна силовська p -підгрупа групи $GL(dp, R)$.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови леми 5. Покладемо

$$W_0(H) = H, W_1(H) = W(H), \dots, W_j(H) = W(W_{j-1}(H)) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Група $W_j(H)$ буде незвідною силовською p -підгрупою групи $GL(dp^j, R)$.

Наслідок 2. Нехай $0 \leq d_0 < d$ і H_0 — силовська p -підгрупа групи $GL(d_0, R)$ (якщо $d_0 > 0$). Нехай

$$n = d_0 + d(n_0 + n_1p + \dots + n_s p^s) \quad (0 \leq n_j < p, n_s \neq 0, s \geq 0).$$

Група

$$G(H) = H_0 \times W_0(H)^{n_0} \times W_1(H)^{n_1} \times \dots \times W_s(H)^{n_s}$$

буде силовською p -підгрупою групи $GL(n, R)$.

Нехай

$$V_p = \left\{ \begin{array}{l} W(P_p) = P_p \wr C_p \quad (p > 3), \\ (P_3 \wr C_3) \wr C_3 \quad (p = 3) \end{array} \right\}.$$

Очевидно V_p є силовською p -підгрупою групи $GL(d_p, R)$, де $d_p = p$ при $p > 3$ і $d_3 = 9$. Нехай

$$\widehat{V}_p = V_p \cap SL(d_p, R).$$

Очевидно $(V_p : \widehat{V}_p) = p$, зокрема, $V_p / \widehat{V}_p = \text{diag}[\varepsilon, 1, \dots, 1] \widehat{V}_p$.

Нехай група V_p діє в R -модулі L_p з базисом e_1, \dots, e_{d_p} . Розглянемо в L_p R -підмодуль

$$M_p = \langle \pi^2 e_1, \pi(e_2 - e_1), \dots, \pi(e_{d_p-1} - e_{d_p-2}), e_1 + e_2 + \dots + e_{d_p} \rangle.$$

Лема 6. Модуль M_p є $R\widehat{V}_p$ -модулем і не буде RV_p -модулем.

Нехай T_p — матриця переходу від вказаного R -базиса в M_p до R -базиса $\{e_j\}$ в L_p (ці базиси будуть базисами в лінійному просторі FL_p).

Лема 7. Група $U_p = T_p^{-1} \widehat{V}_p T_p$ належить групі $GL(d_p, R)$ і буде в цій групі силовською p -підгрупою.

Леми 6–7 доводяться аналогічно відповідним лемам роботи [6].

Наслідок 3. Якщо $n \geq d_p$, то силовські p -підгрупи групи $GL(n, R)$ не ізоморфні.

Доведення. Групи $G(V_p)$ і $G(U_p)$ мають різні порядки (див. також наслідок 2). Доведення теореми 2 для $p > 3$ впливає з наслідку 3 і теореми 1.

Нехай далі $p = 3$.

Лема 8. В наступній таблиці вказані неізоморфні силовські 3-підгрупи групи $GL(m, R)$ ($2 \leq m \leq 8$) і вказані їх порядки :

$$m = 2 : H_2 = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle, 9;$$

$$m = 3 : P_3 \wr C_3, 81; P_3 \times H_2, 27;$$

$$m = 4 : H_2 \times H_2, 81; (P_3 \wr C_3) \times P_3, 3^5;$$

$$m = 5 : H_2 \times H_2 \times P_3, 3^5; (P_3 \wr C_3) \times H_2, 3^6;$$

$$m = 6 : (P_3 \wr C_3)^2, 3^8; H_2 \wr C_3, 3^7;$$

$$m = 7 : (P_3 \wr C_3)^2 \times P_3, 3^9; (H_2 \wr C_3) \times P_3, 3^8;$$

$$m = 8 : (P_3 \wr C_3)^2 \wr H_2, 3^{10}; (H_2 \wr C_3) \times H_2, 3^9.$$

Із леми 8 впливає доведення теореми 2 для $p = 3$.

В [4] показано, що силовські 2-підгрупи групи $GL(n, \mathbf{Z})$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n \leq 3$.

1. Гудивок П. М. О силовских p -подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – 2, № 6. – С. 121–128.
2. Гудивок П. М. О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 7–8. – С. 918–924.
3. Гудивок П. М., Рудько В. П. Об изоморфизме силовских p -подгрупп полной линейной группы над кольцом целых чисел // Докл. АН Украины. – 1992. – № 9. – С. 3–5.
4. Gudivok P. M., Rud'ko V. P. On isomorphism of Sylow subgroups of the general linear groups over the of integers // J. Math. Sci. – 2000. – 102, № 3. – P. 3998–4008.
5. Гудивок П. М., Рудько В. П. О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доповіді НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5–7.
6. Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В. О силовских p -подгруппах полной линейной группы над областями главных идеалов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 31–46.

Одержано 5.11.2008