

Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет інформаційних технологій

В. М. Коцовський

Основи дискретної математики

Навчальний посібник

Ужгород – 2020

УДК 519.1(075)
К75

Рецензенти:

Завілопуло А. М., заступник директора ІЕФ НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;

Тилищак О. А., доцент кафедри алгебри ДВНЗ «Ужгородський національний університет», кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Коцовський В. М.

К75 Основи дискретної математики: навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2020. 128 с.

У навчальному посібнику стисло викладено основні поняття та методи дискретної математики. Видання містить матеріал таких розділів, як теорія множин, теорія бінарних відношень, комбінаторика, теорія булевих функцій та теорія графів, які традиційно входять до базового курсу дисципліни. За змістом та обсягом посібник відповідає робочій програмі дисципліни «Основи дискретної математики» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології».

Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів. У кінці кожного розділу наведено задачі для самостійного розв'язування.

*Рекомендовано до друку Вченою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 3 від 4 червня 2020 р.)*

*Рекомендовано до друку редакційно-видавничою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 3 від 3 червня 2020 р.)*

ISBN 978-617-7796-12-0

© Коцовський В. М.
© ПП «АУТДОР-ШАРК»

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1. ТЕОРІЯ МНОЖИН	7
1.1. Поняття множини	7
1.2. Способи задання множин	7
1.3. Основні числові множини. Метод математичної індукції	8
1.4. Підмножини	9
1.5. Операції над множинами	11
1.6. Алгебра множин	16
1.7. Потужність множини	18
1.8. Задачі до першого розділу	20
2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ	24
2.1. Декартів добуток множин	24
2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень	24
2.3. Операції над бінарними відношеннями	27
2.4. Властивості однорідних бінарних відношень	29
2.5. Відношення еквівалентності	34
2.6. Відношення порядку	37
2.7. Функціональні відношення	41
2.7.1. Основні означення	41
2.7.2. Види функцій	42
2.8. Задачі до другого розділу	44
3. КОМБІНАТОРИКА	52
3.1. Основні правила комбінаторики	52
3.2. Розміщення, сполучення та перестановки	52
3.3. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона та поліноміальна формула	56
3.4. Деякі комбінаторні задачі	58
3.4.1. Задача про цілочислові розв'язки	58
3.4.2. Принцип Діріхле	59
3.4.3. Принцип включення-виключення	60
3.5. Задачі про розподіл предметів за ящиками та розбиття множини	61
3.6. Задача про розбиття множини на непорожні частини	62
3.7. Числа Каталана	64
3.8. Задачі до третього розділу	66
4. ТЕОРІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ	68
4.1. Булеві вектори	68
4.1.1. Основні означення	68
4.1.2. Операції над булевими векторами	69
4.2. Булеві функції	70
4.2.1. Булеві функції. Основні означення	70

4.2.2. Елементарні булеві функції	72
4.2.3. Реалізація булевих функцій формулами.....	73
4.2.4. Двоїсті булеві функції	74
4.3. Спеціальні форми подання булевих функцій.....	76
4.3.1. Розклад булевих функцій за змінними	76
4.3.2. Нормальні форми булевих функцій.....	78
4.3.3. Досконалі нормальні форми	80
4.3.4. Поліноми Жегалкіна	83
4.4. Застосування булевих функцій в теорії контактних та логічних схем.....	84
4.4.1. Контактні схеми	84
4.4.2. Схеми із логічних елементів.....	88
4.5. Задачі до четвертого розділу.....	91
5. ТЕОРІЯ ГРАФІВ.....	96
5.1. Основні поняття теорії графів.....	96
5.1.1. Предмет теорії графів. Основні означення.....	96
5.1.2. Способи задання графів.....	99
5.1.3. Основні види графів.....	100
5.2. Маршрути у графі	103
5.2.1. Метричні характеристики графів	104
5.3. Зв'язність. Компоненти зв'язності.....	105
5.3.1. Відношення зв'язності у неорієнтованому графі.	105
5.3.2. Класифікація ребер та вершин графів з точки зору зв'язності	105
5.3.3. Зв'язність у орієнтованих графах	106
5.3.4. Обхід графів.....	107
5.4. Ейлерові та гамільтонові графи	108
5.4.1. Графи Ейлера.....	108
5.4.2. Гамільтонові графи.	109
5.5. Планарні графи.....	110
5.6. Деревя	111
5.6.1. Ліс	111
5.6.2. Неорієнтовані дерева	112
5.6.3. Нумеровані дерева	112
5.6.4. Кореневі дерева.	113
5.6.5. Орієнтовані дерева.....	114
5.6.6. Бінарні дерева.....	114
5.7. Задачі до п'ятого розділу.....	118
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	123
СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ	125

ПЕРЕДМОВА

Дискретність — поняття, яке протилежне за своїм змістом неперервності. *Дискретна математика* — галузь математики, в межах якої вивчаються властивості дискретних структур. Спорідненими назвами до терміну «Дискретна математика» є дискретний аналіз, скінченна математика, конкретна математика тощо.

Навчальна дисципліна «Основи дискретної математики» вивчається студентами спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» протягом першого семестру. Актуальність вивчення основних понять та засад дискретної математики майбутніми спеціалістами в галузі інформаційних технологій зумовлена тим фактом, що основні способи подання та обробки інформації в інформаційних системах є дискретними за своєю природою [4, 8]. Тому важливою складовою процесу підготовки фахівців ІТ-сфери є вироблення знань та навичок, які стосуються розуміння та використання сучасних моделей та методів обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації.

Слід зазначити також велике методологічне значення вивчення дисципліни «Основи дискретної математики». Воно, зокрема, полягає у тому, що переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12— «Інформаційні технології», широко використовують позначення, поняття та моделі дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як «Алгоритми та структури даних», «Сучасні мови програмування», «Об'єктно-орієнтоване програмування», «Бази даних та знань», «Методи та системи штучного інтелекту» [13], «Математичне моделювання», «Системний аналіз», «Технологія розподілених систем та паралельних обчислень» [14–17], «Інтелектуальний аналіз даних» тощо.

У навчальному посібнику розглянуто навчальний матеріал тих розділів, які традиційно входять до більшості монографій та навчальних посібників з дискретної математики [1–4]. Наведено відомості з теорії множин, теорії бінарних відношень, комбінаторного аналізу, теорії булевих функцій та теорії графів. Кожний розділ спирається на матеріал попередніх розділів та складає окремий змістовий модуль у структурі навчальної дисципліни. Пропонується перші три змістові модулі включати до складу першого модуля, останні два — до складу другого.

На початку кожного розділу наведено основні позначення та означення, знання яких є обов'язковим для успішного засвоєння навчальної дисципліни. Важливі поняття та терміни, які уперше зустрічаються у тексті, виділено курсивом. Переважну більшість понять проілюстровано на змістовних прик-

ладах. Кожний розділ завершується підрозділом, в якому наведено задачі базового рівня складності, які згруповані за підтемами та можуть бути використані на практичних заняттях, а також для самопідготовки до модульного та семестрового контролів.

Виклад матеріалу є надзвичайно стислим. Додаткові теоретичні відомості, обґрунтування тверджень, а також більш детальний розгляд відповідних розділів дискретної математики читач може знайти у підручниках [1–5, 19–27], які наведені у переліку рекомендованої літератури. Велика кількість додаткових задач різної складності наведена у [6–12].

Посібник написаний на основі матеріалів семестрового курсу лекцій з дисципліни «Основи дискретної математики», який читався автором на факультеті інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет». Головна мета курсу — ознайомлення студентів з найбільш поширеними дискретними структурами і моделями та вироблення навичок розв’язування практичних задач з дискретними даними. Обсяг матеріалу підібраний таким чином, щоб забезпечити можливість опрацювання основної частини курсу під час аудиторних занять. З тими розділами дискретної математики, які не увійшли у посібник, читач може ознайомитися в підручниках [1–4, 19–27]. При написанні посібника автор використовував власні методичні розробки [10, 11]. Багато задач для самостійного розв’язування запозичено із [12]. Додаткові задачі підвищеної складності можуть бути знайдені в [9].

Зміст посібника та стиль викладу в значній мірі визначаються традиціями науково-педагогічної школи кафедри інформаційних управляючих систем та технологій Ужгородського університету, засновником і завідувачем якої був професор Ю. А. Василенко.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини належить до основних понять математики. Воно не має точного визначення і належить до так званих аксіоматичних понять.

Часто використовують інтуїтивне поняття множини, яке дав основоположник теорії множини Г. Кантор [8]:

«Довільна сукупність об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від іншого і які складають єдине ціле, називається *множиною*. Об'єкти, які входять до складу множини, називаються її *елементами*».

Той факт, що елемент x належить множині A , позначається як $x \in A$. Запис $x \notin A$ означає, що елемент x не належить множині A .

Розглядається також множина, яка не містить жодного елемента. Ця множина називається *порожньою* і позначається \emptyset .

Згідно до *інтуїтивного принципу об'ємності* дві множини є *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони складаються із однакових елементів. Рівність двох множин A та B будемо позначати як $A = B$.

Властивості відношення рівності множин:

- 1) $A = A$;
- 2) якщо $A = B$, то $B = A$;
- 3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$.

Множина, яка складається із елементів a_1, a_2, \dots, a_n , позначається $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Приклад 1.1. Множина $\{a\}$ — одноелементна множина, єдиним елементом якої є елемент a .

Множини $\{1, 2, 3, 4\}$ та $\{3, 2, 4, 1\}$ є рівними, оскільки вони складаються із тих самих елементів.

Множини $\{1, 2, 3, 4\}$ та $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ не є рівними, оскільки перша містить чотири елементи, а друга — два.

1.2. Способи задання множин

Розглянемо три основні способи задання множин.

1. Задання множини переліком її елементів

Усі елементи множини записуються у фігурних дужках.

Приклад 1.2. $A = \{4, 11, 20, 25, 31\}$.

Цей спосіб на практиці використовується для задання скінченних множин, які містять відносно невелику кількість елементів. Він є непридатним для

задання нескінченних множин, а також для задання скінченних множин, елементи яких важко перелічити (прикладом може бути множина собак міста Ужгорода).

2. Задання множини вказівкою властивостей її елементів (предикативний)

Під властивістю $P(x)$ об'єкта x будемо розуміти розповідне речення, в якому щось стверджується про об'єкт x і яке може бути або істинним, або хибним.

Множина A усіх об'єктів x , які мають властивість $P(x)$, позначається як $A = \{x | P(x)\}$.

Приклад 1.3. Нехай $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 10 = 0\}$. Для знаходження елементів множини A потрібно розв'язати квадратне рівняння $x^2 - 7x + 10 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Тому $A = \{2, 5\}$.

3. Задання множини за допомогою процедури породження елементів.

Приклад 1.4. Множина чисел Фібоначчі визначається наступним чином:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

Вкажемо перші десять чисел Фібоначчі:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34, f_{10} = 55.$$

Із заданням множин пов'язаний цілий ряд парадоксів. Розглянемо

Парадокс перукаря. Єдиний перукар у місті N визначає множину A мешканців, яких він повинен голити, як сукупність всіх тих мешканців N , які не голяться самі. Але тоді для самого перукаря виходить протиріччя і при включенні його до множини A , і при віднесенні його до мешканців, які голяться самі.

Парадокс Рассела. Нехай A — множина усіх множин, які не є власними елементами. Тоді обидва можливі твердження про множину A є суперечливими:

- 1) A є елементом множини A ;
- 2) A не є елементом множини A .

1.3. Основні числові множини. Метод математичної індукції

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносяться:

- 1) Множина натуральних чисел \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- 2) Множина цілих чисел \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3) Множина раціональних чисел \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

4) Множина дійсних чисел \mathbb{R} (множина усіх чисел числової прямої).

Метод математичної індукції

Метод *математичної індукції* заснований на *принципі математичної індукції*, який полягає у наступному: *твердження справедливе для всіх натуральних n , якщо*

- 1) *твердження справджується у випадку $n = 1$ (база індукції);*
- 2) *із виконання твердження для довільного натурального $n = k$ (припущення індукції) випливає його справедливість для $n = k + 1$ (індуктивний перехід).*

Приклад 1.5. Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел рівна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Розв'язок. Нехай $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

1) База індукції. Нехай $n = 1$. Тоді $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2) Припустимо, що при $n = k$ твердження виконується, тобто $S_2(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ і нехай $n = k + 1$. Тоді

$$\begin{aligned} S_2(n) &= S_2(k+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

1.4. Підмножини

Множина A називається *підмножиною* множини B , якщо кожний елемент множини A є елементом множини B . Це позначають як $A \subseteq B$.

Наприклад, $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Символ « \subseteq » називається символом операції *включення* множин.

Множина A називається *власною підмножиною* множини B , якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Символ « \subset » називається символом операції *строого включення* множин.

Властивості операції включення:

- 1) $A \subseteq A$;
- 2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;
- 3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
- 4) для довільної множини A $\emptyset \subseteq A$.

Властивості операції строгого включення:

- 1) $A \not\subset A$;
- 2) якщо $A \subset B$, то $B \not\subset A$;
- 3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Множина усіх підмножин множини A називається *булеаном* множини A і позначається $\mathcal{B}(A)$ або 2^A . Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, то

$$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Теорема 1.1. Якщо непорожня скінченна множина містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів.

Доведення. Використаємо індукцію за числом n .

1) База індукції. Нехай $n = 1$. Тоді $\mathcal{B}(\{a_1\}) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$. Тому у випадку $n = 1$ твердження теореми справджується.

2) Припустимо, що при $n = k$ твердження виконується, тобто у випадку k -елементної множини A кількість елементів булеана $\mathcal{B}(A)$ рівна 2^k . Розглянемо випадок $n = k + 1$. Нехай $A = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Розіб'ємо елементи булеана $\mathcal{B}(A)$ на дві групи підмножин. До першої групи віднесемо усі підмножини множини A , які не містять елемента a_{k+1} , до другої — усі інші підмножини. Перша група складається із усіх підмножин k -елементної множини $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ і тому згідно з припущенням індукції містить 2^k елементів. Кількість елементів другої групи також рівна 2^k , оскільки відкинувши елемент a_{k+1} з довільної підмножини, яка входить до другої групи, отримаємо деяку підмножину, яка входить до першої групи. Тому загальна кількість елементів булеана $\mathcal{B}(A)$ рівна $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^n$, що й треба було довести. Теорема доведена.

1.5. Операції над множинами

До основних операцій над множинами відносяться *доповнення*, *перетин*, *об'єднання*, *різниця*, та *симетрична різниця*, для позначення яких використовуються відповідно символи $\bar{}$, \cap , \cup , \setminus , Δ :

$\bar{A} = \{x | x \in U, x \notin A\}$ — доповнення множини A до універсальної множини U .

$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$ — перетин множин A та B .

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$ — об'єднання множин A та B .

$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ — різниця множин A та B .

$A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симетрична різниця множин A та B (позначення $\stackrel{\text{def}}{=}$ читається як «рівне за визначенням»).

Приклад 1.6. Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ — універсальна множина,

$$A = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 27\},$$

$$B = \{3x - 6 | x - \text{непарне}, x \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x | x + 4 - \text{просте число}\}.$$

Вказати перелік елементів множини $D = B \setminus (A \Delta \bar{C})$.

Розв'язок.

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

$$B = \{9, 15, 21, 27\}, \quad C = \{7, 9, 13, 15, 19, 25, 27\}.$$

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\bar{C} = \{5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$.

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та \bar{C} за формулою:

$$A \Delta \bar{C} = (A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{C} \setminus A).$$

Оскільки $A \setminus \bar{C} = \{9, 27\}$, $\bar{C} \setminus A = \{5, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$, то

$$A \Delta \bar{C} = \{5, 9, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

в) Знайдемо різницю множин B та $A \Delta \bar{C}$:

$$B \setminus (A \Delta \bar{C}) = \{15, 21\}.$$

Відповідь: $D = \{15, 21\}$.

Часто для ілюстрації операцій над множинами використовують *діаграми Венна*. При цьому універсальну множину позначають прямокутником, усі інші

множини — овалами (або іншими фігурами) у ньому. Результат операції виділяється кольором або штрихуванням, як це показано на рис. 1.1.

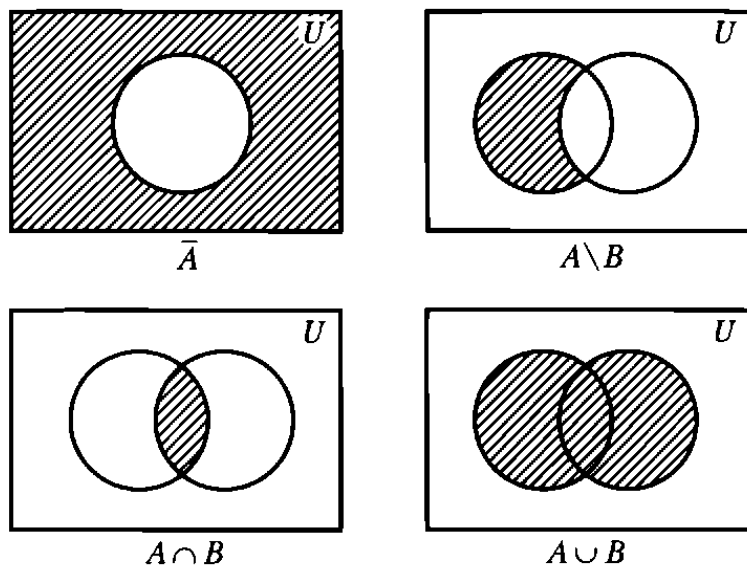


Рис. 1.1. Діаграми Венна основних операцій над множинами

Приклад 1.7. На діаграмі Венна зобразити множину $C \setminus \overline{A \cup B}$.

Розв'язок.

Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу $C \setminus \overline{A \cup B}$, у порядку їх виконання (див. рис. 1.2). На правій діаграмі на рис. 1.3. зображена шукана множина.

Приклад 1.8. Довести, що для довільних множин A , B та C справджується рівність $C \setminus \overline{A \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Розв'язок.

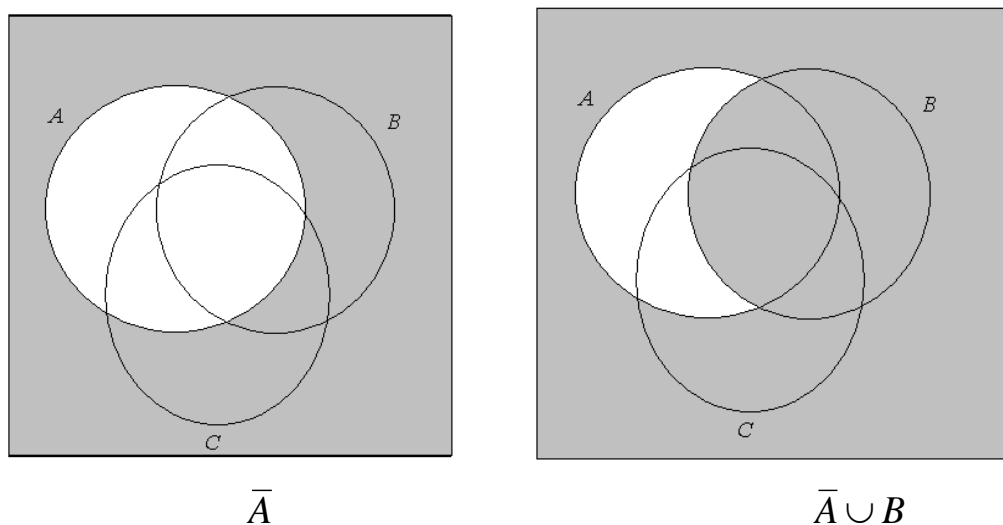


Рис. 1.2.

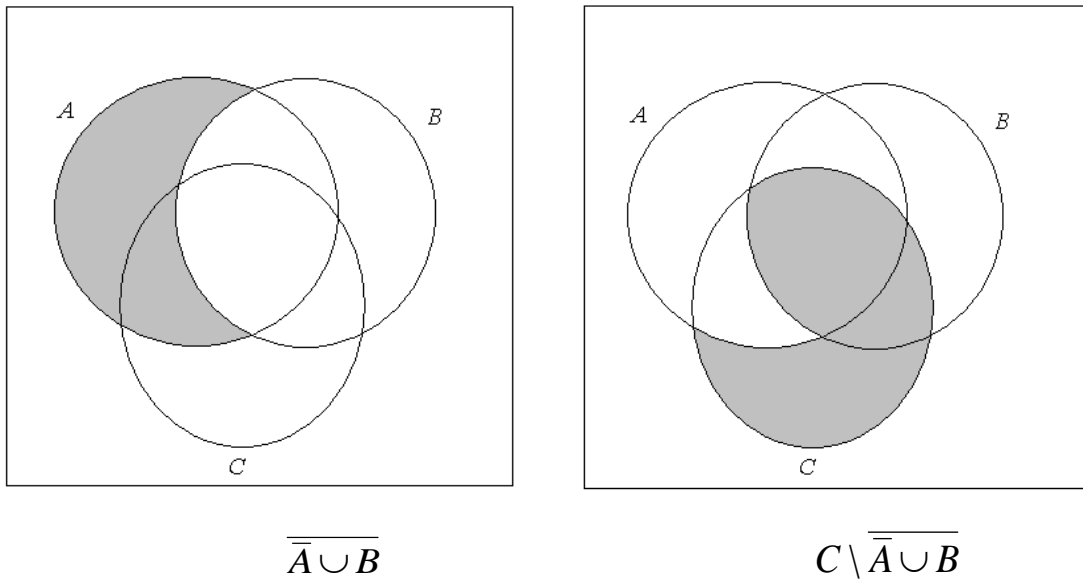


Рис. 1.3.

Перший спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 1.3. Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$, як це показано на рис. 1.4–1.5.

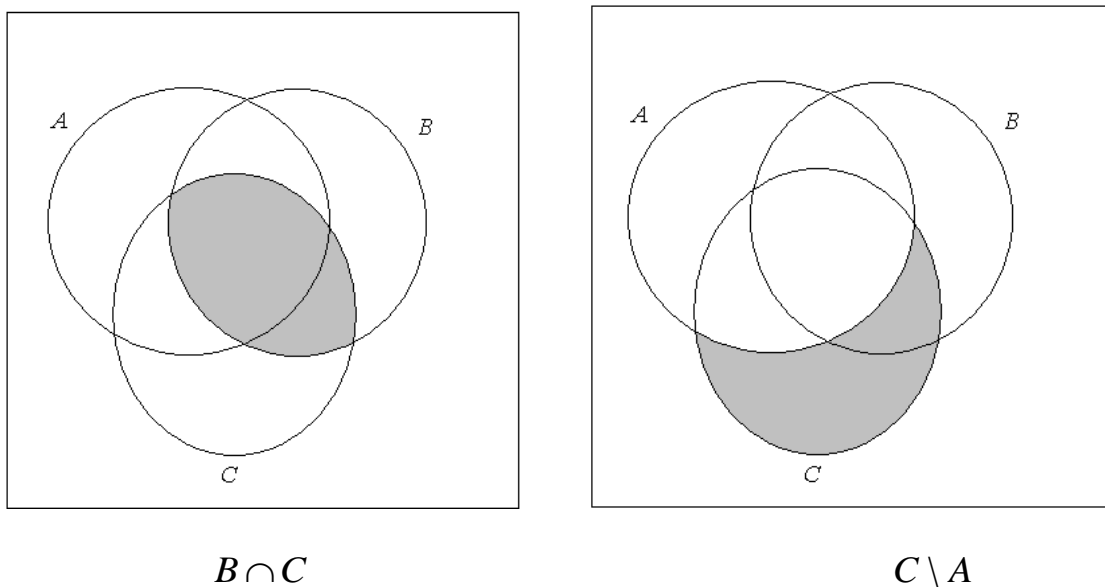


Рис. 1.4.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 1.3 (справа) та рис. 1.5. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб. Використаємо інтуїтивний принцип об'ємності, згідно до якого для доведення потрібної рівності достатньо довести, що

$$C \setminus \overline{A \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A)$$

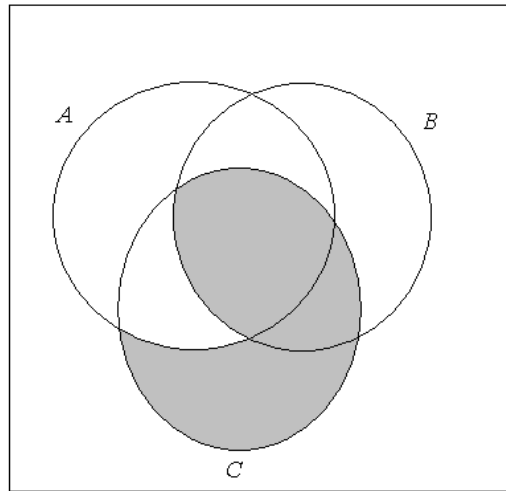


Рис. 1.5. Діаграма Ейлера-Венна множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$.

та

$$B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{A \cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{A \cup B}$. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \bar{A}. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right\} \\ \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент x множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A. \end{array} \right\} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \bar{A}. \end{array} \right\} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow x \in C \setminus \overline{A \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{A \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Приклад 1.9. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Python, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Python і C++, 7 — Python і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною

із мов Python, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язок. У якості універсальної множини U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Python, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Python, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10 - x$ програмістів знають лише Python і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 1.6, яка відповідає множині $(P \cup C) \setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7 - x$ програмістів знають лише мови Python і Java, $8 - x$ — лише мови C++ та Java.

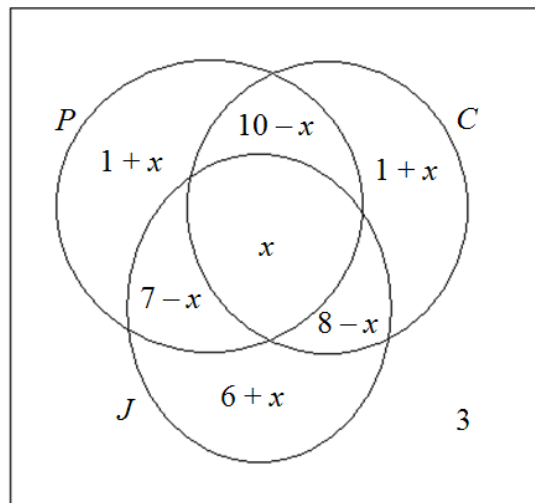


Рис 1.6. Діаграма до прикладу 1.9

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Python, C++ та Java. Оскільки мову Python знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Python рівна

$$18 - (10 - x) - (7 - x) - x = 1 + x.$$

Аналогічно отримуємо, що $19 - (10 - x) - (8 - x) - x = 1 + x$ програмістів знають лише мову C++, $21 - (7 - x) - (8 - x) - x = 6 + x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 1.6).

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18 + (8 - x) + (1 + x) + (6 + x) + 3 = 40.$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини P , останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримуємо $36 + x = 40$. Звідси $x = 4$.

1.6. Алгебра множин

Множина усіх підмножин деякої універсальної множини U разом із заданими на ній операціями $\bar{}$, \cap , \cup називається *алгеброю множин*.

Основні закони алгебри множин:

1) Закони комутативності:

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

2) Закони асоціативності:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3) Закони ідемпотентності:

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

4) Закони дистрибутивності:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C),$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5) Властивості універсальної множини:

$$A \cap U = A,$$

$$A \cup U = U,$$

$$A \setminus U = \emptyset,$$

$$A \Delta U = \bar{A}.$$

6) Властивості *порожньої множини*:

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \setminus \emptyset = A,$$

$$A \Delta \emptyset = A.$$

7) Властивості доповнення:

$$\overline{\bar{A}} = A,$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

$$A \cup \bar{A} = U,$$

$$A \Delta \bar{A} = U.$$

8) Закони *де Моргана*:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

9) Властивості *різниці*:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B},$$

$$A \setminus A = \emptyset,$$

$$U \setminus A = \bar{A}.$$

10) Властивості *симетричної різниці*:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B),$$

$$\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta \bar{B},$$

$$A \Delta A = \emptyset.$$

Приклад 1.10. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $A \cup A \cap B = A$ (закон поглинання);

б) $A \cup \bar{A} \cap B = A \cup B$;

$$\text{в) } \overline{A \cup B \cup (C \setminus A)} = A \setminus B.$$

Розв'язок.

а) Використаємо перший дистрибутивний закон та властивості універсальної множини:

$$A \cup A \cap B \stackrel{5}{=} (A \cap U) \cup (A \cap B) \stackrel{4}{=} A \cap (U \cup B) \stackrel{5}{=} A \cap U \stackrel{5}{=} A.$$

Над рівностями у попередньому рядку вказані номери законів алгебри множин, які використовуються при переході від множини у лівій частині рівності до множини у правій частині.

б) Використаємо другий дистрибутивний закон, властивості доповнення та універсальної множини:

$$A \cup \bar{A} \cap B \stackrel{4}{=} (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \stackrel{7}{=} U \cap (A \cup B) \stackrel{5}{=} A \cup B.$$

в) Використаємо закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості операції віднімання та закон ідемпотентності:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B \cup (C \setminus A)} &\stackrel{9}{=} \overline{A \cap B \cup (C \setminus A)} \stackrel{2,9,10}{=} A \cap \bar{B} \cap \overline{C \cap \bar{A}} \stackrel{1,9}{=} \bar{B} \cap A \cap (\bar{C} \cup A) \stackrel{4}{=} \\ &\stackrel{4}{=} \bar{B} \cap (A \cap \bar{C} \cup A \cap A) \stackrel{3}{=} \bar{B} \cap (A \cap \bar{C} \cup A) \stackrel{\text{а)}}{=} \bar{B} \cap A \stackrel{10}{=} A \setminus B. \end{aligned}$$

1.7. Потужність множини

Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. У протилежному випадку множина називається *нескінченною*.

Кількість елементів скінченної множини називається *потужністю множини*.

Потужність множини A позначається $|A|$.

Теорема 1.2. Якщо A , B та C — скінченні множини, то

$$\text{а) } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$\text{б) } |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доведення.

а) Нехай

$$A \cap B = \{c_1, \dots, c_k\}, \quad A = \{a_1, \dots, a_l, c_1, \dots, c_k\}, \quad B = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\},$$

де $a_i \notin B$, $i = 1, \dots, l$, $b_j \notin A$, $j = 1, \dots, m$. Тоді

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}.$$

Тому

$$|A \cup B| = l + m + k = (l + k) + (m + k) - k = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

що й треба було довести.

б) Використаємо результат пункту а):

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Відповідність між елементами множин A та B називається *взаємно однозначною*, якщо кожному елементу множини A відповідає *єдиний елемент* множини B і кожному елементу множини B відповідає *єдиний елемент* множини A .

Приклад 1.11. Відображення $f : x \rightarrow 3x + 1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A = \{1, 2, 5\}$ та $B = \{4, 7, 16\}$.

Дві множини A та B називаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді $|A| = |B|$.

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. $|A| = |A|$.
2. Якщо $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$.
3. Якщо $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Приклад 1.12. Множини $A = \{1, 2, \dots, n\}$ та $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f : k \rightarrow a_k$.

Скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад 1.13. Множина парних цілих чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f : 2n \rightarrow n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Множина A називається *зліченною*, якщо вона є рівнопотужною множині натуральних чисел.

Теорема 1.3. Множина цілих чисел є зліченною.

Доведення. Покажемо, що множина натуральних чисел \mathbb{N} рівнопотужна множині цілих чисел \mathbb{Z} . Побудуємо відображення $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ наступним чином:

$$f(1)=0, f(2)=1, f(3)=-1, f(4)=2, f(5)=-2, f(6)=3, f(7)=-3, \dots$$

Легко переконатися, що $f(2k-1)=-(k-1)$, $f(2k)=k$, $k=1,2,\dots$ і відображення f є взаємно однозначним і обернене до нього відображення $g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$ визначається наступним чином:

$$g(n)=2n, \text{ якщо } n>0 \text{ та } g(n)=1-2n, \text{ якщо } n\leq 0.$$

Отже, множини \mathbb{N} та \mathbb{Z} є рівнопотужними.

Теорема 1.4. Множина раціональних чисел \mathbb{Q} є зліченною.

Доведення. *Висотою* раціонального дробу $\frac{a}{b}$, ($a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$) назвемо число $|a|+b$. Запишемо раціональні числа у порядку зростання висот відповідних їм правильних нескоротних дробів:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \dots$$

Кожне раціональне число зустрінеться у цій послідовності рівно один раз. Тому елементи множини \mathbb{Q} можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел. Встановлена за допомогою нумерації відповідність є взаємно однозначною. Отже, множина раціональних чисел — зліченна.

Теорема 1.5. Для множин справджуються наступні твердження:

- а) у кожної нескінченної множини є зліченна підмножина.
- б) будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або зліченна.
- в) об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.
- г) об'єднання скінченної кількості злічених множин — зліченна множина.

Теорема 1.6. Множина дійсних чисел \mathbb{R} не є зліченною.

Множина, рівнопотужна множині дійсних чисел \mathbb{R} , називається *континуальною*.

1.8. Задачі до першого розділу

Операції над множинами

1. Чи вірно, що:

- а) $\{1,4,5\} = \{5,1,4\}$;
- б) $\emptyset = \{\emptyset\}$; $\emptyset \subset \{\emptyset\}$; $\emptyset \subset \emptyset$; $\emptyset \subseteq \emptyset$;
- в) $\{\{a,b\}, \{c,d,e\}\} = \{a,b,c,d,e\}$; $\{a,c,e\} \subset \{a, \{b,c\}, d, e\}$.

2. Чи вірно, що:

- а) $\{1,3\} \in \{3,2,4,5,1\}$;
 б) $a = \{a\}$; $a \subseteq \{a\}$; $\emptyset \subset \{a\}$; $(\{a\} \setminus \emptyset) \subset (\{a\} \cup \emptyset)$;
3. Знайти $A \Delta (\bar{B} \cap C)$ за умови, що
 $U = \{1,2,\dots,20\}$, $A = \{x - 2 \mid 5x + 1 - \text{квадрат цілого числа}\}$, $B = \{x \mid x^2 > 60\}$,
 $C = \{x \mid (3x - 1) - \text{просте число}\}$.
4. Нехай $U = \{5,6,\dots,30\}$ — універсальна множина, $A = \{5,7,8,10,11,14,20,21,22,26\}$,
 $B = \{2x - 7 \mid x - \text{непарне}\}$, $C = \{x \mid x^2 + 1 - \text{просте число}\}$. Вказати перелік
 елементів множини $D = B \Delta (\bar{A} \cup C)$.
5. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини:
 а) $\overline{A \Delta \bar{C}} \setminus (B \cup A)$.
 б) $(\bar{A} \cap B) \cup (B \Delta C)$.
6. Довести, що для довільних множин A , B та C справджуються рівності:
 а) $\bar{C} \Delta ((A \cup \bar{B}) \cap \bar{C}) = B \setminus (A \cup C)$.
 б) $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.
7. Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина
 правильних багатокутників, D — множина багатокутників, які мають
 принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх багатокутників.
 Вказати множини:
 а) $((D \cap A) \setminus (C \cap B)) \Delta (A \cap E)$.
 б) $\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B$.
8. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L —
 множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних багатокутників площини.
 Вказати множини:
 а) $(L \setminus S) \cap (R \setminus \bar{P})$.
 б) $(P \setminus S) \cup (R \setminus \bar{L})$.
9. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
 а) $\bar{A} \setminus B = A \cup \bar{A} \cap B$;
 б) $(B \setminus A) \cup \bar{A} = \overline{C \setminus \bar{A}} \setminus A$.
10. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
 а) $\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A) = \overline{A \setminus B}$;

$$\text{б) } (A \Delta (A \cap \bar{B})) \cap (\bar{B} \Delta \bar{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

Потужність множини

- Нехай $U = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, $A_1 = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$, $A_2 = \{x \mid x^2 : 12\}$. Знайти:
 - $|\mathcal{B}(A_1)|$;
 - $|\mathcal{B}(A_1 \cap \bar{A}_2)|$.
- Нехай $U = \{3, 4, \dots, 15\}$, $A_1 = \{5, 7, 9, 11, 12, 14\}$, $A_2 = \{x \mid (x^2 - x) : 6\}$. Знайти кількість власних підмножин множини C , якщо:
 - $C = A_1 \cap A_2$;
 - $C = A_1 \Delta A_2$.
- У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які:
 - не отримали жодної п'ятірки;
 - отримали рівно одну п'ятірку.
- Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.
- Нехай $|U| = 50$, $|A| = 20$, $|\overline{A \cup B}| = 15$, $|A \cap B| = 10$. Знайти:
 - $|B \setminus A|$;
 - $|A \cup \bar{B}|$.
- Нехай $|U| = 60$, $|A| = 25$, $|\overline{A \cap B}| = 45$, $|B \setminus A| = 18$. Знайти:
 - $|A \cup B|$;
 - $|B \Delta \bar{A}|$.

Метод математичної індукції

- Довести тотожності:
 - $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$;

$$\text{б) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

2. Довести, що для довільного натурального n число $n^3 - 7n$ ділиться на 4.
3. Довести, що для довільного натурального n число $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7.
4. Довести, число $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ націло ділиться на 19 для всіх $n \in \mathbb{N}$.
5. Довести, що число $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7 ($n > 1$).
6. Довести, що

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$$

7. Довести, що

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. Довести, що

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

9. Довести, що

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

10. Знайти суму

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

11. Довести, що n не паралельних прямих, жодні три з яких не проходять через одну точку, ділять площину на $(n^2 + n) / 2 + 1$ частин.
12. На скільки частин розбивають площину n кіл, жодні три з яких не перетинаються у одній точці.
13. Довести, що довільного натурального $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

14. Довести, що для довільного натурального n

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартів добуток множин

Декартовим добутком множин A та B називається множина $A \times B$ усіх упорядкованих пар, перша координата (компонента) яких належить множині A , а друга — множині B . Тобто, $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. При цьому порядок множників є суттєвим.

Приклад 2.1. Знайти $A \times B$, якщо $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язок. $A \times B = \{(1, x), (1, y), (3, x), (3, y), (8, x), (8, y)\}$.

Поняття декартового добутку поширюється на довільну скінченну кількість множників:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Елементи декартового добутку n множин називаються *кортежами* довжини n (впорядкованими n -ками).

Приклад 2.2. Знайти $B \times A \times B$, якщо $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язок. Знайдемо спочатку $B \times A$.

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 3), (x, 8), (y, 1), (y, 3), (y, 8)\}.$$

Тоді

$$B \times A \times B = \{(x, 1, x), (x, 1, y), (x, 3, x), (x, 3, y), (x, 8, x), (x, 8, y), \\ (y, 1, x), (y, 1, y), (y, 3, x), (y, 3, y), (y, 8, x), (y, 8, y)\}.$$

Властивості декартового добутку множин:

- 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- 3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
- 4) якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$;
- 5) якщо $A \neq B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, то $A \times B \neq B \times A$;
- 6) якщо множини A та B — скінченні, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ — *комбінаторне правило множення*.
- 7) якщо множини A та B — злічені, то множина $A \times B$ також є зліченною.

2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень

Бінарним відношенням, визначеним на множинах A та B , називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні R позначається як aRb або $(a,b) \in R$. Якщо відповідні елементи не перебувають у відношенні R , то це записується як $a\bar{R}b$ або $(a,b) \notin R$.

Множини A та B називаються *базисними множинами* бінарного відношення. Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Приклад 2.3. Розглянемо R — бінарне відношення подільності, визначене на множинах $A = \{3,5,6\}$ та $B = \{1,2,4\}$. Вважаємо, що

xRy тоді і тільки тоді, коли x націло ділиться на y .

Тоді $R = \{(3,1), (5,1), (6,1), (6,2)\}$. Так як $A \neq B$, то відношення R — неоднорідне.

Приклад 2.4. Однорідним є бінарне відношення R «навчатися у одній групі», визначене на множині студентів УжНУ.

xRy тоді і тільки тоді, коли студенти x та y — одногрупники.

n -арним відношенням, визначеним на множинах A_1, \dots, A_n , називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Якщо $n = 1$, то маємо *унарне* відношення, якщо $n = 2$ — бінарне відношення, якщо $n = 3$ — *тернарне* відношення.

Приклад 2.5. Підприємства, які займаються дизайном інтер'єру приміщень, використовують продукцію кількох фірм. Для аналізу необхідно скласти «відношення» реальних комбінацій трьох параметрів: назви фірми, місця її знаходження (місто), виду продукції, що пропонується.

Нехай відомо, що АП «Orion» (Одеса) продає меблі, ТОВ «День» (Харків) продає світильники, ПП «Sit» (Одеса) торгує меблями та світильниками, ТОВ «House» (Харків) продає світильники та матеріали.

В цьому відношенні беруть участь три множини:

Фірми = {АП «Orion», ТОВ «День», ПП «Sit», ТОВ «House»}.

Міста = {Одеса, Харків}.

Продукція = {меблі, світильники, матеріали}.

Це тернарне відношення можна формально зобразити списком елементів:

{(АП «Orion», Одеса, меблі), (ТОВ «День», Харків, світильники),

(ПП «Sit», Одеса, меблі), (ПП «Sit», Одеса, світильники),

(ТОВ «House» Харків, світильники), (ТОВ «House», Харків, матеріали)}.

Оскільки n -арні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *діаграм (графів) відношень*.

При матричному способі задання відношення елементам множини A ставляться у відповідність рядки матриці відношення $M(R)$, елементам множини B — стовпці. Якщо пара (a, b) перебуває у відношенні R , то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин A та B ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a, b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a , з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b .

Приклад 2.6. Відношення $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\}$ визначене на множинах $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Задати його за допомогою матриці та діаграми.

Розв'язок. Матриця відношення R має вигляд

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Діаграму відношення наведено на рис. 2.1.

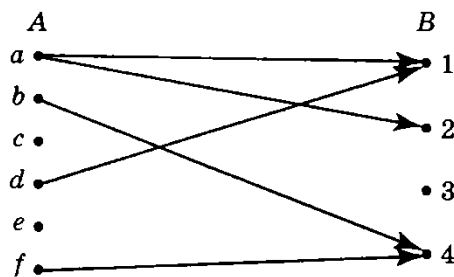


Рис. 2.1. Граф відношення R

Множини $\text{pr}_1 R = \{x \mid (x, y) \in R\}$ та $\text{pr}_2 R = \{y \mid (x, y) \in R\}$ відповідно називаються *першою* та *другою проекціями* відношення R .

Для відношення R із попереднього прикладу $\text{pr}_1 R = \{a, b, d, f\}$, $\text{pr}_2 R = \{1, 2, 4\}$.

Множина $R[C] = \{y \mid (c, y) \in R, c \in C\}$ називається *перерізом* бінарного відношення R за підмножиною C першої базисної множини A .

Для відношення R із попереднього прикладу $R[\{a, d\}] = \{1, 2\}$.

Переріз $R[\{a\}]$ називається *перерізом бінарного відношення за елементом* a . Для одноелементних перерізів використовують позначення $R[a]$.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[b] = \{4\}$, $R[c] = \emptyset$.

Множина усіх одноелементних перерізів бінарного відношення R , визначеного на множинах A та B , називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B/R . Тобто, $B/R = \{R[x] \mid x \in A\}$.

Наприклад, для відношення R із діаграмою, наведеною на рис. 2.1,

$$R[a] = \{1, 2\}, R[b] = R[f] = \{4\}, R[c] = R[e] = \emptyset, R[d] = \{1\}.$$

Тому $B/R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}, \emptyset\}$.

У випадку однорідних бінарних відношень на діаграмі відношення зображується лише одна множина точок, як це показано на рис. 2.2.

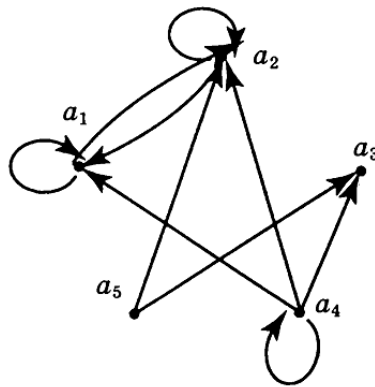


Рис. 2.2. Приклад діаграми однорідного відношення

Діаграмі, зображеній на рис. 2.2, відповідає однорідне бінарне відношення $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$, визначене на множині $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, вводяться операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$, визначене на множинах B та A , називається *оберненим* до відношення $R \subseteq A \times B$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.1, $R^{-1} = \{(1, a), (2, a), (4, b), (1, d), (4, f)\}$, а для бінарного відношення " $<$ ", визначеного на довільній числовій множині, оберненим буде відношення " $>$ ".

Бінарне відношення

$$S \circ R = \{(x, z) | \text{існує таке } y \in B, \text{ що } (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subseteq A \times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Приклад 2.7. Знайти добуток бінарних відношень R та S , діаграми яких зображені на рис. 2.3.

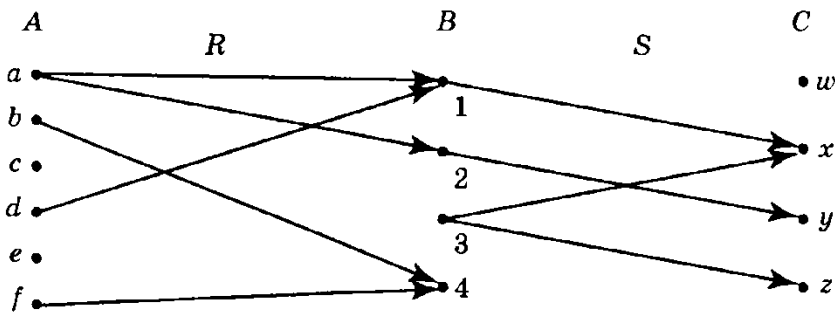


Рис. 2.3. Діаграми відношень R та S

Розв'язок. $S \circ R = \{(a, x), (a, y), (d, x)\}$.

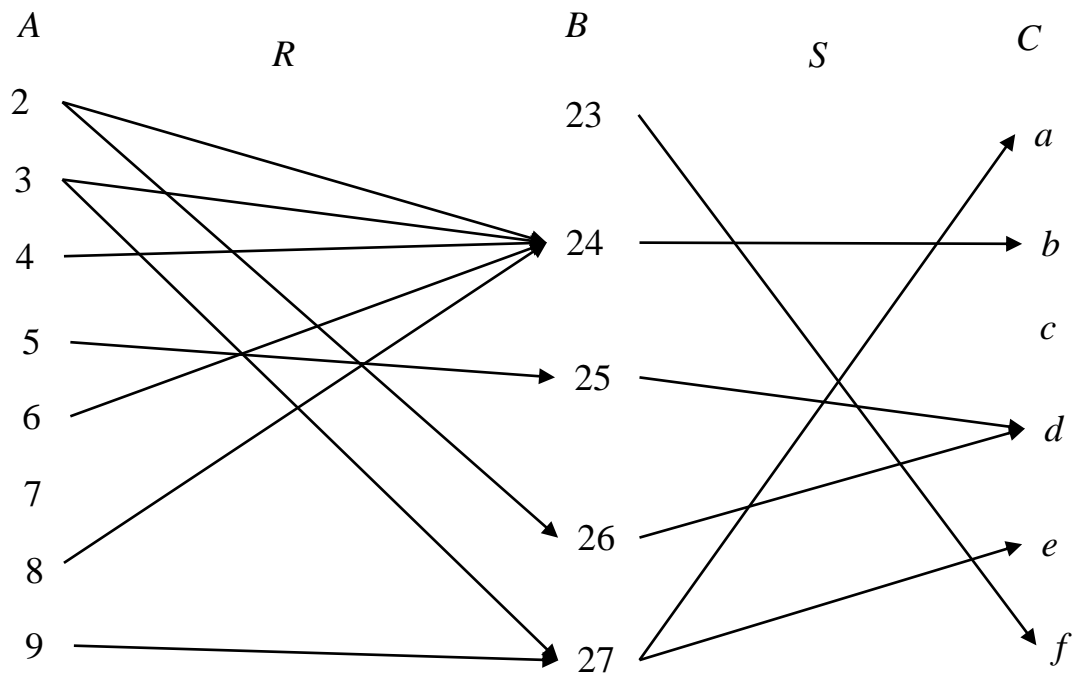
Приклад 2.8. Нехай $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{23, 24, 25, 26, 27\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, бінарне відношення R визначене на множинах A та B наступним чином: xRy тоді і тільки тоді, коли y націло ділиться на x , S — бінарне відношення між елементами множин B та C : $S = \{(23, f), (24, b), (25, d), (26, d), (27, a), (27, e)\}$. Знайти проєкції відношення $T = S \circ R$ та вказати $T^{-1}[\{a, c, d, f\}]$.

Розв'язок. Задамо бінарне відношення R переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:

$$R = \{(2, 24), (2, 26), (3, 24), (3, 27), (4, 24), (5, 25), (6, 24), (8, 24), (9, 27)\}.$$

Тоді з використанням рис. 2.4 отримаємо

$$T = \{(2, b), (2, d), (3, a), (3, b), (3, e), (4, b), (5, d), (6, b), (8, b), (9, a), (9, e)\}.$$

Рис. 2.4. Діаграма відношень R та S .

Тому $\text{pr}_1 T = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $\text{pr}_2 T = \{a, b, d, e\}$.

Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1} :

$$T^{-1} = \{(b, 2), (d, 2), (a, 3), (b, 3), (e, 3), (b, 4), (d, 5), (b, 6), (b, 8), (a, 9), (e, 9)\}.$$

Тоді $T^{-1}[\{a, c, d, f\}] = \{2, 3, 5, 9\}$.

2.4. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення*.

Бінарне відношення $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині A (відношенням *тотожності*, *діагоналлю* множини A).

Бінарне відношення R називається *рефлексивним* на множині A , якщо для кожного $x \in A$ має місце xRx , тобто кожний елемент множини A перебуває у відношенні R сам із собою.

Наприклад, відношення "=", " \leq " рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a \in \mathbb{R}$ $a = a$, $a \leq a$, відношення \parallel (паралельність прямих) є рефлексивним на множині усіх прямих площини, а відношення " \neq ", " $<$ " та \perp не є рефлексивними на тих самих множинах.

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з'єднана «петлею» із самою собою. Наприклад, відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.5, є рефлексивним, а бінарне відношення на рис. 2.2 не є рефлексивним.

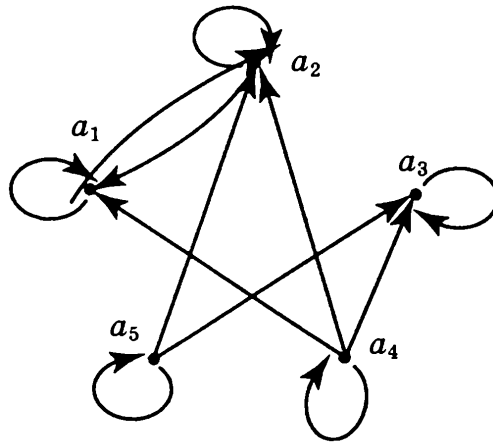


Рис. 2.5. Рефлексивне бінарне відношення

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.2 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

Критерієм (необхідною і достатньою умовою) рефлексивності є умова $I_A \subseteq R$.

Бінарне відношення R називається *іррефлексивним* (антирефлексивним) на множині A , якщо для жодного $x \in A$ не має місце $x R x$.

Наприклад, відношення " \neq ", " $<$ " та " \perp " — іррефлексивні.

Критерієм іррефлексивності є умова $I_A \cap R = \emptyset$.

Бінарне відношення R називається *симетричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x R y$ випливає, що $y R x$.

Наприклад, відношення рівності та подібності на множині трикутників площини, відношення «навчатися у одній групі» — симетричні.

Відношення " \leq " не є симетричним, оскільки якщо $a \leq b$ і $a \neq b$, то нерівність $b \leq a$ не виконується.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.6, є симетричним, а відношення на рис. 2.5 не є симетричним.

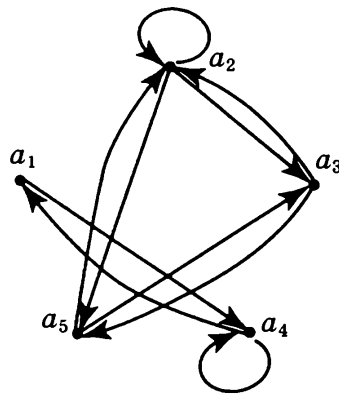


Рис. 2.6. Діаграма симетричного бінарного відношення

Критерієм симетричності є виконання рівності $R^{-1} = R$.

Бінарне відношення R називається *асиметричним* на множині A , якщо для довільних (необов'язково різних) $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що не виконується yRx ($xRy \Rightarrow y\bar{R}x$).

Приклад асиметричного відношення — відношення " $>$ " на множині дійсних чисел.

Умова $R \cap R^{-1} = \emptyset$ може використовуватися у якості *критерію асиметричності*.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \neq y$ та xRy випливає, що не виконується yRx (з xRy та yRx випливає, що $x = y$).

Кожне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним, але не навпаки. Наприклад, відношення " \geq " є антисиметричним, але воно не є асиметричним (умова асиметричності порушується для пар однакових елементів).

Умова $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ може використовуватися у якості *критерію антисиметричності*.

Бінарне відношення R називається *транзитивним* на множині A , якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRy та yRz випливає, що xRz .

Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості *критерію транзитивності*.

Приклад 2.9. Відношення " $=$ ", " $>$ ", " $<$ ", " \geq ", " \leq " є транзитивними, а відношення \perp не є транзитивним.

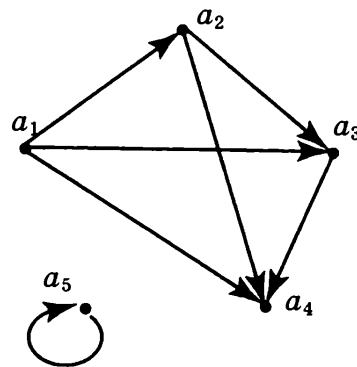


Рис. 2.7. Діаграма транзитивного відношення

Бінарне відношення R називається *лінійним* на множині A , якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A, b \in A$ виконується хоча б одна з умов aRb, bRa .

Наприклад, відношення " \leq " є лінійним, а відношення " \subseteq " — ні, оскільки $\{1, 2\} \not\subseteq \{3\}, \{3\} \not\subseteq \{1, 2\}$.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P .

Наприклад, якщо R — однорідне бінарне відношення на множині A , то його рефлексивне, симетричне та транзитивне замикання $[R]_{\text{ref}}$, $[R]_{\text{sym}}$ та $[R]_{\text{trans}}$ можуть бути знайдені за формулами:

- $[R]_{\text{ref}} = R \cup I_A$;
- $[R]_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- $[R]_{\text{trans}} = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$

Приклад 2.10. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 1\}$, заданого на множині дійсних чисел \mathbb{R} .

Розв'язок. Оскільки $|x - x| = 0 < 1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є іррефлексивним.

Оскільки $|x - y| = |y - x|$, то з того, що $|x - y| \leq 1$ випливає, що $|y - x| \leq 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1, 0)$).

Оскільки $(0, 1) \in R$ та $(1, 2) \in R$, але $(0, 2) \notin R$, то відношення R не є транзитивним.

Оскільки $(0, 2) \notin R$, $(2, 0) \notin R$, то відношення не є лінійним.

Приклад 2.11. Задати за допомогою матриці яке-небудь мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке не є іррефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R \cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $S = R \cup R^2$.

Розв'язок. Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A , яка задовольняє умови $(x, y) \in R$ та $(y, x) \notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів $(x, y) \in R$ та $(y, z) \in R$, такі, що $(x, z) \notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R' = \{(a, b), (b, c)\}$. Але відношення R' є іррефлексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару,

яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a, a) . Отримуємо $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$. Діаграма відношення R наведена на рис. 2.8.

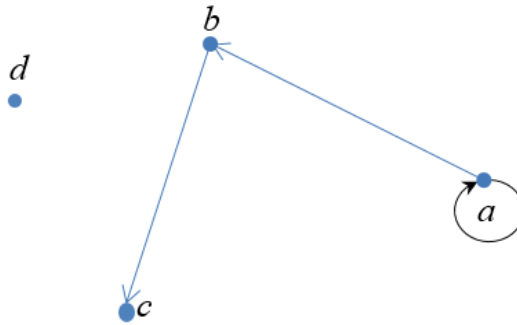


Рис. 2.8. Діаграма відношення R

Відношення R є шуканим і має наступну матрицю:

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$. Тому $R \cap R^2 = \{(a, a), (a, b)\}$. З останньої рівності випливає, що $\text{pr}_1(R \cap R^2) = \{a\}$, $\text{pr}_2(R \cap R^2) = \{a, b\}$.

$$S = R \cup R^2 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}.$$

Отже, $S[a] = \{a, b, c\}$, $S[b] = \{c\}$, $S[c] = S[d] = S[e] = \emptyset$.

Тому $A/S = \{\{a, b, c\}, \{c\}, \emptyset\}$.

Приклад 2.12. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (4, 6)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання S . Вказати матрицю відношення S та знайти $S[\{1, 2, 5\}]$.

Розв'язок. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини A перебуває у відношенні R з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні S з самим собою (наприклад, з того, що $(3, 1) \in R$ та симетричності S випливає, що $(1, 3) \in S$. Тоді з транзитивності S отримуємо, що $(1, 1) \in S$ та $(3, 3) \in S$). Тому пари $(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6)$ обо-

в'язково потрібно включити у відношення S . Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2), (1,3), (2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу S . Отже остаточно маємо

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$. Легко переконатися, що S — симетричне та $S^2 = S$. Отже, відношення S — транзитивне. Тоді

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та $S[\{1,2,5\}] = \{1,2,3\}$.

2.5. Відношення еквівалентності

Однорідне бінарне відношення E називається відношенням *еквівалентності* на множині A , якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Якщо E — відношення еквівалентності, $a \in A, b \in A$ і aEb , то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення «народитися у один день» тощо.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності E для елемента $a \in A$ називається множина усіх елементів множини A , які еквівалентні елементу a . Клас еквівалентності, який відповідає елементу a , співпадає із перерізом $E[a]$.

Теорема 2.1. Два класи еквівалентності множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються.

Доведення. Нехай $a, b \in A$. Припустимо, що $E[a] \cap E[b] \neq \emptyset$. Покажемо, що тоді $E[a] = E[b]$.

Доведемо спочатку, що $E[a] \subseteq E[b]$. Нехай x — довільний елемент множини $E[a]$. Тоді $(a, x) \in E$. Нехай $c \in E[a] \cap E[b]$. Тоді $(a, c) \in E$ та $(b, c) \in E$. З симетричності відношення E випливає, що $(c, a) \in E$. Тоді із того, що $(b, c) \in E$, $(c, a) \in E$ та транзитивності відношення E отримуємо, що $(b, a) \in E$ та $(b, x) \in E$. Тому $x \in E[b]$. Отже, $E[a] \subseteq E[b]$.

Обернене включення доводиться аналогічно. Отже, якщо два класи еквівалентності мають спільні елементи, то вони співпадають. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ — деяка система підмножин множини A , де I — множина індексів.

Система \mathcal{C} називається *покриттям множини A* , якщо для довільного $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система \mathcal{C} називається *розбиттям множини A* , якщо вона є покриттям множини A і крім того множини C_i та C_j не перетинаються для довільних відмінних між собою $i \in I, j \in I$, тобто $C_i \cap C_j = \emptyset$ у випадку $i \neq j$.

Приклад 2.13. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тоді

1) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 5\}\}$ не є покриттям множини A , оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до \mathcal{C} .

2) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 5\}\}$ є покриттям множини A , але не є її розбиттям, оскільки $\{1, 3\} \cap \{1, 2, 5\} \neq \emptyset$.

3) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ є розбиттям множини A .

Теорема 2.2. Якщо E — відношення еквівалентності на множині A , то множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям множини A . І навпаки, для довільного розбиття \mathcal{C} множини A можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з \mathcal{C} .

Наслідок. Якщо однорідне бінарне відношення E є рефлексивним на множині A і одноелементні перерізи множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються, то E — відношення еквівалентності.

На рис. 2.9 наведена діаграма відношення еквівалентності

$$E = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\},$$

визначеного на множині $A = \{a, b, c, d\}$.

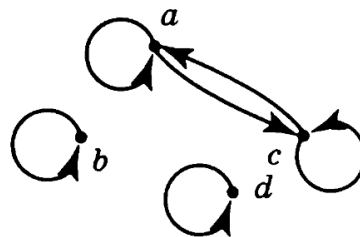


Рис. 2.9. Приклад відношення еквівалентності

З діаграми добре видно, що класами еквівалентності є множини $\{a, c\}$, $\{b\}$ та $\{d\}$, які породжують розбиття множини A .

Приклад 2.14. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

- а) перпендикулярність площин у просторі;
- б) відношення «бути однакового зросту» на множині людей;
- в) відношення R : «знаходитися один від одного на відстані не більшій за 100» на площині;
- г) відношення «бути родичем» на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв'язок.

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення «бути однакового зросту» на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним. Симетричність також виконується по тій самій причині. Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k , є множина усіх людей, зріст яких рівний k см.

в) Відношення R не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 150 (див. рис. 2.10).

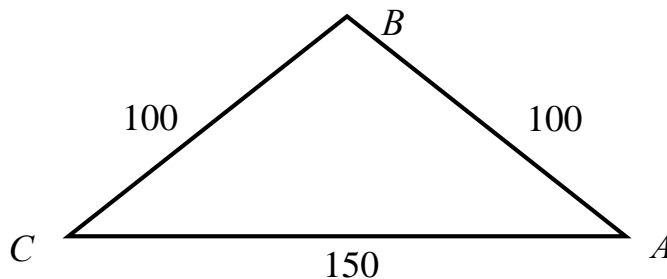


Рис. 2.10. Рівнобедрений трикутник

Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє. Тобто, $(A, B) \in R$, $(B, C) \in R$, але $(A, C) \notin R$.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності. Рефлексивність та симетричність впливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи A та B є родичами і нехай B та C також є родичами, причому A предок B по батьківській лінії, а C — предок B по материнській лінії. Тоді жоден із A та C не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад 2.15. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$ бінарне відношення $R = \{(u, x), (u, u), (y, z), (w, w), (y, y), (z, y), (z, z), (z, w), (y, w), (x, u), (w, y), (w, z), (x, x), (v, v), (t, t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину A/R .

Розв'язок.

Перший спосіб. Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення:

$R^{-1} = \{(x, u), (u, u), (z, y), (w, w), (y, y), (y, z), (z, z), (w, z), (w, y), (u, x), (y, w), (z, w), (x, x), (v, v), (t, t)\}$. Легко переконатися, що $R^{-1} = R$, а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R :

$R^2 = \{(x, x), (x, u), (y, y), (y, z), (y, w), (z, y), (z, z), (z, w), (t, t), (u, x), (u, u), (v, v), (w, y), (w, z), (w, w)\}$. Легко перевірити, що $R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним. Отже, відношення R є відношенням еквівалентності.

Другий спосіб. Скористаємося наслідком до теореми 2.2. Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи множини A за відношенням відношення R .

$R[x] = \{x, u\}$, $R[y] = \{y, z, w\}$, $R[z] = \{y, z, w\}$, $R[t] = \{t\}$, $R[u] = \{x, u\}$, $R[v] = \{v\}$, $R[w] = \{y, z, w\}$.

Оскільки, для довільного $a \in A$ виконується умова $a \in R[a]$, то R — рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення R є відношенням еквівалентності.

Тоді $A/R = \{\{x, u\}, \{y, z, w\}, \{t\}, \{v\}\}$ — фактор-множина множини A за відношенням R .

2.6. Відношення порядку

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку* (порядком) на множині A , якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A, R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A, R) і виконується умова aRb , то кажуть, що елемент a *передуює* елементу b (b слідує за a).

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення " \leq " на множині дійсних чисел.

Іррефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення " \subset " (відношення строгого включення множин).

Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Якщо R — відношення строгого порядку на множині A , то відношення $R' = R \cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R .

Наприклад, відношення " \leq " є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку " $<$ ".

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням *лінійного порядку*. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення " $>$ " на числовій множині.

Нехай a та b — різні елементи впорядкованої множини (A, R) . Елемент a називається *безпосереднім попередником* елемента b , якщо елемент a передуює елементу b і не існує жодного елемента c такого, що a передуює c і c передуює b .

Аналогічно дається означення *безпосереднього наступника*.

Приклад 2.16. Розглянемо відношення включення, визначене на множині підмножин множини $\{1, 2, 3, 4\}$. Тоді множини $\{1\}$ та $\{2\}$ є безпосередніми попередниками множини $\{1, 2\}$, а множина $\{3\}$ не є безпосереднім попередником множини $\{1, 2, 3\}$, оскільки $\{3\} \subseteq \{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

Приклад 2.17. Елемент 1 є безпосереднім наступником елемента 0 множини цілих чисел \mathbb{Z} , впорядкованої відношенням " \leq ". Якщо розглядати це саме відношення на множині \mathbb{Q} , то у елемента 0 немає безпосереднього наступника, оскільки для довільного додатного $a \in \mathbb{Q}$ виконується умова $0 < a/2 < a$.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою *діаграм Хассе*. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його безпосередніми попередниками і розташовується на діаграмі вище за них.

На рис. 2.11 зображено діаграму Хассе для відношення подільності:

xRy тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y ,

визначеного на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

Елемент a називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A, R) , якщо йому не передують жодний інший елемент множини (A, R) .

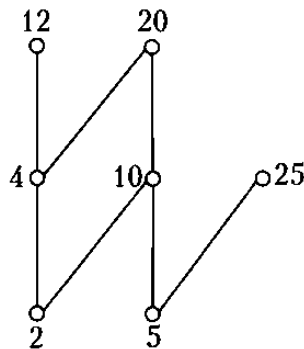


Рис. 2.11. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$

Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 2.11 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A, R) , якщо для довільного іншого елемента $b \in A$ $(a, b) \in R$. Тобто, найменший елемент впорядкованої множини передуює усім іншим елементам.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають *екстремальними елементами* впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 2.12, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A , C та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передуює двом іншим).

Теорема 2.3. Якщо впорядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то він є єдиним її максимальним (мінімальним) елементом.

Теорема 2.4. Кожна непорожня скінченна впорядкована множина містить хоча би один мінімальний та хоча би один максимальний елементи.

Теорема 2.5. Якщо у скінченній впорядкованій множині є єдиний максимальний (мінімальний) елемент, то він є її найбільшим (найменшим) елементом.

Елемент a впорядкованої множини (A, R) називається *нижньою гранню множини* $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова $a R b$.

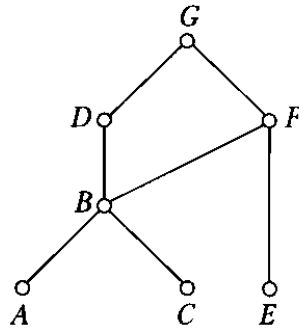


Рис. 2.12. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.12, $\sup\{D, E\} = G$, $\inf\{D, F\} = B$, а $\inf\{B, E\}$ не існує.

Частково впорядкована множина (A, R) називається *ґраткою*, якщо для довільних $a \in A, b \in A$ існують $\inf\{a, b\}$ та $\sup\{a, b\}$.

Наприклад, множина усіх підмножин деякої універсальної множини разом із заданим на ній відношенням включення множин є ґраткою. Для довільних двох множин A та B $\inf\{A, B\} = A \cap B$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$.

Приклад 2.18. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = \{(b, d), (a, e), (a, b), (a, d), (c, d), (b, e), (a, c)\} \cup I_A$$

відношенням часткового порядку на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A, R) , відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A, R) ґраткою. Знайти $\inf\{b, c\}$ та $\sup\{b, c\}$.

Розв'язок. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене до нього відношення:

$$R^{-1} = \{(d, b), (e, a), (b, a), (d, a), (d, c), (e, b), (c, a)\} \cup I_A.$$

Тоді $R^{-1} \cap R = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,b), (b,d), (b,e), (c,c), (c,d), (d,d), (e,e)\}.$$

$R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Діаграма Хассе впорядкованої множини (A, R) наведена рис. 2.13.

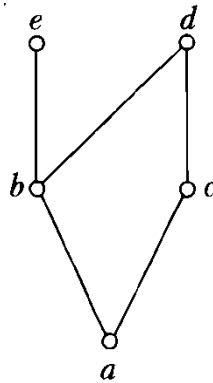


Рис. 2.13. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A, R) , а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A, R) , а найбільший елемент не існує.

Оскільки $\sup\{e, d\}$ не існує, то впорядкована множина (A, R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b, c\} = a$, $\sup\{b, c\} = d$.

2.7. Функціональні відношення

2.7.1. Основні означення

Бінарне відношення f , визначене на множинах A та B , називається *функціональним*, якщо для довільного $x \in A$ існує не більше ніж один $y \in B$, такий що $(x, y) \in f$.

З означення функціонального відношення випливає, що для довільного $x \in A$ $|f[x]| \leq 1$. Якщо базисні множини функціонального відношення скінченні, то кожний рядок матриці $M(f)$ містить не більше однієї одиниці та з кожної вершини на діаграмі відношення виходить не більше однієї дуги.

Приклад 2.19. Відношення, діаграми яких зображені на рис. 2.14 а)-в), — функціональні, а відношення на рис. 2.14 г) не є функціональним.

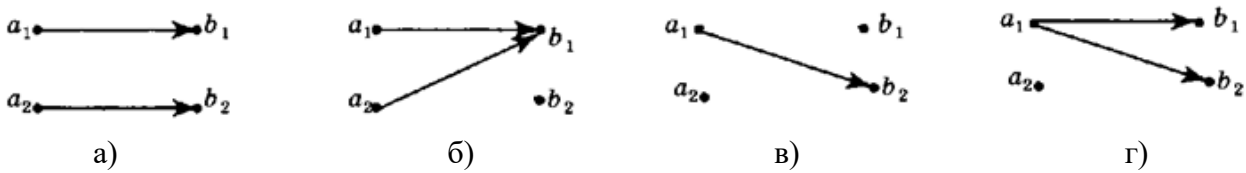


Рис. 2.14. Приклади функціональних та нефункціональних відношень

Функціональне відношення f , визначене на множинах A та B , називається *функцією* (відображенням) із A у B і позначається у вигляді

$$f : A \rightarrow B \text{ або } A \xrightarrow{f} B.$$

Якщо $f : A \rightarrow B$, то той факт, що $(x, y) \in f$, записують у вигляді $y = f(x)$.

Нехай f — функціональне відношення на множинах A та B . Тоді множина $\text{Dom } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_1 f$ називається *областю визначення* відношення f (часто також використовуються позначення D_f), а множина $\text{Im } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_2 f$ — *областю значень* відношення f (також позначається як E_f).

Так, наприклад, для функції з рис. 2.14 б) $\text{Dom } f = \{a_1, a_2\}$, $\text{Im } f = \{b_1\}$, а для функції рис. 2.14 в) $\text{Dom } f = \{a_1\}$, $\text{Im } f = \{b_2\}$.

Теорема 2.6. Нехай $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Тоді $g \circ f$ — функція із A у C , причому $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.7.2. Види функцій

Функція $f : A \rightarrow B$ називається *цілком визначеною* (тотальною), якщо $\text{Dom } f = A$. У протилежному випадку функція називається *частковою*.

Функція $f : A \rightarrow B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\text{Im } f = B$.

Приклад діаграми часткового сюр'єктивного відображення між елементами множин $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та $B = \{y_1, y_2\}$ наведено на рис. 2.15.

На діаграмі сюр'єктивної функції у кожному вершину, яка відповідає елементам множини B , заходить принаймні одна дуга.

Функція $f : A \rightarrow B$ називається *ін'єктивною*, якщо з того що $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. На діаграмі, яка відповідає ін'єктивній функції, у кожному вершину входить не більше однієї дуги (див. рис. 2.16).

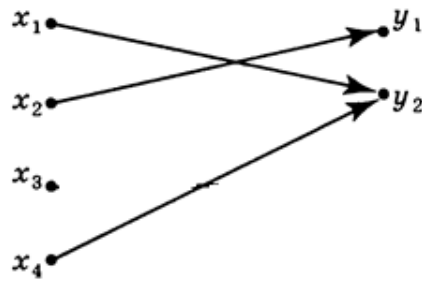


Рис. 2.15. Приклад сюр'єктивного відображення

Цілком визначена функція називається *бієктивною* (взаємно однозначною або бієкцією), якщо вона є сюр'єктивною та ін'єктивною одночасно. Приклад бієктивного відображення наведено на рис. 2.17.

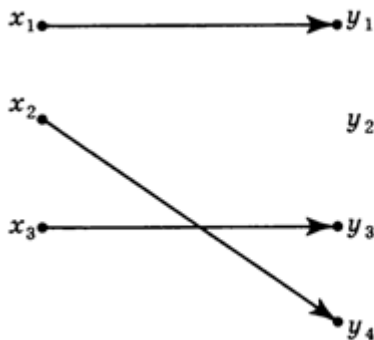


Рис. 2.16. Приклад ін'єктивної функції

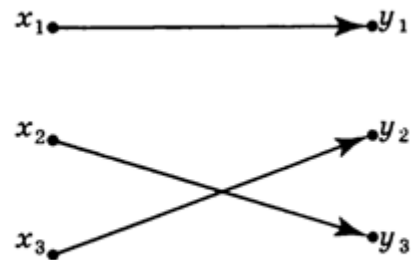


Рис. 2.17. Приклад бієктивної функції

Бієктивна функція $f : A \rightarrow B$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин A та B .

Теорема 2.7. Функція $f : A \rightarrow B$ є бієкцією тоді і тільки тоді, коли відношення f^{-1} є цілком визначеною функцією. Якщо f — бієкція, то f^{-1} — також бієкція, причому для довільних $x \in A$, $y \in B$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Приклад 2.20. Перевірити властивості та вказати обернені функції до функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо:

- $f(x) = 3x + 6$;
- $f(x) = x^2 - 4$.
- $f(x) = x^3 - 1$.

Розв'язок. а) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $f(x)$ — лінійна функція і коефіцієнт біля невідомої x відмінний від 0, то $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $f(x)$ є сюр'єктивною. Оскільки $f(x)$ — зростаюча лінійна функція, то при $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тому f — ін'єктивна функція. З сюр'єктивності та ін'єктивності функції f випливає її бієктивність. Знайдемо обернену функцію. Виразимо x з рівності $y = 3x + 6$. Отримаємо $x = (y - 6) / 3$. Отже, $f^{-1}(y) = (y - 6) / 3$.

б) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $x^2 \geq 0$, то $\text{Im } f = [-4, +\infty)$. З того, що $\text{Im } f \neq \mathbb{R}$ випливає, що $f(x)$ не є сюр'єктивною. Функція f не є ін'єктивною, оскільки вона парна. Функція f не є бієктивною. Тому вона не має оберненої функції.

в) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $f(x)$ — зростаюча кубічна функція, то $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $f(x)$ є сюр'єктивною. Оскільки $f(x)$ — зростаюча функція, то при $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тому f — ін'єктивна функція. З сюр'єктивності та ін'єктивності функції f випливає її бієктивність. Знайдемо обернену функцію. З рівності $y = x^3 - 1$ випливає, що $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y + 1}$.

2.8. Задачі до другого розділу

Операції над відношеннями

- Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(k, 1), (n, 2), (n, 1), (l, 5), (l, 8), (m, 2), (m, 8), (k, 7)\}$, $S = \{(2, b), (7, c), (8, b), (5, e)\}$, $T = S \circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $(A \setminus T^{-1}[\{c, e\}]) \times (C \setminus \text{pr}_2 T)$.
- Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x, y, z, t, u, v\}$,

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \{(1, u), (2, x), (2, z), (2, t), (4, x), (4, v)\}, T = S \circ R.$$

Задати відношення T за допомогою графу і знайти $(C \setminus T[\{l, n\}]) \times (A \setminus \text{pr}_2 T^{-1})$.

3. Нехай R — бінарне відношення " $<$ ", визначене на множині \mathbb{N} . Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
4. Нехай R — бінарне відношення подільності на множині \mathbb{Z} . Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
6. Навести приклад бінарного такого відношення R , що $R^2 \neq \emptyset$, $R^2 \cap R = \emptyset$.

Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$, заданого на множині \mathbb{R} . Вказати $R[\{-1, 2, 5\}]$.
2. Встановити властивості бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, заданого на множині \mathbb{R} .
3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є іррефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проєкції відношення $R \setminus R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проєкції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
5. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, побудувати його замикання, яке є симетричним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1, 4\}]$.
6. Для однорідного відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (e, d), (c, b)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S[\{b, d, f\}]$.
7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$, визначеного на множині $\{a, b, c, d\}$.

Відношення еквівалентності

1. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

- а) $\{\{1,2,4,8\},\{5\},\{3,7\}\}$;
- б) $\{\{1,2,6\},\{4,5\},\{2,3,7\},\{4,8\}\}$;
- в) $\{\{1,2,6\},\{4,7\},\{3,5,8\}\}$.
2. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$:
- а) $\{\{b,e,g\},\{a,d\},\{b,c,h\}\}$;
- б) $\{\{d,e\},\{b,c,g\},\{d,h\},\{a,b,f\}\}$;
- в) $\{\{c,e,h\},\{a,b,f\},\{d,g\}\}$.
3. Задати за допомогою матриці та діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
4. Задати за допомогою матриці та діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).
5. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
- а) паралельність площин у просторі;
- б) відношення знайомства на множині людей;
- в) відношення «одногрупник»;
- г) відношення рівнопотужності.
6. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
- а) перпендикулярність прямих на площині;
- б) відношення «мати однаковий вік» на множині людей;
- в) відношення «знаходитися у одній чверті» на множині точок координатної площини;
- г) відношення «бути родичем» на множині людей.
7. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$ бінарне відношення $R = \{(t, v), (w, x), (w, z), (u, y), (x, z), (w, w), (x, x), (z, x), (v, v), (z, z), (z, w), (x, w), (y, u), (y, y), (u, u), (t, t), (v, t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R .
8. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ відношення $R = \{(b, f), (a, g), (b, b), (f, c), (d, d), (b, c), (g, a), (c, c), (g, g), (c, f), (f, f), (c, b), (e, e), (a, a), (f, b)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R .
9. Вказати визначене на множині $[0,1]$ бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 5 класів еквівалентності.

10. Вказати визначене на множині \mathbb{Z} бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 13 класів еквівалентності.
11. Для бінарного відношення $R = \{(1,2), (3,2), (2,4), (2,7), (4,9), (10,5), (3,3)\}$, визначеного на множині $A = \{1,2,\dots,10\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$.
12. Для бінарного відношення $R = \{(b,a), (c,b), (f,b), (b,g), (d,k), (h,f), (i,j)\}$, визначеного на множині $A = \{a,b,\dots,k\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів відношення еквівалентності S на множині A , яке задовольняє умову $R \subseteq S$.

Відношення порядку

- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - відношення знайомства на множині людей;
 - відношення «бути старшим»;
 - відношення «бути сином»;
 - відношення «бути предком».
- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - відношення «бути нащадком»;
 - відношення «бути молодшим»;
 - відношення «знаходитися на більшій відстані від початку координат» на множині точок площини;
 - відношення «бути родичем» на множині людей.
- Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку R , якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 2.18. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини $\{A, C, E\}$. Знайти $\sup\{C, E\}$, $\inf\{D, E\}$ та $\inf\{D, C\}$. Чи буде впорядкована множина ґраткою?

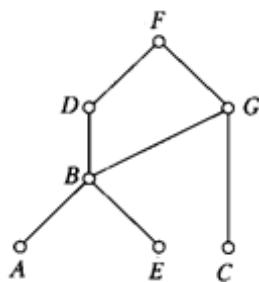


Рис. 2.18

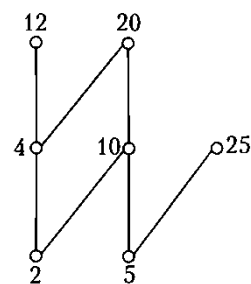


Рис. 2.19

4. Знайти $|R|$, де R — відношення часткового порядку на множині $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2.19. Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, R) . Знайти $\sup\{10, 12\}$ та $\inf\{10, 12\}$.
5. На рис 2.20 наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

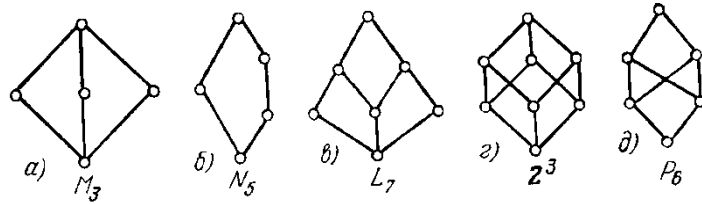


Рис. 2.20.

6. На рис 2.21. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

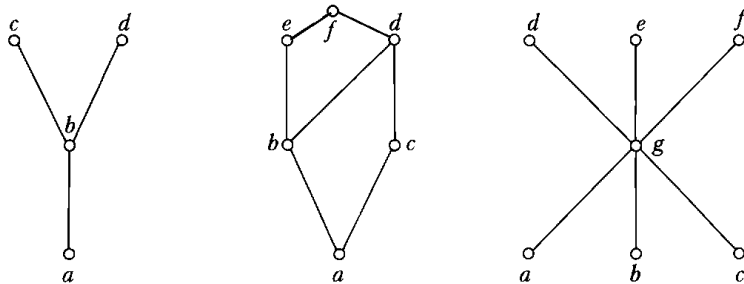


Рис. 2.21

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке було би відношенням:
- нестрогого порядку;
 - строгового порядку;
 - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.
8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке було би відношенням:
- нестрогого порядку;
 - строгового порядку;

в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.

9. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(c, a), (b, d), (d, c), (f, c)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:

- а) часткового порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) .

10. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(7, 4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (3, 4)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:

- а) часткового порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) .

11. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = I_A \cup \{(2, 1), (4, 1), (1, 3), (5, 1), (4, 3), (2, 3), (5, 3), (5, 4)\}$$

відношенням часткового порядку на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A, R) та вказати її екстремальні елементи.

12. Перевірити, чи є бінарне відношення R з матрицею

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A = \{x, y, z, u, v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення R та вказати екстремальні елементи множини A за відношенням нестроогого порядку, яке відповідає відношенню R .

13. Перевірити, чи є відношення $S = R \circ (R \cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, якщо

$$R = \{(b, g), (a, e), (c, g), (b, c), (a, b), (c, e), (d, f)\}.$$

Якщо так, то:

- зобразити діаграму Хассе відношення S ;
- вказати екстремальні елементи множини A за відношенням S ;
- знайти $\inf \{b, g, e\}$ та $\sup \{a, b, h\}$.

Функціональні відношення

- Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:
 - $R_1 = \{(x, y) \mid xy = 2\}$;
 - $R_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$;
 - $R_3 = \{(x, y) \mid 2x > y\}$;
 - $R_4 = \{(x, y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$;
 - $R_5 = \{(x, y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$.
- Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:
 - $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$;
 - $R_2 = \{(x, y) \mid y \geq -1, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\}$;
 - $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$;
 - $R_4 = \{(x, y) \mid x^2 = |y|\}$;
 - $R_5 = \{(x, y) \mid x = \sin y\}$.
- За бінарним відношенням

$$R = \{(2, b), (5, d), (4, b)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d\}$$

побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

- ін'єктивним;
- сюр'єктивним;

в) бієктивним.

4. За бінарним відношенням

$$R = \{(1,b), (3,d), (4,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d,e\}$$

побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним.

5. За бінарним відношенням

$$R = \{(2,b), (5,d), (4,b), (1,a), (2,c), (5,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$$

побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним.

6. За відношенням

$$R = \{(b,2), (d,5), (a,4), (e,3), (c,4), (d,3), (a,1)\} \subset \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5\}$$

побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:

- а) ін'єктивним;
- б) сюр'єктивним;
- в) бієктивним.

7. Довести, що якщо функціональне відношення f є ін'єктивним, то обернене до нього відношення f^{-1} також є функціональним і ін'єктивним. Чи є правильним аналогічне твердження у випадку сюр'єктивних відношень.

8. Довести, що якщо $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ і функції f та g є сюр'єктивними, то відношення $g \circ f$ також є функціональним і сюр'єктивним.

9. Довести, що якщо $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ і функції f та g є ін'єктивними, то відношення $(g \circ f)^{-1}$ також є функціональним і ін'єктивним.

10. Нехай A і B — скінченні множини, $|A| = m$, $|B| = n$. Визначте співвідношення між m та n , якщо існує:

- а) ін'єктивне відображення з A у B ;
- б) сюр'єктивне відображення з A на B ;
- в) бієктивне відображення з A у B .

3. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика — розділ дискретної математики, присвячений вивченню об'єктів, побудованих із елементів скінченних множин, а також підрахунку кількості конфігурацій об'єктів, які задовольняють певні властивості.

3.1. Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y — n_2 способами, то або x , або y можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо система k множин $\{A_1, \dots, A_k\}$ є розбиттям множини A , то $|A| = |A_1| + \dots + |A_k|$.

Приклад 3.1. З міста Львів у місто Ужгород вирушає 7 маршруток, 5 поїздів та 3 автобуси. Скількома способами можна дістатися зі Львова до Ужгорода?

Розв'язок. За правилом суми всього існує $7 + 5 + 3 = 15$ способів.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а об'єкт y — n_2 способами, то пару (x, y) можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо $A = A_1 \times \dots \times A_k$, то

$$|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Приклад 3.2. Обчислити кількість ідентифікаторів мови C++, довжина яких не перевищує 3.

Розв'язок. Для запису ідентифікаторів використовують 26 латинських літер, 10 цифр та символ підкреслювання, причому ідентифікатори не можуть починатися з цифри. Оскільки регістр літер є важливим, то існує 53 ідентифікатори довжини 1. За правилом добутку є $53 \cdot 63 = 3339$ ідентифікаторів довжини 2 та $53 \cdot 63 \cdot 63 = 210357$ ідентифікаторів довжини 3. Тому за правилом суми загальна кількість ідентифікаторів рівна $53 + 3339 + 210357 = 213749$.

3.2. Розміщення, сполучення та перестановки

Нехай задано скінченну непорожню множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент a_{i_1} .

Крок 2. Із множини $A \setminus \{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2} .

.....

Крок r . Із множини $A \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{r-1}}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_r} .

Тоді вибрані елементи a_{i_1}, \dots, a_{i_r} утворюють *вибірку* без повторень обсягу r (r -вибірку) із множини A .

Вибірку називають *упорядкованою*, якщо задано порядок її елементів. Зрозуміло, що впорядкована r -вибірка — це кортеж (вектор) з r компонентами, і тому її позначають $(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$. Упорядковані r -вибірки з n -елементної множини називаються *розміщеннями* з n елементів по r . Згідно до комбінаторного правила множення для кількості A_n^r усіх розміщеннями без повторень з n елементів по r маємо

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad (3.1)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Невпорядковану r -вибірку позначатимемо $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$. Невпорядкована r -вибірка — r -елементна підмножина множини A . Неупорядковані r -вибірки з n -елементної множини називаються *сполученнями* (комбінаціями) з n елементів по r . Кількість усіх *сполучень* з n елементів по r позначається C_n^r . Легко переконатися, що $A_n^r = C_n^r \cdot r!$. Тому

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

У *вибірках із повтореннями* на k -му кроці елемент a_{i_k} вибирається не з множини $A \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}\}$, а з початкової множини A .

Сполучення з повтореннями — це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу. Таке узагальнення множини називається *мультимножиною*. Для позначення мультимножин будемо використовувати квадратні дужки.

Для чисел \bar{A}_n^r розміщень з повтореннями та \bar{C}_n^r комбінацій з повтореннями з n елементів по r справедливими є наступні формули:

$$\bar{A}_n^r = n^r, \quad \bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

Приклад 3.3. Вказати 2-вибірки з множини $\{a, b, c\}$.

Розв'язок. Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b);$$

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c);$$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\};$$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c].$$

Приклад 3.4. У магазині є тістечка чотирьох видів: безе, наполеони, пісочні та еклери. Скільки існує

а) способів придбати 7 тістечок;

б) способів придбати 8 тістечок так, щоб серед них було рівно 2 наполеони;

в) способів придбати 9 тістечок так, щоб серед них було не менше 3 еклерів;

г) способів придбати 10 тістечок так, щоб серед них було не більше 3 безе та пісочних?

Розв'язок. а) Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 4

$$\text{по } 7: \bar{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 3!} = 120;$$

б) вважаємо, що два наполеони вже вибрані. Тоді ми обираємо 6 тістечок трьох можливих видів. Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 3 по 6: $\bar{C}_3^6 = C_8^6 = 28$;

в) нехай N — загальна кількість способів вибору 9 тістечок, N_i — кількість способів вибору тістечок так, щоб серед них було рівно i еклерів. Тоді шукана кількість рівна

$$N - N_0 - N_1 - N_2 = \bar{C}_4^9 - \bar{C}_3^9 - \bar{C}_3^8 - \bar{C}_3^7 = C_{12}^9 - C_{11}^9 - C_{10}^8 - C_9^7 = 220 - 55 - 45 - 36 = 84;$$

г) нехай M_i — кількість способів вибору тістечок таким чином, щоб серед них було рівно i безе та пісочних (разом). Тоді решта $10 - i$ тістечок мають бути або еклерами, або наполеонами. За комбінаторним правилом множення

$$M_i = \bar{C}_2^i \cdot \bar{C}_2^{10-i} = C_{11-i}^{10-i} C_{i+1}^i = \frac{(11-i)! (i+1)!}{(10-i)! 1! i! 1!} = (11-i)(i+1).$$

Тоді шукана кількість рівна $M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = 11 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 90$.

Перестановка з n елементів — це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з n елементів називають також n -перестановками. Окремі n -перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n . Формулу для P_n одержують із формули (3.1) у випадку $r = n$. Тому $P_n = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (*перестановки з повтореннями*). Точніше, нехай є елементи k різних типів, а число n_i ($i = 1, \dots, k$) — кількість елементів k -го типу. Очевидно, що $n = n_1 + \dots + n_k$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, \dots, n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1, \dots, n_k)$, візьмемо фіксовану перестановку з повтореннями та замінимо в ній усі однакові елементи різними. У такий спосіб ми можемо отримати $n_1! \cdot \dots \cdot n_k!$ перестановок з n різних

елементів. Якщо зробити це для кожної перестановки з повтореннями, то одержимо усі $n!$ перестановок. Отже $P_n = P_n(n_1, \dots, n_k) \cdot n_1! \cdot \dots \cdot n_k!$. Тому

$$P_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (3.2)$$

Приклад 3.5. Підрахувати кількість різних 6-цифрових чисел, які

- а) складаються із різних цифр;
- б) містять лише парні цифри;
- в) містять лише непарні цифри;
- г) містять дві цифри 3, три цифри 7 та одну цифру 6;
- д) містять рівно одну цифру 5, хоча би дві цифри 2 та жодної цифри 0.

Розв'язок. а) Використаємо правило множення. Існує 9 способів вибору 1-ї цифри (усі цифри крім 0). Оскільки не допускаються повтори цифр і 1-ша цифра вже вибрана, то є $A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ способів вибору інших п'яти цифр. Тому усього є $9 \cdot 15120 = 136080$ шуканих 6-цифрових чисел;

б) шукані числа не можуть починатися на цифру 0. Усі інші цифри можуть приймати одне з п'яти можливих значень (0, 2, 4, 6 або 8). Тому є $4 \cdot 5^5 = 12500$ чисел складених із парних цифр;

в) на першу цифру нема додаткових обмежень. Тому шукана кількість рівна $5^6 = 15625$;

г) у цьому пункті ми не можемо довільним чином вибирати цифри числа, а лише переставляємо вже вибрані цифри з урахуванням їх повторів. Шукана кількість рівна $P_6(2, 3, 1) = 6! / (2! 3! 1!) = 4 \cdot 5 \cdot 6 / 2 = 60$;

д) Нехай N — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5 та не містять жодної цифри 0, N_i — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5, не містять жодної цифри 0 та містять i цифр 2. При підрахунку числа N ми маємо 6 способів вибору позиції цифри 5 та 8 способів вибору для кожної з інших цифр, при підрахунку N_i — C_5^i способів вибору позицій для двійок та 7 способів вибору для кожної з інших цифр. Тому $N_i = 6 \cdot C_5^i \cdot 7^{5-i}$, $0 \leq i \leq 5$. Тоді шукана кількість способів рівна $N - N_0 - N_1 = 6 \cdot (8^5 - 7^5 - C_5^1 \cdot 7^4) = 23736$.

Приклад 3.6. На рис. 3.1. зображено план міста. Мандрівник хоче потрапити із пункту A в пункт B найкоротшим шляхом, тобто рухаючись весь час або «зліва направо» або «знизу вверху». Скількома способами він може потрапити із A у B ?

Розв'язок. Кожний шлях можна однозначно зобразити у вигляді слова, утвореного з k символів U (вверх) та n символів R (вправо). Тому кількість різних шляхів рівна кількості різних перестановок, тобто $P_{k+n}(k, n) = (n+k)! / (n! k!)$.

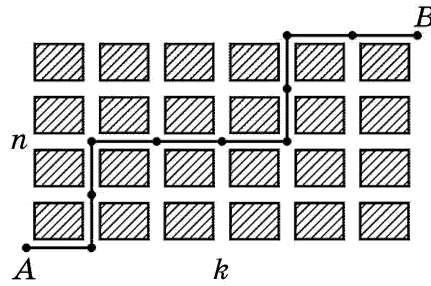


Рис. 3.1. План міста

3.3. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона та поліноміальна формула

Біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ — кількість

сполучень з n елементів по r ($0 \leq r \leq n$). При цьому за домовленістю вважаємо, що $0! = 1$. Часто біноміальні коефіцієнти C_n^r позначають як $\binom{n}{r}$. Властивості:

1. Нехай n і r — невід'ємні цілі числа, $r \leq n$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$.

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

2. Рівність Паскаля: $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Для доведення розіб'ємо множину усіх C_n^r сполучень з n елементів $\{a_1, \dots, a_n\}$ по r на дві підмножини. До першої множини віднесемо усі сполучення, які не містять елемент a_n . Таких сполучень є C_{n-1}^r . До другої множини віднесемо усі сполучення, які містять елемент a_n . Відкинувши цей елемент, отримаємо сполучення з $n-1$ елементів по $r-1$. Таких сполучень є C_{n-1}^{r-1} . Тому $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Рівність Паскаля дає змогу таблицю для чисел C_n^r , яку називають *трикутником Паскаля*, який заповнюють зверху вниз. По краям трикутника записують числа $C_n^0 = C_n^n = 1$, а всі інші значення у рядку одержують як суми двох чисел попереднього рядка, що розміщені ліворуч та праворуч від шуканого значення (див рис. 3.2). Тому у $(n+1)$ -й рядок трикутника містить числа C_n^i ($i = 0, \dots, n$).

3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

Рис. 3.2. Трикутник Паскаля

Для доведення останньої рівності досить зауважити, що оскільки кожне число $(n-1)$ -го рядка трикутника Паскаля бере участь у формуванні двох чисел n -го рядка, то сума чисел кожного рядка удвічі більша за суму чисел попереднього рядка. Оскільки сума чисел 1-го рядка рівна 1, то сума чисел $(n+1)$ -го рядка рівна 2^n .

$$4. C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}.$$

Доведення за допомогою трикутника Паскаля схоже на доведення попередньої властивості.

$$5. C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k-1}^n = C_{n+k}^{n+1};$$

Доведення впливає шляхом багаторазового застосування формули Паскаля:

$$\begin{aligned}
 C_{n+k}^{n+1} &= C_{n+k-1}^n + C_{n+k-1}^{n+1} = C_{n+k-1}^n + C_{n+k-2}^n + C_{n+k-2}^{n+1} = \dots = C_{n+k-1}^n + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = \\
 &= C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k-1}^n.
 \end{aligned}$$

6. Якщо $r \leq \min\{m, n\}$, то $\sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$ (рівність Вандермонда-Коші).

7. Послідовність біноміальних коефіцієнтів є *унімодальною*, тобто задовольняє умову

$$C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^m; C_n^m \geq C_n^{m+1} > C_n^{m+2} > \dots > C_n^n,$$

де $m = \lfloor n/2 \rfloor$ — ціла частина числа $n/2$. У випадку парного n максимум C_n^r досягається в точці $r = m$, а разі непарного — у двох точках $r = m$ та $r = m+1$.

Доведення впливає з того, що відношення двох сусідніх елементів $\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$ більше за 1 у випадку $r \leq m$ та менше за 1 у випадку $r > m+1$.

Теорема 3.1 (біном Ньютона). Нехай x та y — змінні, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}.$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми [4]. Оскільки доданок $x^i y^{n-j}$ отримується внаслідок i -кратного вибору x та $(n-i)$ -кратного вибору y із n співмножників у виразі $(x + y)^n$, то коефіцієнт при $x^i y^{n-j}$ дорівнює кількості способів i -кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^i .

За допомогою бінома Ньютона можна довести властивості 3–6. Наприклад,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n \text{ та } (x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $x^r y^{m+n-r}$ отримаємо рівність Вандермонда-Коші.

Приклад 3.7. Обчислити коефіцієнт при x^2 у розкладі $(x + 2/x)^8$.

Розв'язок. У біномі Ньютона i -й доданок рівний $C_8^i x^i 2^{8-i} x^{-(8-i)} = C_8^i 2^{8-i} x^{2i-8}$, $i = 0, \dots, 8$. Якщо $2i - 8 = 2$, то $i = 5$. Тому коефіцієнт при x^2 рівний $C_8^5 2^{8-5} = 448$.

Розглянемо узагальнення бінома Ньютона, яке стосується піднесення до n -го степеня суми k доданків.

Теорема 3.2 (поліноміальна). Вираз $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, де $n = n_1 + \dots + n_k$, тобто

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} P_n(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Поліноміальна теорема дає змогу встановити властивості чисел $P_n(n_1, \dots, n_k)$. Наприклад, покладемо $x_1 = 1, \dots, x_k = 1$. Тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} P_n(n_1, \dots, n_k) = k^n.$$

3.4. Деякі комбінаторні задачі

3.4.1. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + \dots + x_r = n$ в цілих невід'ємних числах, де n — натуральне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа x_1, \dots, x_r , що $x_1 + \dots + x_r = n$, можна одержати сполучення з повтореннями з r елементів по n , а саме: елементів першого

типу — x_1 одиниць, другого типу — x_2 одиниць, ..., r -го — x_r . Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з r елементів по n , то кількості елементів кожного типу задовольняють рівняння $x_1 + \dots + x_r = n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює $\bar{C}_r^n = C_{n+r-1}^n = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$.

Приклад 3.8. Знайти

а) кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 10$;

б) кількість додатних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 10$;

в) кількість невід'ємних цілих розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 < 10$.

Розв'язок. а) $\bar{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^2 = 11 \cdot 12 / 2 = 66$;

б) нехай $x_i = y_i + 1$, $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Після підстановки отримаємо рівняння $y_1 + y_2 + y_3 = 7$, яке має $\bar{C}_3^7 = C_9^7 = 36$ цілих невід'ємних розв'язків;

в) строга нерівність $x_1 + x_2 + x_3 < 10$ рівносильна нестрогій нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ (для цілих значень невідомих). Остання нерівність має таку саму кількість розв'язків, як і рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$. Отже, шукана кількість розв'язків становить $\bar{C}_4^9 = C_{12}^9 = C_{12}^3 = 660$.

3.4.2. Принцип Діріхле

Якщо в k коробках є $k + 1$ або більше предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше два предмети.

Якщо в k коробках є N предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\lceil N / k \rceil$ предметів (узагальнений принцип Діріхле).

Приклад 3.9. У залі театру є 433 глядачі. Довести, що

а) принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих серед присутніх.

б) принаймні 37 з них народилися в одному місяці.

Розв'язок. а) нехай k -та коробка містить усіх глядачів, які мають рівно k знайомих серед присутніх. Легко переконатися, що хоча б одна з коробок з індексами 0 та k порожня. Виключимо цю коробку з розгляду. Тоді 433 глядачі містяться в одній з 432 коробок. Згідно принципу Діріхле одна з цих коробок містить хоча би двох глядачів. Отже, принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих;

б) нехай k -та коробка містить усіх глядачів, які народилися у k -му місяці. Тоді згідно до узагальненого принципу Діріхле знайдеться місяць, в якому народилося $\lceil 433/12 \rceil = 37$ глядачів.

3.4.3. Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин. Нехай A_1, \dots, A_n — скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Розглянемо альтернативну форму для принципу включення-виключення. Нехай A — скінченна множина, $|A| = N$ і потрібно знайти кількість її елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Нехай $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ — кількість елементів, які одночасно мають властивості $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, $N(\bar{\alpha}_{i_1}, \dots, \bar{\alpha}_{i_k})$ — кількість елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. Тоді

$$N(\bar{\alpha}_{i_1}, \dots, \bar{\alpha}_{i_n}) = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(\alpha_i, \alpha_j) + \dots + (-1)^n N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}). \quad (3.3)$$

Розглянемо частковий випадок формули (3.3). Припустимо, що величини $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ не залежать від самих властивостей, а залежать лише від їх кількості. Уважатимемо за означенням $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = N^{(k)}$ для будь-якого набору k властивостей. Тоді формула (3.3) набуває вигляду

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} + \dots + (-1)^n N^{(n)}. \quad (3.4)$$

Приклад 3.10. Обчислити кількість простих чисел серед перших 100 натуральних чисел.

Розв'язок. Якщо число не більше за 100 є складеним, то воно обов'язково має простий дільник, який не перевищує $\sqrt{100} = 10$. Тому серед його простих дільників обов'язково зустрінеться 2, 3, 5 або 7. Нехай властивість α_i полягає у подільності націло на i , де $i \in \{2, 3, 5, 7\}$. Очевидно, що $N(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}) = \left\lfloor \frac{100}{i_1 \dots i_k} \right\rfloor$ Тоді

за формулою (3.3) шукана кількість простих чисел рівна

$$100 - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) - N(\alpha_5) - N(\alpha_7) + N(\alpha_2, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_5) + N(\alpha_2, \alpha_7) + \\ + N(\alpha_3, \alpha_5) + N(\alpha_3, \alpha_7) + N(\alpha_5, \alpha_7) - N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) - N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_7) - N(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7) - \\ - N(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7) + N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7) + 4 - 1.$$

Передостанній доданок відповідає простим числам 2, 3, 5 та 7, останній — числу 1, яке не є простим. Остаточо отримуємо, що у першій сотні є

$$100 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4 - 1 = 22$$

простих чисел.

3.5. Задачі про розподіл предметів за ящиками та розбиття множини

Розв'язуючи задачі про розподіл (розкладання) предметів за ящиками, необхідно проаналізувати зміст задачі, властивості предметів, щоб з'ясувати питання про те, вважати предмети однаковими чи різними, враховувати чи ні порядок вибірки предметів, розрізняти чи ні ящики один від одного, брати до уваги чи ні місткість ящиків.

Розподіл різних предметів за різними ящиками заданої місткості

Дано n різних предметів і k різних ящиків. Потрібно покласти в перший ящик n_1 предметів, у другий — n_2 предметів, ..., у k -й — n_k предметів, де $n = n_1 + \dots + n_k$. Скількома способами можна це зробити?

Розглянемо зв'язок між цією задачею та задачею про кількість перестановок з повтореннями. Для цього занумеруємо всі предмети номерами ящиків, у які вони будуть покладені, і запишемо отриману послідовність номерів. Отримаємо перестановку з повтореннями. І навпаки, кожній перестановці з повтореннями цілком однозначно відповідає розподіл предметів по ящиках. Отже, знайдено відповідність між перестановками з повторенням та розкладанням у ящики. Отже, шукана кількість дається формулою (3.2).

Розподіл n однакових предметів за k різними ящиками

Оскільки предмети не можна відрізнити, то важливими є лише їх кількості у кожному ящику. Нехай x_i — кількість предметів у i -му ящику, де $1 \leq i \leq k$. Тоді $x_1 + \dots + x_k = n$, $x_i \geq 0$. Тобто, ми звели нашу задачу до підрахунку кількості ціло-числових невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + \dots + x_k = n$, яка розглядалася в параграфі 3.4.1. Тому шукана кількість рівна $\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Якщо ставиться додаткова умова, що у кожному ящику має бути не менше ніж r предметів, то для вільного розподілу залишається $n - kr$ предметів. Отже, у цьому випадку шукана кількість способів рівна $\bar{C}_k^{n-kr} = C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$.

Розподіл різних предметів з урахуванням їх порядку в різних ящиках

Якщо не обмежувати кількість предметів в ящиках і якщо предмети не розрізняти між собою, то кількість таких розподілів дорівнює $\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n$.

Кожному способу розподілу однакових предметів між ящиками відповідає $n!$ способів розподілу різних предметів з урахуванням їх порядку, які одержуються за допомогою перестановок предметів між собою без зміни кількості предметів в ящиках. За правилом добутку одержуємо шукану кількість розподілів:

$$C_{n+k-1}^n \cdot n! = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n.$$

Розподіл різних предметів без урахування їх порядку в ящиках

Необхідно розподілити n різних предметів між k ящиками, місткість яких не обмежена. Перший предмет можна покласти у будь-який з k ящиків, другий (незалежно від першого) також у k ящиків і т. д. За правилом добутку предмети можна розподілити k^n способами.

Розподіл різних предметів за однаковими ящиками за умови, що ящики не порожні

Позначимо через $S(n, k)$ кількість способів розподілу n різних предметів між k однаковими не порожніми ящиками. Із кожного такого розподілу можна одержати $k!$ аналогічних розподілів за різними ящиками. Таким чином, число $M(n, k)$ — кількість розподілів n різних предметів між k різними не порожніми ящиками рівна $S_n^k \cdot k!$.

З формули (3.4) з використанням результату попереднього пункту легко отримати формулу для $M(n, k)$

$$M(n, k) = k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n.$$

Тому

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \left(k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n \right). \quad (3.5)$$

Числа $S(n, k)$ називаються *числами Стірлінга другого роду*. Часто в літературі для чисел Стірлінга другого роду використовують позначення $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

3.6. Задача про розбиття множини на непорожні частини

Розглянемо задачу визначення кількості розбиттів скінченної множини A на непорожні частини (означення розбиття множини наведено в підрозділі 2.5).

Приклад 3.11. Якщо $A = \{a, b, c\}$, то можна виконати наступні розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$$k = 1: \{\{a, b, c\}\};$$

$$k = 2: \{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\};$$

$$k = 3: \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$$

Очевидно, що кількість розбиттів n -елементної множини на k непорожніх частин рівна $S(n, k)$. Нехай B_n — кількість усіх розбиттів n -елементної множини на непорожні частини. Числа B_n називаються числами Белла. Очевидно, що

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Для попереднього прикладу $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$, $B_3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Довільне розбиття множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на k непорожніх частин можна одержати так:

- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на $(k - 1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$;
- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність

$$S(n, k) = S(n, k - 1) + kS(n - 1, k).$$

Для чисел Белла існує рекурентна залежність (вважаємо, що $B_0 = 1$)

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i B_i.$$

За допомогою останніх двох формул можна будувати таблиці значень чисел Стірлінга та Белла (див. табл. 3.1).

Таблиця 3.1. Таблиця значень чисел Стірлінга другого роду та Белла ($n \leq 6$)

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	B_n
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

Приклад 3.12. Вказати формули для:

а) $S(n, n-1)$;

б) $S(n, 2)$;

в) $S(n, 3)$.

Розв'язок. а) При розбитті n -елементної множини на $n-1$ непорожню підмножину одна підмножина обов'язково містить два елементи, а усі інші — по одному елементу. Тому кількість способів розбиття співпадає з кількістю різних двоелементних підмножини n -елементної множини. Отже, $S(n, n-1) = C_n^2$.

б) Існує 2^n пар впорядкованих пар (A, \bar{A}) , де A — підмножина множини $\{1, \dots, n\}$. З них $2^n - 2$ таких пар, що обидві множини у парі не порожні. Оскільки для розбиття порядок підмножин ролі не грає, то $S(n, 2) = (2^n - 2) / 2 = 2^{n-1} - 1$.

в) Скориставшись формулою 3.5, отримаємо

$$S(n, 3) = \frac{3^n - C_3^1 2^n + C_3^2}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^{n-1} + 1}{2}.$$

3.7. Числа Каталана

Числа Каталана — елементи числової послідовності

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, ...

яка з'являється у процесі розв'язування задач підрахунку кількості різноманітних комбінаторних об'єктів.

Числа Каталана C_n визначаються наступним чином:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Можна показати, що числа Каталана — розв'язки рекурентного рівняння

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad n \geq 0, \quad C_0 = 1. \quad (3.6)$$

Числа $D_i = C_{i-1}$ є розв'язками рівняння

$$D_{n+1} = \sum_{i=1}^n D_i D_{n-i+1}, \quad n \geq 1, \quad D_1 = 1. \quad (3.7)$$

Числа Каталана виникають у таких задачах:

1. Підрахунок кількості слів Діка довжини $2n$. Слова Діка — це слова, які побудовані із n символів X то n символів Y , причому у будь-якому префіксі

слова Діка кількість Y не перевищує кількість X . Нижче наведено слова Діка довжини 4.

XXXXYY XYYXXY XYYXYY XXYYXY XXYYYY.

Кількість слів Діка довжини $2n$ рівна C_n . Доведення випливає з того, довільне слово Діка ω довжини $2n$ може бути записане у вигляді $\omega = X\omega_1Y\omega_2$, де ω_1, ω_2 — слова Діка довжини $2k$ та $2(n-k)-2$ відповідно (можливо порожні). Тому кількість слів Діка довжини $2n+2$ задовольняє рівняння (3.6).

2. Підрахунок кількості способів обчислення добутку $n+1$ множника (способів розстановки дужок у виразів). У випадку $n=3$ є наступні способи перемножити 4 множника:

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

Нехай D_{n+1} — шукана кількість способів. Тоді розбивши усі способи за порядковим номером операції множення, яка проводиться у останню чергу, можна легко переконатися, що $D_{n+1} = D_1D_n + D_2D_{n-2} + \dots + D_{n-2}D_2 + D_{n-1}D_1$. На основі (3.7) робимо висновок, що $D_{n+1} = C_n$.

3. C_n — кількість шляхів з лівої нижньої точки у праву верхню, які можна побудувати на сітці $n \times n$ таким чином, щоб вони жодного разу не «проходили» вище діагоналі. Випадок $n=4$ проілюстровано на рис. 3.3.

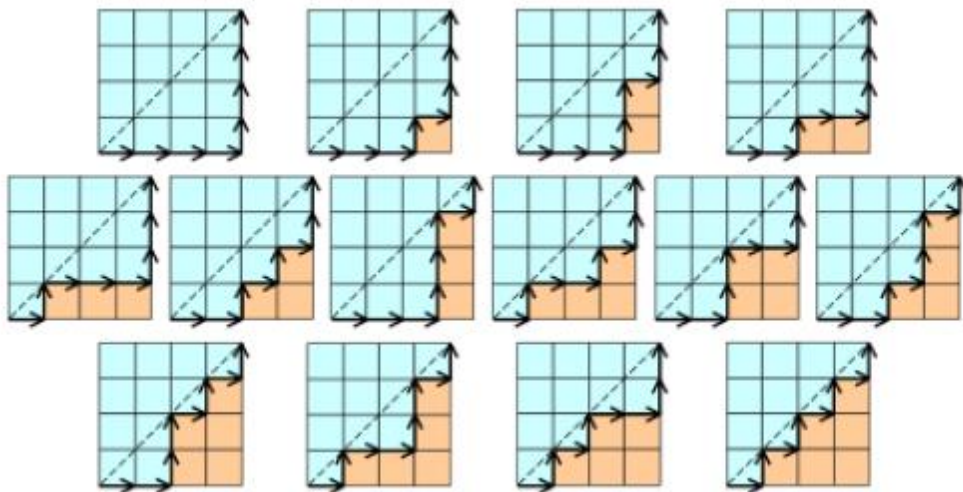


Рис. 3.3. Допустимі шляхи

Для доведення, що кількість шляхів рівна C_n досить встановити взаємно однозначну відповідність між допустимими шляхами та словами Діка

довжини $2n$. Цього можна досягти, закодувавши горизонтальні пересування літерою X, а вертикальні — літерою Y.

4. C_n — кількість триангуляцій випуклого $(n + 2)$ -кутника шляхом проведення його діагоналей, які не перетинаються між собою. Випадок $n = 4$ проілюстровано на рис. 3.4.

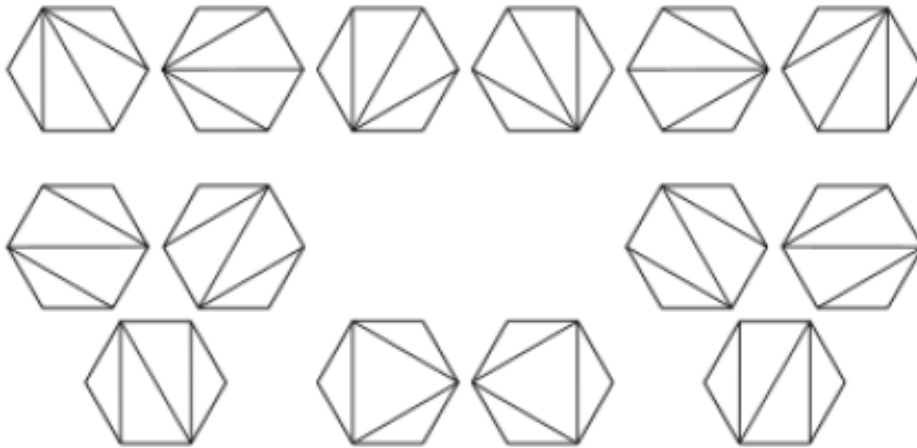


Рис. 3.4. Розбиття шестикутника на трикутники

Можна показати, що $C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$, тобто границя відношення n -го числа Каталана і дробу прямує до 1 при $n \rightarrow \infty$.

3.8. Задачі до третього розділу

- У чемпіонаті світу з футболу беруть участь 32 команди, 14 з яких з Європи. Підрахувати:
 - кількість способів розподілу нагород;
 - кількість способів розподілу нагород за умови, що хоча би два призові місця посіли команди з Європи;
- Будівельна фірма формує бригаду з 6 робочих. На фірмі працює 5 малярів, 2 теслі та 3 штукатури. Підрахувати
 - кількість способів укомплектування бригади;
 - кількість способів укомплектування бригади за умови, що до її складу мають входити представники усіх трьох спеціальностей.
- Для премій на конкурсі виділено 2 ноутбуки, 3 — смартфони і 8 — колонок. Скількома способами можна розділити ці премії між 20 учасниками, якщо будь-якому з них вручають не більше однієї премії?

4. Для премій на олімпіаді з дискретної математики виділено 3 примірника першої книги, 4 — другої і 8 — третьої. Скількома способами можна розподілити ці премії між 30 учасниками, якщо будь-якому вручають не більше однієї книги?
5. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «метаморфоза»?
6. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «перестановка» таким чином, щоб отримана перестановка починалася або закінчувалася на літеру «а»?
7. Скількома способами із 20 шахістів можна скласти
 - а) три пари (порядок пар не відіграє ролі);
 - б) чотири трійки?
8. У розкладі бінома $(\sqrt[3]{a} + a^{-1})^{16}$ визначити член, який не залежить від a .
9. У розкладі $(a + b + c + d)^5$ вказати члени, числовий коефіцієнт при яких є найбільшим.
10. Підрахувати кількість невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ за умови, що:
 - а) x_i — цілі ($i = 1, \dots, 4$);
 - б) x_1, x_2 — парні, x_3, x_4 — непарні;
11. Підрахувати кількість натуральних розв'язків нерівності $6 < x_1 + x_2 + x_3 < 20$.
12. Скільки потрібно запросити людей, щоб
 - а) щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?
 - б) обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?
13. Нехай A — множина, яка містить 10 натуральних чисел, кожне з яких не більше 42. Довести, що знайдуться хоча би дві різні трьохелементні підмножини множини A , які мають однакові суми елементів.
14. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10000 елементів, кожна пара — 1000 спільних елементів, кожна трійка — 100, кожна четвірка — 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?
15. Скількома способами можна розмістити 10 білих і 6 чорних куль у 5 різних урн, якщо
 - а) кулі одного кольору різні;
 - б) кулі одного кольору однакові;
 - в) кулі одного кольору різні і хоча би дві урни мають бути непорожні.
 - г) кулі одного кольору однакові і всі урни мають бути непорожні.

4. ТЕОРІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Булеві вектори

4.1.1. Основні означення

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Елементи множини \mathbb{Z}_2 називаються булевими константами.

Розглядають наступні логічні операції над булевими змінними: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція та додавання за модулем 2 (див. [10] та табл. 4.5 у параграфі 4.2.2):

$$\bar{x} = 1 - x, \quad x \wedge y = \min\{x, y\}, \quad x \vee y = \max\{x, y\}, \quad x \oplus y = x + y \pmod{2}.$$

Вектор (упорядкований набір) вигляду $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{Z}_2$ називається *n*-вимірним булевым вектором. Множина усіх *n*-вимірних булевих векторів позначається \mathbb{Z}_2^n . Тобто, $\mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_n$ множників.

Кожному булевому вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставиться у відповідність його номер $N(\mathbf{x})$, який визначається наступним чином

$$N(\mathbf{x}) = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + x_{n-1} \cdot 2 + x_n.$$

Легко бачити, що для номера *n*-вимірного булевого вектора виконуються нерівності

$$0 \leq N(\mathbf{x}) < 2^n.$$

Приклад 4.1. Нехай $\tilde{x} = (0,1,0,1,1,0,1) \in \mathbb{Z}_2^7$. Тоді

$$N(\tilde{x}) = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45.$$

Приклад 4.2. Вказати вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^9$, номер якого рівний 117.

$$\begin{aligned} 117 &= 64 + 53 = 64 + 32 + 21 = 64 + 32 + 16 + 5 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = \\ &= 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0. \end{aligned}$$

Тому $\mathbf{x} = (0,0,1,1,1,0,1,0,1)$.

Теорема 4.1. Кількість *n*-вимірних булевих векторів рівна 2^n .

Доведення. Скористаємося комбінаторним правилом множення, згідно до якого $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, де $|A|$ — потужність множини *A*. Отримаємо

$$|\mathbb{Z}_2^n| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_2| \cdot |\mathbb{Z}_2| \cdot \dots \cdot |\mathbb{Z}_2| = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n.$$

Мірою «близькості» між n -вимірними булевими векторами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ та $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ є відстань Хеммінга $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, яка визначається наступним чином:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Приклад 4.3. Обчислити відстань Хеммінга між векторами $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ та $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

Розв'язок. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3$.

Відстань Хеммінга між двома векторами чисельно рівна кількості координат, у яких відрізняються ці вектори. Якщо $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, то вектори \mathbf{x} та \mathbf{y} називаються *сусідніми*.

Властивості відстані Хеммінга:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
3. для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_2^n$ $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (нерівність трикутника).

Величина $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i$ називається *нормою Хеммінга* булевого вектора \mathbf{x} . Норма Хеммінга булевого вектора рівна кількості одиничних компонент вектора.

4.1.2. Операції над булевими векторами

Над булевими векторами можна виконувати *логічні операції*, застосовуючи їх до відповідних компонент цих векторів. Тобто, якщо $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, то

1. $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$;
2. $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$;
3. $\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$;
4. $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$.

Приклад 4.4. Нехай $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ та $\mathbf{y} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$. Тоді

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1),$$

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Також до булевих векторів можна застосовувати *операції зсуву*. Виокремлюють *логічний* та *циклічний* зсуви.

Результатом застосування операції логічного зсуву на k позицій вліво до вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\mathbf{x} \ll k = (x_{k+1}, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

Результатом застосування операції логічного зсуву на k позицій вправо до вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\mathbf{x} \gg k = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{n-k})$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву на k позицій вліво до вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\mathbf{x} \lll k = (x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_k)$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву на k позицій вправо до вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\mathbf{x} \ggg k = (x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-k})$.

Приклад 4.5. Нехай $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$. Тоді

$$\mathbf{x} \ll 2 = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{x} \gg 2 = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0),$$

$$\mathbf{x} \lll 2 = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{x} \ggg 2 = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0).$$

Приклад 4.6. Вказати вектор $(\mathbf{x} \lll 5) \oplus (\bar{\mathbf{y}} \gg \|\mathbf{x}\|)$, якщо $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\mathbf{y}) = 111$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

Розв'язок. Оскільки $110 = 64 + 32 + 8 + 4 + 2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$, то $\mathbf{y} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$.

$$\mathbf{x} \lll 5 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \lll 5 = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

$$\bar{\mathbf{y}} \gg \|\mathbf{x}\| = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \gg 3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0).$$

$$(\mathbf{x} \lll 5) \oplus (\bar{\mathbf{y}} \gg \|\mathbf{x}\|) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \oplus (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0).$$

4.2. Булеві функції

4.2.1. Булеві функції. Основні означення

Функції вигляду $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ називаються n -місними *булевими функціями* (функціями двозначної логіки). Тобто, аргументами булевих функцій є n -вимірні булеві вектори, а значеннями — 0 або 1. Позначимо через P_2 множину усіх булевих функцій.

Оскільки область значень булевої функції (БФ) скінченна, то її можна задавати за допомогою таблиць значень. Для того, щоб задати n -місню БФ, достатньо вказати її на значення на кожному з 2^n булевих наборів (векторів). Якщо домовитися, що набори впорядковані у порядку зростання їх номерів, то кожна n -місна БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ однозначно задається вектором $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$, де f_k — значення функції f на наборі, номер якого рівний k .

Теорема 4.2. Кількість різних n -місних булевих функцій рівна 2^{2^n} .

Доведення. Кількість n -місних БФ співпадає із кількістю усіх можливих n -вимірних булевих векторів вигляду $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$. За теоремою попереднього параграфу ця кількість рівна 2^{2^n} .

Номером булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ називається номер $N(\mathbf{f})$, де \mathbf{f} — вектор значень функції f .

Приклад 4.7. Вказати таблицю значень БФ $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо $N(\mathbf{f}) = 43$.

Розв'язок. $43 = 32 + 11 = 32 + 8 + 3 = 32 + 8 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$. Тому $\mathbf{f} = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$. Тоді таблиця значень БФ має наступний вигляд (табл. 4.1).

Змінна x_k називається *суттєвою змінною* функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо існує такий набір $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, що $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_k, \dots, \alpha_n)$. У протилежному випадку змінна x_k називається *фіктивною*.

Якщо x_k — фіктивна змінна функції $f(x_1, \dots, x_n)$ і $g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, то кажуть, що функцію $g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ отримано із функції $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ шляхом *видалення фіктивної змінної x_k* (функцію f отримано із g шляхом *введення фіктивної змінної*).

Булеві функції f_1 та f_2 будемо вважати рівними, якщо одну із них можна отримати із іншої за допомогою видалення чи введення фіктивних змінних.

Приклад 4.8. Вказати суттєві змінні булевої функції $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо $\tilde{f} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$. Видалити фіктивні змінні.

Розв'язок. Запишемо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (табл. 4.2). Змінна x_1 є суттєвою, оскільки $f(0, 0, 0) = 1$, а $f(1, 0, 0) = 0$. Змінна x_2 є фіктивною, оскільки $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 1$, $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 0$, $f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$. Змінна x_3 є суттєвою, оскільки $f(1, 0, 0) = 0$, а $f(1, 0, 1) = 1$.

Таблиця 4.1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблиця 4.2

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Таблиця 4.3

x_1	x_3	g
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Перейдемо до видалення фіктивної змінної x_2 . Для цього у таблиці значень функції f закреслимо стовпчик, який відповідає змінній x_2 та ті рядки, які відповідають наборам, у яких $x_2 = 1$. У результаті отримаємо $g(x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ (див. табл. 4.3).

4.2.2. Елементарні булеві функції

Розглянемо n -місні БФ у випадку $n \in \{0, 1, 2\}$.

Якщо $n = 0$, то отримуємо 0-місні БФ, які не залежать від жодної змінної, тобто є булевими константами 0 або 1.

Якщо $n = 1$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^1} = 4$ різних одномісних булевих функцій, які наведені у табл. 4.4.

Таблиця 4.4. Одномісні булеві функції

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Індекс функції у таблиці співпадає із номером вектора її значень. Легко переконатися, що $f_0 = 0$, $f_3 = 1$ (у цих функціях змінна x є фіктивною), $f_1 = x$, $f_2 = \bar{x}$.

Якщо $n = 2$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^2} = 16$ різних двомісних булевих функцій, які наведені у табл. 4.5.

Таблиця 4.5. Двомісні булеві функції

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Проведемо аналіз отриманих функцій.

Розглянемо функції 0, 1 та 2 змінних (операції).

$$f_0 = 0, f_{15} = 1.$$

$$f_3 = x, f_{12} = \bar{x}, f_5 = y, f_{10} = \bar{y}.$$

$$f_1(x, y) = x \wedge y, f_7(x, y) = x \vee y,$$

$$f_{13}(x, y) = x \Rightarrow y, f_{11}(x, y) = y \Rightarrow x,$$

$$f_9(x, y) = x \Leftrightarrow y, f_6(x, y) = x \oplus y.$$

Функція $f_{14}(x, y) = \overline{x \wedge y}$ називається *функцією Шеффера* (штрих Шеффера) і позначається $x | y$.

Функція $f_8(x, y) = \overline{x \vee y}$ називається *функцією Пірса* (стрілка Пірса) і позначається $x \downarrow y$.

Розглянуті двомісні БФ (усі функції із попередньої таблиці крім f_2 та f_4) називаються *елементарними булевими функціями* (операціями двозначної логіки).

4.2.3. Реалізація булевих функцій формулами

Суперпозиція булевих функцій — підстановка замість аргументів булевої функції інших функцій. За допомогою суперпозиції можна отримати нові функції, використовуючи елементарні булеві функції.

Нехай F — деяка підмножина функцій із P_2 . Тоді

- 1) кожна функція $f \in F$ є формулою над множиною F ;
- 2) якщо $f(x_1, \dots, x_n) \in F$, A_1, \dots, A_n — вирази, які є або формулами над F , або символами змінних, тоді вираз $f(A_1, \dots, A_n)$ — є формулою над множиною F .

Приклад 4.9. Нехай F — множина елементарних функцій. Тоді вирази $(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_3 \Rightarrow \bar{x}_1)$ та $\overline{(x_1 \downarrow x_3)} \Leftrightarrow \overline{x_2 | x_1}$ будуть формулами над F .

Кожній формулі φ , побудованій за допомогою застосування скінченної кількості правил вигляду 1) – 2), можна поставити у відповідність булеву функцію f_φ , яку задає ця формула.

Приклад 4.10. Вказати номер булевої функції $f(x_1, x_2, x_3)$, яка задається формулою $(\bar{x}_3 | x_1) \oplus x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)$.

Розв'язок. Побудуємо таблицю значень функції (див. табл. 4.6).

Таблиця 4.6. Таблиця значень $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	\bar{x}_3	$\bar{x}_3 x_1$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)$	$\overline{x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)}$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0

Тоді $N(\mathbf{f}) = 2^7 + 2^6 + 2^5 = 224$.

При записі формул застосовують той самий пріоритет логічних операцій, що й у логіці висловлювань [10]: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Для спрощення запису будемо записувати кон'юнкцію $x \wedge y$ у вигляді xy . Крім того будемо вважати, що пріоритет операції додавання за модулем 2 нижчий за пріоритет кон'юнкції.

Дві формули φ та ψ назвемо *рівносильними (еквівалентними)*, якщо відповідні їм булеві функції f_φ та f_ψ рівні. Для формул зберігаються усі рівносильності логіки висловлювань [10, 11]:

$$\begin{array}{lll}
 (xy)z = x(yz); & (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); & x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z; \\
 xy = yx; & x \vee y = y \vee x; & x \oplus y = y \oplus x; \\
 xx = x; & x \vee x = x; & x \oplus x = 0; \\
 x\bar{x} = 0; & x \vee \bar{x} = 1; & x \oplus 0 = x; \\
 x \wedge 0 = 0; & x \vee 0 = x; & x \oplus 1 = \bar{x}; \\
 x \wedge 1 = x; & x \vee 1 = 1; & x(y \oplus z) = xy \oplus xz; \\
 \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; & \overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}; & x \oplus y = \overline{x \Leftrightarrow y}; \\
 x(y \vee z) = xy \vee xz; & x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y; & x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y. \\
 x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z). & x \Leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy. &
 \end{array}$$

4.2.4. Двоїсті булеві функції

Функція $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ називається *двоїстою функцією* до булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$.

Очевидно, що таблиця значень двоїстої функції (при фіксованому порядку наборів) отримується із таблиці функції $f(x_1, \dots, x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і навпаки) стовпця значень функції та його «перевертанням».

Приклад 4.11. Вказати двоїсті функції до функцій $0, 1, x, \bar{x}, x \wedge y, x \vee y, x \Leftrightarrow y$.

Розв'язок. Будемо розглядати усі функції прикладу як функції двох змінних. Відповідні функції та двоїсті до них у наступній таблиці:

Таблиця 4.7. Двоїсті функції до елементарних булевих функцій

x	y	0	0^*	1	1^*	x^*	\bar{x}	\bar{x}^*	xy	$(xy)^*$	$x \vee y$	$(x \vee y)^*$	$x \Leftrightarrow y$	$(x \Leftrightarrow y)^*$
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Як видно з табл. 4.7:

а) $0^* = 1$;

б) $1^* = 0$;

в) $x^* = x$;

г) $\bar{x}^* = \bar{x}$;

д) $(xy)^* = x \vee y$;

е) $(x \vee y)^* = xy$;

ж) $(x \Leftrightarrow y)^* = x \oplus y$.

Співвідношення а) – ж) також можна отримати безпосередньо на основі означення операції двоїстості. Наприклад, якщо $f(x, y) = xy$, то $f^*(x, y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y$.

Теорема 4.3. Операція двоїстості має наступні властивості на множині P_2 :

- 1) якщо $g = f^*$, то $f = g^*$, тобто $(f^*)^* = f$ (властивість взаємності);
- 2) якщо $g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, то $g^* = f^*(f_1^*, \dots, f_m^*)$ (двоїстою до суперпозиції функцій, є суперпозицією двоїстих функцій).

Доведення.

- 1) Нехай $g(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$. Тоді $g^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \overline{\overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}} = f(x_1, \dots, x_n)$.
- 2) $g^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \overline{f(f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))} = \overline{f(\overline{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}, \dots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)})} = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n))$.

Наслідком теореми 4.3 є *принцип двоїстості*: для того, щоб отримати двоїсту формулу до формули φ над множиною $\{0, 1, \bar{x}, x \wedge y, x \vee y\}$, треба у формулі φ всюди замінити 0 на 1, 1 на 0, \wedge на \vee , \vee на \wedge .

Приклад 4.12. Вказати формулу, двоїсту до формули $(\bar{x} \vee 0 \vee \overline{x \wedge y}) \wedge (\overline{y \wedge 1 \vee x \vee \bar{z}})$.

Розв'язок. $\left((\bar{x} \vee 0 \vee \overline{x \wedge y}) \wedge (\overline{y \wedge 1 \vee x \vee \bar{z}}) \right)^* = \bar{x} \wedge 1 \wedge \overline{x \vee y \vee \overline{y \vee 0 \wedge x \wedge \bar{z}}}$.

Приклад 4.13. Вказати двоїсту до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x$.

Розв'язок.

$$f^*(x, y, z) = ((\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x)^* = (\bar{x} \vee z)^* \Leftrightarrow (\bar{y}x)^* = (\bar{x})^* z^* \Leftrightarrow (\bar{y})^* \vee x^* = \bar{x}z \Leftrightarrow \bar{y} \vee x.$$

Якщо для БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ виконується умова $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, то функція $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *самодвоїстою*.

Приклад 4.14. Довести, що функція $x \oplus y \oplus z$ є самодвоїстою.

Розв'язок.

$$(x \oplus y \oplus z)^* = (x \oplus y)^* \Leftrightarrow z^* = (x^* \Leftrightarrow y^*) \Leftrightarrow z = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = \overline{x \Leftrightarrow y} \oplus z = x \oplus y \oplus z.$$

4.3. Спеціальні форми подання булевих функцій

Постає питання, чи можна записати довільну булеву функцію у вигляді формули над множиною елементарних функцій?

4.3.1. Розклад булевих функцій за змінними

Нехай $\sigma \in \mathbb{Z}_2$. Уведемо позначення

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0. \end{cases}$$

Легко переконатися, що

- 1) $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$;
- 2) $x^\sigma = 1$ тоді і тільки тоді, коли $x = \sigma$.

Теорема 4.4 (про розклад булевої функції за однією змінною). Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \bar{x}_n \wedge f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n \wedge f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1). \quad (4.1)$$

Доведення. Розглянемо довільний булевий вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ і покажемо, що для нього ліва та права частини (4.1) приймають однакові значення.

Якщо $\alpha_n = 0$, то ліва частина (4.1) рівна $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$, а права —

$$\bar{0} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \vee 0 \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0).$$

Якщо $\alpha_n = 1$, то ліва частина (4.1) рівна $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$, а права —

$$\bar{1} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \vee 1 \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1).$$

В обох випадках (4.1) справджується. Теорему доведено.

Шляхом багаторазового застосування теореми 4.4 можна отримати *теорему про розклад булевої функції за змінними*.

Теорема 4.5. Для довільної БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ і довільного k ($1 \leq k \leq n$) справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{Z}_2^k} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad (4.2)$$

де диз'юнкція береться по усім двійковим наборам довжини k .

Приклад 4.15. Розкласти БФ $f(x, y, z) = x \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \oplus z)$ за змінними

а) y ;

б) x та z .

Розв'язок.

а) Запишемо розклад за змінною y :

$$f(x, y, z) = \bar{y} f(x, 0, z) \vee y f(x, 1, z).$$

$$\begin{aligned} f(x, 0, z) &= x \downarrow ((\bar{0} \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((1 \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((\bar{1} \vee x) \oplus z) = \overline{x \vee (x \oplus z)} = \\ &= \bar{x} \wedge \overline{x \oplus z} = \bar{x} (x \Leftrightarrow z) = \bar{x} (\bar{x} \bar{z} \vee xz) = \bar{x} \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} xz = \bar{x} \bar{z} \vee 0 = \bar{x} \bar{z}. \end{aligned}$$

$$f(x, 1, z) = x \downarrow ((\bar{1} \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((0 \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow (1 \oplus z) = x \downarrow \bar{z} = \overline{x \vee \bar{z}} = \bar{x} z.$$

Тому $f(x, y, z) = \bar{y} \bar{x} \bar{z} \vee y \bar{x} z = \bar{x} (\bar{y} \bar{z} \vee yz)$.

б) Проведемо розклад за змінними x та z :

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{z} f(0, y, 0) \vee \bar{x} z f(0, y, 1) \vee x \bar{z} f(1, y, 0) \vee x z f(1, y, 1).$$

$$f(0, y, 0) = 0 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 0) \oplus 0) = 0 \downarrow (y \oplus 0) = 0 \downarrow y = \overline{0 \vee y} = \bar{y}.$$

$$f(0, y, 1) = 0 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 0) \oplus 1) = 0 \downarrow (y \oplus 1) = 0 \downarrow \bar{y} = \overline{0 \vee \bar{y}} = y.$$

$$f(1, y, 0) = 1 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 1) \oplus 0) = 1 \downarrow (1 \oplus 0) = 1 \downarrow 1 = 0.$$

$$f(1, y, 1) = 1 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 1) \oplus 1) = 1 \downarrow (y \oplus 1) = 1 \downarrow \bar{y} = \overline{1 \vee \bar{y}} = \bar{1} = 0.$$

Тому

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{z} \bar{y} \vee \bar{x} z y \vee x \bar{z} 0 \vee x z 0 = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z.$$

Нехай $T(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = 1\}$. Застосовуючи (4.2) у випадку $k = n$, отримуємо *теорему про розклад булевої функції за усіма змінними*.

Теорема 4.6. Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$, такої, що $f \neq 0$, справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T(f)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Теореми 4.4–4.6 є теоремами про «диз’юнктивний розклад». Має місце теорема про «кон’юнктивний розклад».

Теорема 4.7. Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ і довільного k ($1 \leq k \leq n$) справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{Z}_2^k} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_k^{\sigma_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)), \quad (4.3)$$

де кон’юнкція береться по усім двійковим наборам довжини k .

Доведення випливає із теореми 4.5 та принципу двоїстості.

Приклад 4.16. Провести «кон’юнктивний розклад» функції $f(x, y, z) = x \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \oplus z)$ за змінними x та z .

За формулою (4.3) маємо

$$f(x, y, z) = (x \vee z \vee f(0, y, 0))(x \vee \bar{z} \vee f(0, y, 1))(\bar{x} \vee z \vee f(1, y, 0))(\bar{x} \vee \bar{z} \vee f(1, y, 1)).$$

$$\begin{aligned} \text{Тому } f(x, y, z) &= (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z \vee 0)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee 0) = \\ &= (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

4.3.2. Нормальні форми булевих функцій

Нехай $\{x_1, \dots, x_n\}$ — фіксований набір (алфавіт) змінних.

Формула $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, $\sigma_j \in \mathbb{Z}_2$, $j = \overline{1, r}$, називається *елементарною кон’юнкцією*, побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$. Кількість змінних, які входять в елементарну кон’юнкцію, називається її *рангом*.

Формула $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, $\sigma_j \in \mathbb{Z}_2$, $j = \overline{1, r}$, називається *елементарною диз’юнкцією рангу r* , побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Приклад 4.17. Формула $x_1 \bar{x}_4 x_5$ — елементарна кон’юнкція рангу 3. Формула $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_6$ — елементарна диз’юнкція рангу 4. Формули $x_1 x_2 \bar{x}_1 x_3$ та $x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$ не є ні елементарними кон’юнкціями, ні елементарними диз’юнкціями.

Теорема 4.8. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $3^n - 1$ різних елементарних кон’юнкцій (диз’юнкцій).

Доведення. Для кожної із змінних x_i ($i = \overline{1, n}$) можливим є один із трьох випадків щодо її входження у елементарну кон’юнкцію K :

- а) змінна взагалі не входить у кон'юнкцію;
- б) змінна входить у кон'юнкцію із запереченням;
- в) змінна входить у кон'юнкцію без заперечення.

Тому за комбінаторним правилом множення існує 3^n способів вибору змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ у елементарні кон'юнкції. Відкинувши той спосіб, при якому жодна із змінних не входить у кон'юнкцію, отримаємо твердження теореми про число елементарних кон'юнкцій. Твердження про кількість елементарних диз'юнкцій можна отримати із використанням принципу двоїстості.

Вираз $K_1 \vee \dots \vee K_s$, де K_i — елементарна кон'юнкція, $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (ДНФ), побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Вираз $D_1 \wedge \dots \wedge D_s$, де D_i — елементарна диз'юнкція, $D_i \neq D_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (КНФ), побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Приклад 4.18. Формула $\bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$ — ДНФ, побудована із змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , формула $(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ — КНФ, побудована із тих самих змінних. Формула $x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 x_2$ не є ДНФ (у неї входять дві однакові елементарні кон'юнкції).

Теорема 4.9. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $2^{3^n-1} - 1$ різних ДНФ (КНФ).

Доведення. Кожна з $3^n - 1$ елементарних кон'юнкцій може входити або не входити у ДНФ. Тому існує 2^{3^n-1} різних способів вибору кон'юнкцій. Відкинувши той спосіб, при якому жодна кон'юнкція не вибрана, отримаємо твердження теореми.

Теорема 4.10. Для кожної відмінної від 0 (1) n -місної БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ існує рівносильна їй ДНФ (КНФ).

Алгоритм побудови ДНФ (КНФ) формули над множиною елементарних функцій

1. За допомогою рівносильних перетворень позбавитися від операцій $\oplus, \Leftrightarrow, \Rightarrow$.
2. За допомогою законів де Моргана віднести заперечення до окремих змінних.
3. Відкрити (увести) дужки то звести подібні доданки з використанням законів ідемпотентності, несуперечності, виключення третього та властивостей булевих констант.

Приклад 4.19. Побудувати ДНФ та КНФ БФ $\overline{(xy \oplus \bar{z}) | (\bar{z} \vee zx)} \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ методом рівносильних перетворень.

Розв'язок.

а) Будуємо ДНФ:

$$\begin{aligned} & \overline{(xy \oplus \bar{z}) | (\bar{z} \vee zx)} \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x}) = ((xy \oplus \bar{z}) | (\bar{z} \vee zx)) \vee (\overline{\bar{z} \vee \bar{x}}) = \\ & \left((xyz \vee \overline{xy\bar{z}}) | (\bar{z} \vee x) \right) \vee zx = \left((xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) | (\bar{z} \vee x) \right) \vee zx = \\ & = \overline{(xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee x)} \vee zx = \overline{xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee \overline{\bar{z} \vee x} \vee zx = \\ & = \overline{xyz} \wedge \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee \overline{\bar{z}} \vee \overline{x} \vee zx = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (xy \vee z) \vee z(\bar{x} \vee x) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})xy \vee \\ & \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})z \vee z = \bar{x}xy \vee \bar{y}xy \vee \bar{z}xy \vee z = \bar{z}xy \vee z = xy \vee z. \end{aligned}$$

б) Будуємо КНФ:

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

Приклад 4.20. Побудувати КНФ функції $x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$.

Розв'язок. $x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee \bar{x}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}) \vee \bar{x}z = (x \vee \bar{x}z) \wedge$

$$\wedge (\bar{x}z \vee \bar{z} \vee \bar{y}) = (x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

4.3.3. Досконалі нормальні форми

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція), побудована із змінних x_1, \dots, x_n , називається *повною*, якщо її ранг рівний n .

Повна елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ ($\sigma_i \in \mathbb{Z}_2, i = \overline{1, n}$) приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли $x_1 = \sigma_1, \dots, x_n = \sigma_n$.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ), побудованою із змінних x_1, \dots, x_n , називається диз'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних кон'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ), побудованою із змінних x_1, \dots, x_n , називається кон'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних диз'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Приклад 4.21. $xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ — ДДНФ, побудована із змінних $\{x, y, z\}$, $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$ — ДКНФ, побудована із тих самих змінних.

Теорема 4.11. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $2^{2^n} - 1$ різних ДДНФ (ДКНФ).

Доведення самостійно.

Теорема 4.12. Для кожної відмінної від 0 (1) n -місної БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ існує єдина рівносильна їй ДДНФ (ДКНФ).

Доведення. Нехай $f \neq 0$. Скористаємося теоремою 4.6 про розклад БФ за усіма змінними:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T(f)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Права частина рівності містить диз'юнкцію повних елементарних кон'юнкцій, тобто ДДНФ. Тому для кожної БФ, відмінної від 0, існує принаймні одна ДДНФ. Єдиність ДДНФ для кожної БФ випливає з того, що згідно з теоремами 4.2 та 4.11 кількість n -місних БФ рівна кількості різних ДДНФ, які можна побудувати із n змінних.

Наслідок. Довільну БФ можна записати у вигляді формули над системою функцій $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Розглянемо два методи побудови ДДНФ (ДКНФ).

1) Метод рівносильних перетворень:

а) За допомогою рівносильних перетворень будується ДНФ (КНФ) БФ, заданої формулою.

б) Проводиться *поповнення* неповних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) за допомогою формул:

$$\text{I) } K = K \wedge 1 = K \wedge (x \vee \bar{x}) = Kx \vee K\bar{x}.$$

$$\text{II) } D = D \vee 0 = D \vee x\bar{x} = (D \vee x)(D \vee \bar{x}).$$

в) Записується диз'юнкція *різних* елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцій), яка і є шуканою ДДНФ (ДКНФ).

2) Табличний метод:

а) Будується таблиця значень БФ.

б) Відмічаються набори $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на яких функція приймає значення 1 (0).

в) Кожному такому набору ставиться у відповідність *повна* елементарна кон'юнкція $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (елементарна диз'юнкція $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$).

г) Записується диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцій), яка і є шуканою ДДНФ (ДКНФ).

Приклад 4.22. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x, y, z) = \overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ (функції прикладу 4.19) з використанням табличного методу та методу рівносильних перетворень.

Розв'язок.

1) Побудуємо таблицю значень функції $f(x, y, z)$.

Таблиця 4.8. Таблиця значень функції $f(x, y, z)$

x	y	z	xy	\bar{z}	$xy \oplus \bar{z}$	zx	$\bar{z} \vee zx$	$(xy \oplus \bar{z}) (\bar{z} \vee zx)$	$\overline{(xy \oplus \bar{z}) (\bar{z} \vee zx)}$	\bar{x}	$\bar{z} \downarrow \bar{x}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Для побудови ДДНФ відмічаємо у табл. 4.8 2-й, 4-й, 6-й, 7-й та 8-й набори.

Записуємо відповідні повні елементарні кон'юнкції:

$$x^0 y^0 z^1 = \bar{x} \bar{y} z, \quad x^0 y^1 z^1 = \bar{x} y z, \quad x^1 y^0 z^1 = x \bar{y} z, \quad x^1 y^1 z^0 = x y \bar{z}, \quad x^1 y^1 z^1 = x y z.$$

Записуємо ДДНФ: $\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z} \vee x y z$.

Для побудови ДКНФ відмічаємо 1-й, 3-й та 5-й набори та записуємо відповідні елементарні диз'юнкції:

$$x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z, \quad x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \bar{y} \vee z, \\ x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = \bar{x} \vee y \vee z.$$

Записуємо ДКНФ: $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)$.

2) Після спрощень отримаємо запис функції за допомогою ДНФ $f(x, y, z) = xy \vee z$ (див. приклад 4.19).

Проведемо поповнення елементарних кон'юнкцій:

$$xy = xy \wedge 1 = xy(z \vee \bar{z}) = xyz \vee xy\bar{z}.$$

$$z = (x \vee \bar{x})z = xz \vee \bar{x}z = x(y \vee \bar{y})z \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Записуємо ДДНФ: $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$.

Для знаходження ДКНФ використаємо КНФ $(x \vee z)(y \vee z)$ функції f та виконаємо поповнення елементарних диз'юнкцій:

$$x \vee z = x \vee z \vee 0 = x \vee z \vee y \bar{y} = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z).$$

$$y \vee z = y \vee z \vee x \bar{x} = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

$$\text{Записуємо ДКНФ: } (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

4.3.4. Поліноми Жегалкіна

Поліномом (многочленом) Жегалкіна називається вираз вигляду

$$\tilde{K}_0 \oplus \tilde{K}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{K}_m,$$

де $\tilde{K}_0 \in \mathbb{Z}_2$, \tilde{K}_i — різні елементарні кон'юнкції, які не містять заперечення змінних, $i = \overline{1, m}$.

Степенем полінома Жегалкіна називається максимальний із рангів елементарних кон'юнкцій, які входять у поліном.

Приклад 4.23. $1 \oplus y \oplus xz \oplus xuz$ — поліном Жегалкіна 3-го степеня.

Алгоритм побудови полінома Жегалкіна БФ $f(x_1, \dots, x_n)$.

1. Побудувати ДДНФ $K_1 \vee \dots \vee K_s$ функції $f(x_1, \dots, x_n)$, де K_i — повні елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.
2. Замінити формулу $K_1 \vee \dots \vee K_s$ рівносильною їй формулою $K_1 \oplus \dots \oplus K_s$.
3. Для кожної змінної x_i виконати заміну \bar{x}_i на $x_i \oplus 1$, $i = \overline{1, n}$.
4. Розкрити дужки та звести подібні доданки з використанням того, що $x \oplus x = 0$.

Обґрунтування алгоритму. Пояснення потребує лише другий крок алгоритму, оскільки для довільних БФ $f, g \in P_2$ $f \vee g \neq f \oplus g$. Покажемо, що для довільних різних повних елементарних кон'юнкцій K_1, K_2 та довільного $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ $K_1(\mathbf{a}) \vee K_2(\mathbf{a}) = K_1(\mathbf{a}) \oplus K_2(\mathbf{a})$.

Оскільки кожна повна елементарна кон'юнкція приймає значення 1 лише на одному наборі, то неможливим є одночасне виконання рівностей $K_1(\mathbf{a}) = 1$, $K_2(\mathbf{a}) = 1$.

$$\text{Якщо } K_1(\mathbf{a}) = K_2(\mathbf{a}) = 0, \text{ то } K_1(\mathbf{a}) \vee K_2(\mathbf{a}) = 0 \vee 0 = 0 \oplus 0 = K_1(\mathbf{a}) \oplus K_2(\mathbf{a}).$$

Якщо $K_1(\mathbf{a}) = 1$ та $K_2(\mathbf{a}) = 0$, то $K_1(\mathbf{a}) \vee K_2(\mathbf{a}) = 1 \vee 0 = 1 \oplus 0 = K_1(\mathbf{a}) \oplus K_2(\mathbf{a})$.

Випадок $K_1(\mathbf{a}) = 0$, $K_2(\mathbf{a}) = 1$ аналізується аналогічно.

Теорема 4.13. Для кожної БФ $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ існує єдиний рівносильний їй поліном Жегалкіна.

Доведення. Існування полінома Жегалкіна для довільної БФ впливає з можливості застосування вищенаведеного алгоритму до довільної БФ, відмінної від нуля (якщо $f = 0$, то 0 — поліном Жегалкіна функції f). Єдиність впливає із того, що кількість різних поліномів Жегалкіна, які можна побудувати із n змінних, рівна 2^{2^n} , і це число співпадає із кількістю різних n -місних БФ.

Приклад 4.24. Побудувати поліном Жегалкіна наступної булевої функції $f(x, y, z) = \overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$.

Запишемо ДДНФ $f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z} \vee x y z$

Замінімо " \oplus " на " \vee ": $f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \oplus \bar{x} y z \oplus x \bar{y} z \oplus x y \bar{z} \oplus x y z$.

Замінімо \bar{x} на $x \oplus 1$:

$$f(x, y, z) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz.$$

Виконаємо спрощення:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \oplus 1)((y \oplus 1)z \oplus yz) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1 \oplus z) = \\ &= (x \oplus 1)(yz \oplus z \oplus yz) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy = (x \oplus 1)z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = \\ &= xz \oplus z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = xyz \oplus xy \oplus z. \end{aligned}$$

4.4. Застосування булевих функцій в теорії контактних та логічних схем

4.4.1. Контактні схеми

Під *мережею* будемо розуміти деякий скінченний набір *вершин*, між деякими парами з яких встановлені зв'язки.

Будемо вважати, що у множині вершин мережі виділено спеціальні вершини, які називаються *полюсами*.

Під *контактною схемою* будемо розуміти мережу із двома полюсами (джерелом та стоком), ребра (зв'язки) якої називаються *контактами* і помічені змінними x_1, \dots, x_n або їх запереченнями.

Якщо контакт помічений змінною без заперечення, то він називається *замикальним*, у протилежному випадку — *відмикальним*. Приклади контактних схем наведено на рис. 4.1.

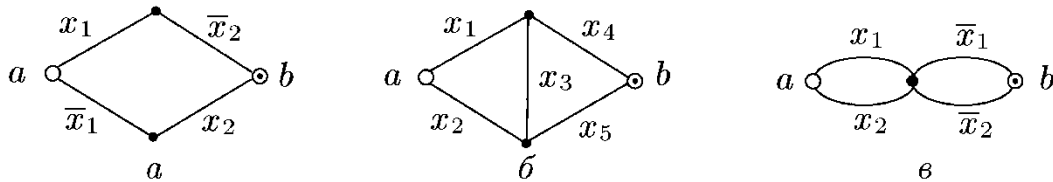


Рис. 4.1. Контактні схеми

Функція $f(\tilde{x}) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}$, де диз'юнкція береться по усім простим шляхам (які не містять кратні вершини) від входу a до виходу b , називається *функцією провідності контактної схеми*.

Приклад 4.25. Вказати функції провідності схем, наведених на рис. 4.1.

Розв'язок.

а) $f(\tilde{x}) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$;

б) $f(\tilde{x}) = x_1 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4$;

в) $f(\tilde{x}) = x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Часто при зображенні контактних схем використовуються провідники та ключі-перемикачі, які ставляться у відповідність кожній змінній. При цьому послідовне з'єднання провідників відповідає кон'юнкції (рис. 4.2), а паралельне з'єднання — диз'юнкції (рис. 4.3).

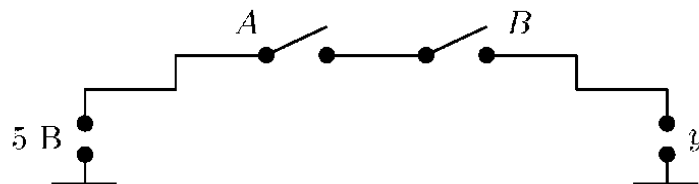


Рис. 4.2. Послідовні ключі

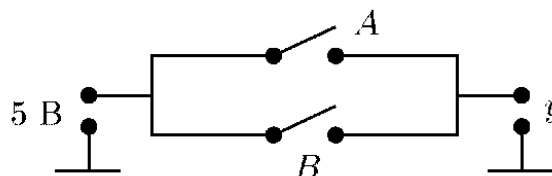


Рис. 4.3. Паралельні ключі

Для фізичної реалізації заперечення використовується реле з розмикальним контактом, схема якого наведена на рис. 4.4. Якщо по обвитці A струм не

проходить ($x=0$), то пружина відтягує контакт B уверх і ланцюг замикається. Якщо ($x=1$), то контакт B притягується і на виході C струму нема.

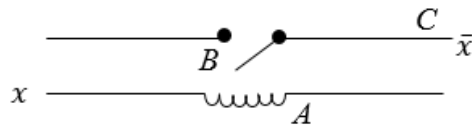


Рис. 4.4. Реле з розмикальним контактом

Складністю контактної схеми називається кількість контактів схеми. Так, наприклад, контактні схеми, зображені на рис. 4.1 а та рис. 4.1 в, мають складність 4, а контактна схема з рис. 4.1 б має складність 5.

Приклад 4.26. Для функції $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ побудувати контактну схему, яка реалізує цю функцію та має мінімальну можливу складність.

Розв'язок. Спростимо функцію провідності схеми.

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 &= (x_1 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = \\ &= x_1\bar{x}_3 \vee x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1\bar{x}_3 \vee x_2. \end{aligned}$$

Отримана формула суттєво залежить від трьох змінних. Тому складність відповідної цій функції контактної схеми не може бути меншою за 3. Контактна схема складності 3 зображена на рис. 4.5.

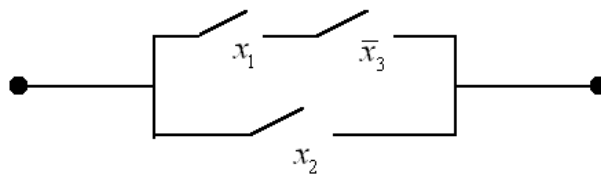


Рис. 4.5. Контактна схема

Приклад 4.27. Побудувати якомога простішу контактну схему, функція провідності якої залежить від трьох змінних і має номер 220.

Розв'язок. $220 = 128 + 64 + 16 + 8 + 4 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2$.

Звідси отримуємо вектор значень функції $\mathbf{f} = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$, на основі якого будуємо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (див. табл. 4.9).

Запишемо ДКНФ функції $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Проведемо спрощення:

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = \\ & = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \vee (x_1 \vee x_3)\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3. \end{aligned}$$

Зобразимо відповідну контактну схему (див. рис. 4.6) складності 3.

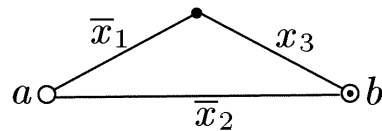


Рис. 4.6. Контактна схема до прикладу 4.27

Таблиця 4.9

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Приклад 4.28. Комітет складається із чотирьох учасників. Рішення приймається більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення приймається, якщо голова комітету «голосує за». Побудувати контактну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.

Розв'язок. Поставимо у відповідність кожному члену комісії булеву змінну x_i таким чином, щоб $x_i = 1$ тоді і тільки тоді, якщо i -й член комітету «голосує за», $i = 1, 2, 3, 4$ (голови комітету відповідає змінна x_1). Розглянемо БФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яка приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли комітет приймає рішення. Легко бачити, що $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4$. Контактна схема, яка реалізує функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, наведена на рис. 4.7. З рис. 4.7 видно, що побудована схема має складність 7. Слід зазначити, що схема, побудована на основі ДДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (без спрощень), має складність 36.

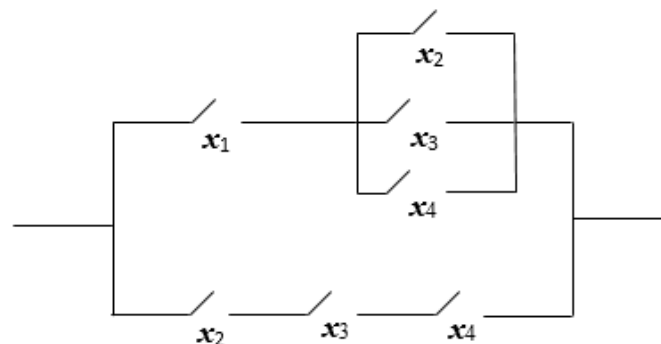


Рис. 4.7. Схема до прикладу 4.28

4.4.2. Схеми із логічних елементів

Логічні схеми у комп'ютерах та інших електронних пристроях оперують з наборами вхідних та вихідних даних, що складаються з нулів та одиниць. Булеві функції використовуються для *аналізу* та *синтезу* логічних схем.

Логічний елемент — пристрій, який реалізовує деяку булеву функцію. Його входи відповідають булевим змінним, а виходи — значенню функції. Найбільш вживані логічні елементи наведені на рис. 4.8.

Логічна схема будується з логічних елементів і зображає суперпозицію цих елементів. Складністю логічної схеми називається кількість логічних елементів, які входять у схему.

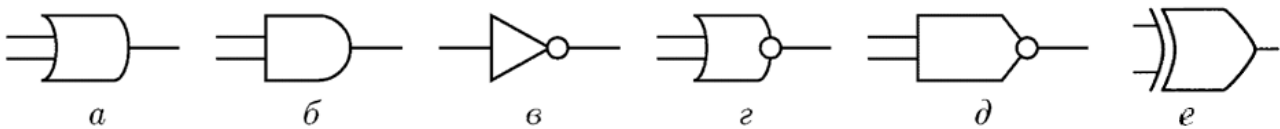


Рис. 4.8. Зображення логічних елементів в стандарті ISO

а) диз'юнктор; б) кон'юнктор; в) інвертор; г) стрілка Пірса; д) штрих Шеффера; е) суматор за mod 2

За наслідком до теореми 4.12 будь-яку булеву функцію можна записати у вигляді формули над системою $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Тому довільну булеву функцію можна реалізувати схемою з інверторів, кон'юнкторів та диз'юнкторів. Оскільки

$$\bar{x} = x \downarrow x, \quad xy = \bar{x} \downarrow \bar{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y), \quad x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y),$$

то будь-яку БФ можна реалізувати за допомогою схеми, яка містить лише елементи, які реалізують стрілку Пірса.

Приклад 4.29. Побудувати схему, яка реалізує функцію $f(x, y, z) = (x \vee y)z$.

Розв'язок. Відповідна схема складності 2 зображена на рис. 4.9.

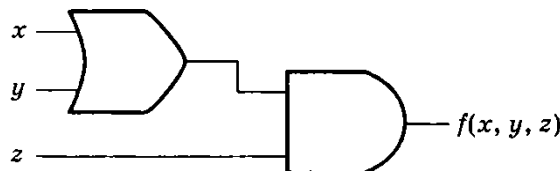


Рис. 4.9. Логічна схема для функції $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

Приклад 4.30. Реалізувати функцію $f(x, y, z) = \overline{(xy \oplus \bar{z})} | \overline{(\bar{z} \vee zx)} \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ за допомогою логічної схеми із кон'юнкторів та суматорів за модулем 2.

Розв'язок. Скористаємося поліномом $xz \oplus z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = xyz \oplus xy \oplus z$ функції $f(x, y, z)$, отриманим у прикладі 4.24. Схема, яка реалізує цей поліном і має складність 4, наведена на рис. 4.10.

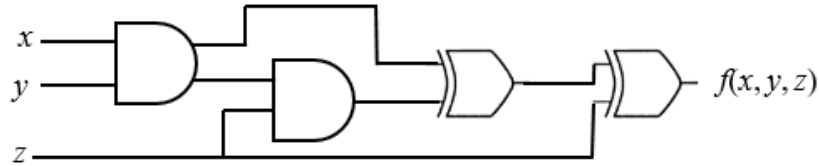


Рис. 4.10. Логічна схема з кон'юнкторів та суматорів за модулем 2

У теорії логічних схем розглядаються дві основні задачі: аналіз та синтез.

Аналіз логічної схеми полягає у побудові булевої функції, яку реалізує даний логічний пристрій (схема). За даною логічною схемою можна побудувати формулу, що відповідає шуканій функції або вказати значення функції для всіх наборів вхідних даних.

Приклад 4.31. Проаналізувати логічну схему, наведену на рис. 4.11.

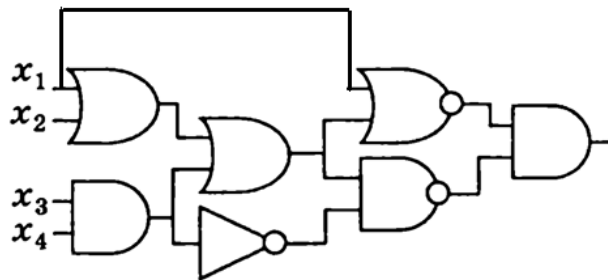


Рис. 4.10. Логічна схема

Розв'язок. Запишемо формулу для функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яку реалізує логічна схема:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4) \downarrow x_1) \wedge ((x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4) | \overline{x_3 x_4}).$$

Задача синтезу схеми полягає у побудові логічної схеми, яка реалізує дану булеву функцію. Функція може бути задана таблицею або за допомогою формули. Використовуючи правила побудови ДДНФ та ДКНФ, можна отримати формулу над множиною $\{\neg, \wedge, \vee\}$, а потім реалізувати операції формули за допомогою відповідних логічних елементів.

Вартість логічної схеми залежить від її складності. Тому часто поряд з двома вищенаведеними задачами розглядають *задачу спрощення логічної схеми*.

Приклад 4.32. Спростити логічну схему із прикладу 4.31.

Розв'язок. Спростимо формулу для БФ, яка реалізується схемою складності 7, наведеною на рис. 4.11:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4} \wedge \overline{(x_1 \vee x_2) x_3 x_4} = \overline{x_1 \vee x_2 x_3 x_4} (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4}) = \overline{x_1 \vee x_2 x_3 x_4} x_1 \vee x_2 \vee \overline{\vee x_1 \vee x_2 x_3 x_4 x_3 x_4} = \overline{x_1 \vee x_2 x_3 x_4} = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4} = (x_1 \vee x_2) \downarrow (x_3 x_4).$$

Реалізуємо отриману формулу схемою (див. рис. 4.12), яка має складність 3.

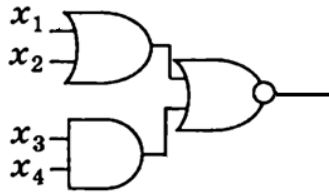


Рис. 4.12. Схема після спрощення

Приклад 4.33. Побудувати логічну схему для знаходження суми двох її бітових входів.

Розв'язок. Запишемо значення функції $f(x_1, x_2)$ — арифметичної суми $x_1 + x_2$ для усіх можливих комбінацій значень входів схеми (булевих змінних x_1 та x_2). Оскільки сума змінюється в межах від 0 до 2, то необхідно використати два двійкові розряди для кодування f . Позначимо їх f_1 та f_2 таким чином, щоб $f = 2 \cdot f_1 + f_2$ (див. табл. 4.10).

Таблиця 4.10

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	2	1	0

Побудуємо ДДНФ функцій f_1 та f_2 :

$$f_1 = x_1 x_2, \quad f_2 = x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \vee x_1 x_2.$$

Реалізуємо функції за допомогою логічної схеми (див. рис. 4.13).

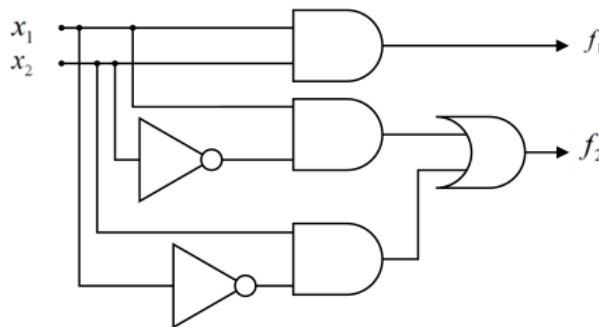


Рис. 4.13. Схема до прикладу 4.33

4.5. Задачі до четвертого розділу

Булеві вектори

- Вказати номер та норму Хеммінга булевого вектора
 - $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$.
 - $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$.
- Знайти $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, якщо
 - $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^7$, $N(\mathbf{x}) = 49$, $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}} \vee \mathbf{y}$.
 - $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^7$, $N(\mathbf{y}) = 101$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus \bar{\mathbf{y}}$.
- Обчислити
 - $(\bar{\mathbf{y}} \lll 4) \oplus (\mathbf{x} \gg \|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\mathbf{y}) = 112$, $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$.
 - $(\mathbf{y} \gg \gg 5) \wedge (\bar{\mathbf{x}} \ll \|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\mathbf{x}) = 59$, $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$.

Булеві функції

- Побудувати таблицю значень булевих функцій $f(x, y, z)$ і $f^*(x, y, z)$ та вказати їх номери, якщо
 - $f(x, y, z) = x | (\bar{y} \downarrow z) \oplus (z \Rightarrow \bar{x})$.
 - $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow (z \vee \bar{y})) \Leftrightarrow (z | \bar{y})$.
- Вказати суттєві та видалити фіктивні змінні функції $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо
 - $N(\mathbf{f}) = 250$.
 - $N(\mathbf{f}) = 153$.
- Перевірити, чи є самодвоїстою булева функція $f(x, y, z)$, якщо
 - $f(x, y, z) = (x \oplus \bar{y}) \Leftrightarrow z$.
 - $f(x, y, z) = (\bar{x} | (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x\bar{z}) \downarrow y)$.
- Знайти номер функції $f^*(x, y, z)$, якщо
 - $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow z) \oplus y$.
 - $f(x, y, z) = (\bar{y} \Leftrightarrow z) | x \downarrow \bar{z}$.
- Задати функцію $f(x, y, z)$ формулою над множиною функцій $\{\neg, \vee, \wedge\}$, якщо
 - $f(x, y, z) = z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y) \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} | x))$.
 - $f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} | (\bar{y} \oplus z))$.
- Задати функцію $f^*(x, y, z, t)$ формулою над множиною функцій $\{\neg, \vee, \wedge\}$, якщо

$$\text{а) } f(x, y, z, t) = \overline{x\bar{y} \vee \bar{z}}(yt \Rightarrow \bar{z}) \vee (\bar{z} \oplus t).$$

$$\text{б) } f(x, y, z, t) = (x \oplus \bar{y}t)(zt \Rightarrow \bar{x}) \vee (x\bar{y} \downarrow \bar{z}).$$

Спеціальні форми подання БФ

1. Розкласти булеву функцію $f(x, y, z)$ за змінними x та y :

$$\text{а) } f(x, y, z) = \overline{z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y)} \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} | x));$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} | (\bar{y} \oplus z)).$$

2. Побудувати ДНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:

$$\text{а) } f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) | (x \oplus \bar{z});$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) | (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z)).$$

3. Побудувати КНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:

$$\text{а) } f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) | (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z));$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) | (x \oplus \bar{z}).$$

4. За таблицею значень булевої функції $f(x, y, z)$ побудувати її ДДНФ та ДКНФ.

$$\text{а) } f(x, y, z) = \overline{\bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z)} \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \overline{\bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x})}.$$

5. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:

$$\text{а) } f(x, y, z) = \overline{\bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z)} \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \overline{\bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x})}.$$

6. Побудувати поліном Жегалкіна булевої функції $f(x, y, z)$, якщо

$$\text{а) } f(x, y, z) = \overline{\bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z)} \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \overline{\bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x})}.$$

Основні поняття теорії логічних та контактних схем

1. Вказати функції провідності контактних схем, наведених на рис. 4.14, 4.15:

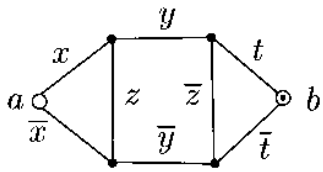


Рис. 4.14

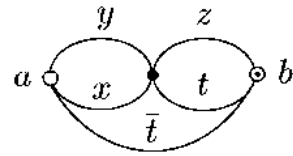


Рис. 4.15

2. Вказати функції провідності логічних схем, наведених на рис. 4.16, 4.17:

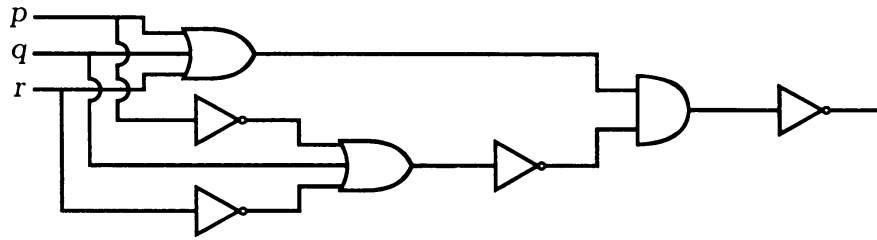


Рис. 4.16

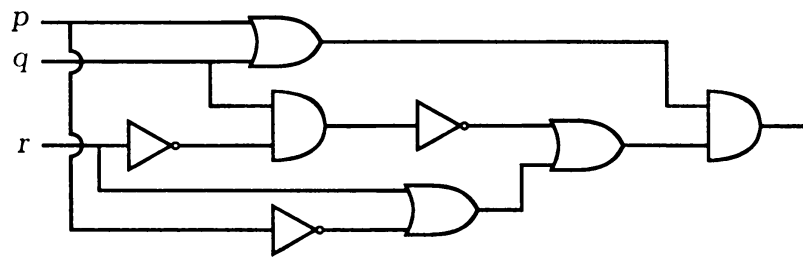


Рис. 4.17

3. Спростити логічні схеми, наведені на рис. 4.18–4.20:

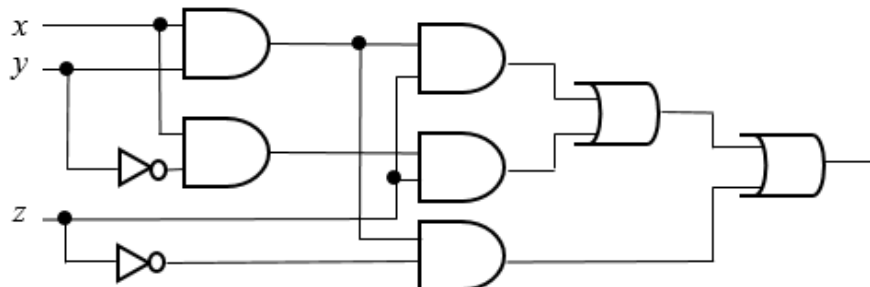


Рис. 4.18

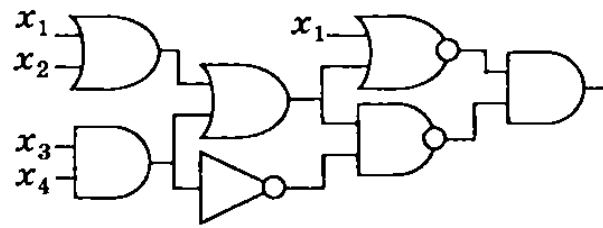


Рис. 4.19

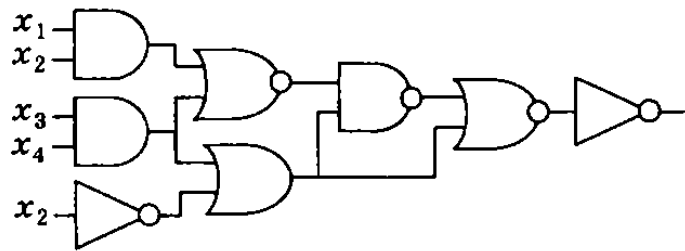


Рис. 4.20

4. Спростити контактні схеми, зображені на рис. 4.21–4.24:

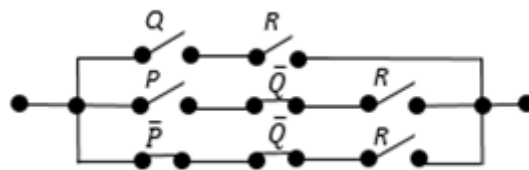


Рис. 4.21

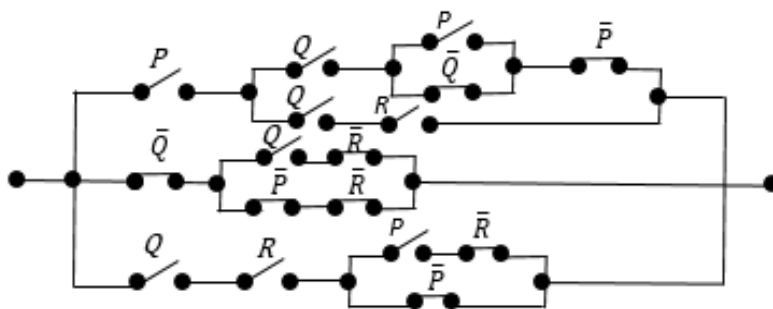


Рис. 4.22

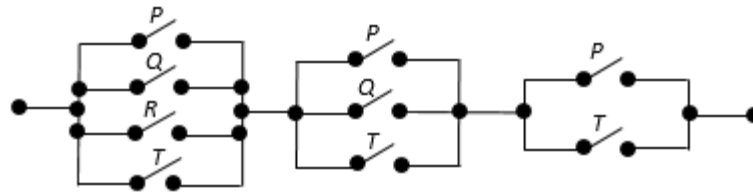


Рис. 4.23

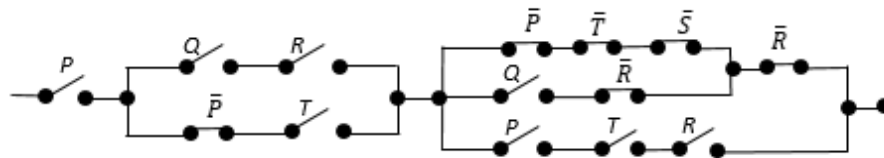


Рис. 4.24

5. Побудувати логічну схему для:
 - а) обчислення норми Хеммінга 3-вимірного вектора;
 - б) реалізації функції, двоїстої до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} | \bar{y}) \oplus (\bar{z} \Rightarrow y \downarrow x)$.
6. Побудувати логічну схему для:
 - а) обчислення скалярного добутку двовимірних булевих векторів;
 - б) обчислення максимуму із двох чисел, кожне з яких лежить у межах від 0 до 3.
7. Побудувати логічну схему для:
 - а) обчислення добутку двобітових чисел;
 - б) обчислення суми трьох бітових змінних.
8. У великій кімнаті світло має включатися або виключатися за допомогою одного з трьох вимикачів. Побудувати відповідну контактну схему.
9. Комітет складається із п'яти учасників. Рішення виносяться більшістю голосів. Якщо голова комітету голосує проти, то рішення не приймається. Побудувати логічну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.
10. Комітет складається із чотирьох членів. Рішення приймається більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення не приймається. Побудувати контактну схему для забезпечення процесу голосування.
11. Кандидат відповідає на три питання. Побудувати логічну схему із двома виходами для виводу кількості неправильних відповідей.

5. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

5.1. Основні поняття теорії графів

5.1.1. Предмет теорії графів. Основні означення.

Виникнення теорії графів пов'язано із задачею про Кенігсберзькі мости. Схема Кенігсберга наведена на рис. 5.1. Потрібно обійти усі чотири ділянки суші, пройшовши по кожному мосту один раз.

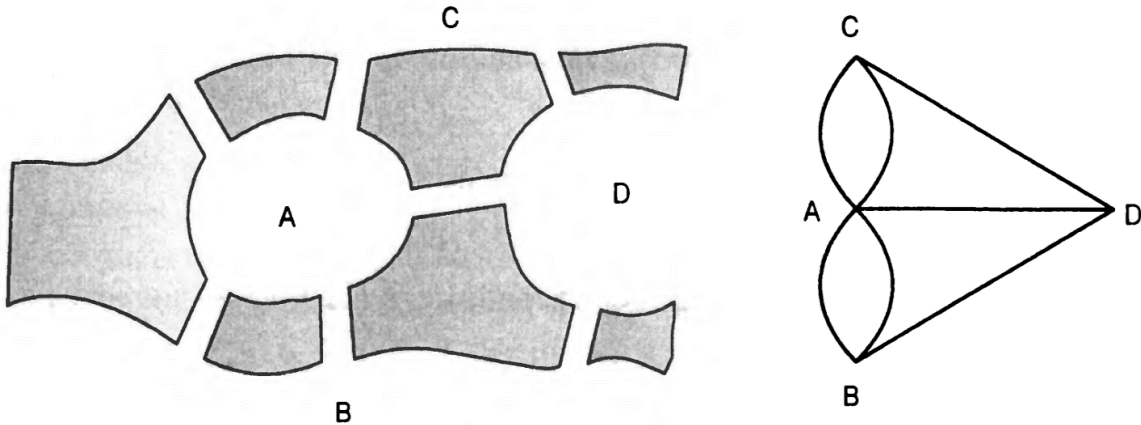


Рис. 5.1. Кенігсберзькі мости

Ще однією класичною задачею є задача про три криниці. Потрібно прокласти стежки від кожного будинку до кожної криниці таким чином, щоб стежки не перетиналися (див. рис. 5.2).

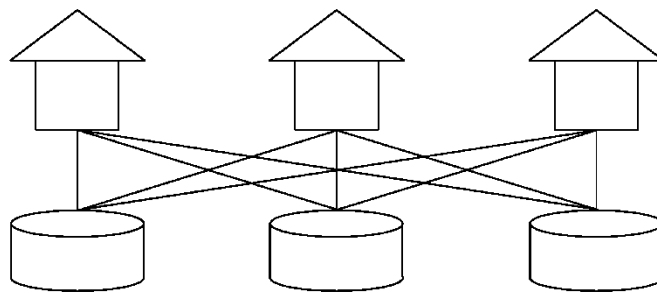


Рис. 5.2. Ілюстрація до задачі про три криниці

Мультимножина (набір) — неупорядкована система об'єктів, можливо із повтореннями. При записі елементи мультимножини будемо записувати у квадратних дужках (див. підрозділ 3.2).

Приклад мультимножини: $[a, b, b, c, a, a]$.

Графом G називається пара (V, E) , де V — множина вершин графа, E — мультимножина ребер графа.

Якщо множини V та E — скінченні, то граф називається *скінченним*.

Елементи мультимножини E називаються *ребрами* графа. Ребро e , яке з'єднує вершини a та b позначається $\langle a, b \rangle$ ($e = \langle a, b \rangle \in E$, $a, b \in V$), при цьому вершини a та b називаються *суміжними* та *інцидентними* ребру e . Виокремлюють три види ребер:

- *ланки* або неупорядковані ребра ($e = \{a, b\} \in \bar{E}$). Набір ланок позначається \bar{E} ;
- *дуги* або впорядковані ребра ($e = (a, b) \in \vec{E}$), \vec{E} — набір дуг;
- *петлі* — ребра вигляду $e = (a, a)$, початок і кінець якого співпадають.

Надалі будемо вважати, що *усі графи є скінченними* і петлі є різновидом дуг, тому $E = \bar{E} \cup \vec{E}$.

Кількість вершин графа називається його *порядком*. Приклад діаграми графа наведено на рис. 5.3.

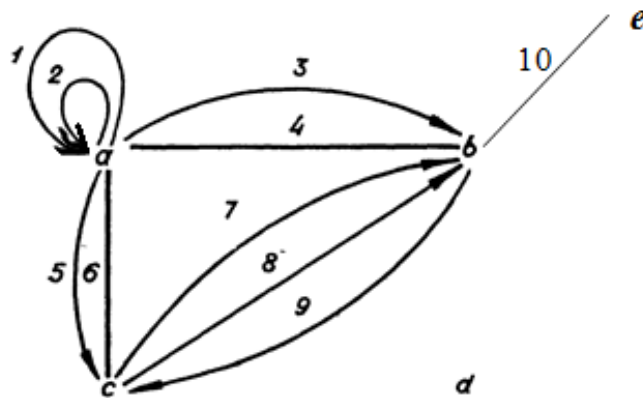


Рис. 5.3. Діаграма графа

Кількість ланок, інцидентних вершині v , будемо позначати $\overline{\deg}(v)$.

Кількість дуг, які входять у вершину v , будемо позначати $\deg^+ v$.

Кількість дуг, які виходять із вершини v , будемо позначати $\deg^- v$.

Величина $\deg v$, яка обчислюється за формулою

$$\deg v = \overline{\deg} v + \deg^+ v + \deg^- v,$$

називається *степеню вершини v* .

Приклад 5.1. Обчислити степінь вершини a графа, діаграма якого зображена на рис. 5.3.

Розв'язок. $\overline{\deg}(a) = 2$, $\deg^+(a) = 2$, $\deg^-(a) = 4$, $\deg(a) = 2 + 2 + 4 = 8$.

Вершина v називається *ізолюваною*, якщо $\deg(v) = 0$.

Вершина v називається *висячою*, якщо $\deg(v) = 1$.

У графі, наведеному на рис. 5.3, вершина d є ізолюваною, а вершина e — висячою.

Лема про рукостискання. Для довільного графа (V, E)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|;$$

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) + \sum_{v \in V} \deg^-(v) = 2|\vec{E}|.$$

Граф $G_1 = (E_1, V_1)$ називається *підграфом* графа $G = (V, E)$, якщо $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$.

Приклад 5.2. Граф, діаграма якого наведена на рис. 5.4, є підграфом графа з рис. 5.3.

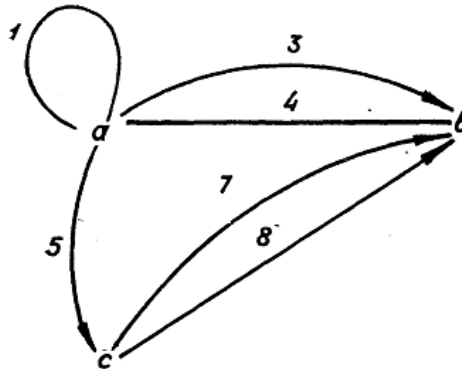


Рис. 5.4. Підграф графа, наведеного на рис. 5.3

Ізоморфізм графів — це бієкція (взаємно-однозначна відповідність) множин вершин графів, яка зберігає суміжність вершин. Тобто графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ *ізоморфні*, якщо бієкція $f : V_1 \rightarrow V_2$ задовольняє умову:

$$\text{для довільних } a, b \in V_1 \quad \langle a, b \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(a), f(b) \rangle \in E_2.$$

Теорема 5.1. Ізоморфізм графів є відношенням відношення еквівалентності (на множині графів).

Приклад 5.3. Графи, діаграми яких наведені на рис. 5.5, є ізоморфними.

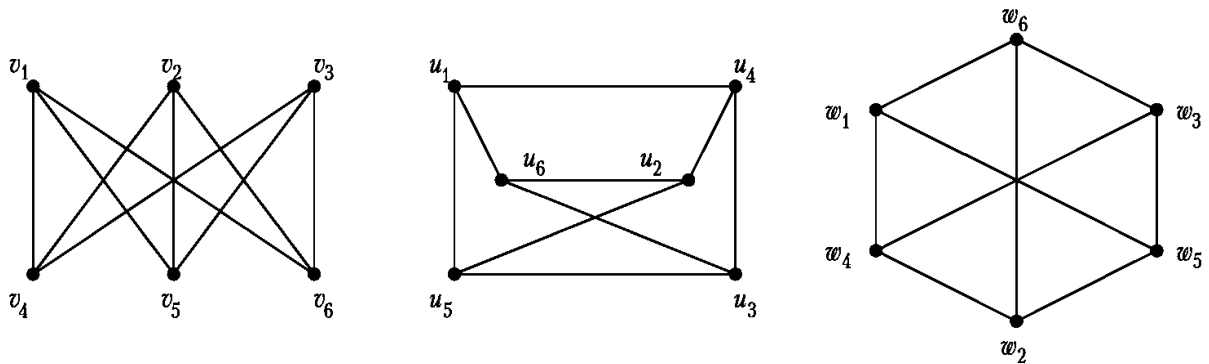


Рис. 5.5. Ізоморфні графи

Слід зазначити, що кількість вершин, ребер та степені вершин не визначають граф однозначно. На рис. 5.6. наведено діаграми двох неізоморфних графів, для яких усі відповідні параметри співпадають:



Рис. 5.6. Діаграми неізоморфних графів

5.1.2. Способи задання графів.

Основні способи задання графів:

а) *перелік елементів*: Множин E та V задаються переліком їх елементів.

Приклад 5.4. Задамо переліком елементів граф, діаграма якого наведена на рис. 5.3:

$$G = (V, E), V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{e_1 = (a, a), e_2 = (a, a), e_3 = (a, b), e_4 = \{a, b\}, e_5 = (a, c), e_6 = \{a, c\}, e_7 = (c, b), e_8 = (c, b), e_9 = (b, c), e_{10} = \{b, e\}\};$$

б) графічна інтерпретація (діаграма);

в) *матриця інцидентності*.

Рядки матриці відповідають вершинам, стовпці — ребрам. Елементи матриці інцидентності $B(G) = (b_{ij})$, $(i = 1, \dots, |V|, j = 1, \dots, |E|)$ визначаються наступним чином:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна ребру } e_j, \\ -1, & \text{якщо } e_j \text{ — дуга, яка не є петлею і виходить з вершини } v_i, \\ 1, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для графа, наведеного на рис. 5.3,

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

г) *матриця суміжності* (сусідства)

Матриця сусідства $A(G) = (a_{ij})$ — квадратна матриця порядку $|V|$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$a_{ij} = \alpha \bar{a}_{ij} + \beta \vec{a}_{ij},$$

де \bar{a}_{ij} — кількість ланок, які з'єднують вершини v_i та v_j , \vec{a}_{ij} — кількість дуг, які виходять із вершини v_i і входять у вершину v_j .

Для графа з рис. 5.3 матриця суміжності має вигляд:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 2\beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \alpha & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.3. Основні види графів.

Виокремлюють наступні види графів:

- 1) порожній граф (або 0-граф) ($V = \emptyset$);
- 2) *неорієнтований граф* ($E = \bar{E}$);
- 3) *звичайний граф* (неорієнтований без кратних ребер);
- 4) *орієнтований граф* (усі ребра — дуги, тобто $E = \vec{E}$);

Неорієнтований граф $G' = (V, E')$ називається *відповідним* до орієнтованого графа $G = (V, E)$, якщо $E' = \{\{a, b\} | (a, b) \in E\}$. Граф, діаграма якого наведена на рис. 5.7 а) є відповідним до графа на рис. 5.7 б).

- 5) *мультиграф* (допустимими є кратні ребра);

- б) псевдограф (мультиграф, для якого допускаються петлі);
 7) дводольний (біхроматичний) граф — множина вершини V розбивається на дві множини V_1, V_2 ($V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$) так, що кожне ребро інцидентне одній вершині з V_1 та одній вершині з V_2 ;

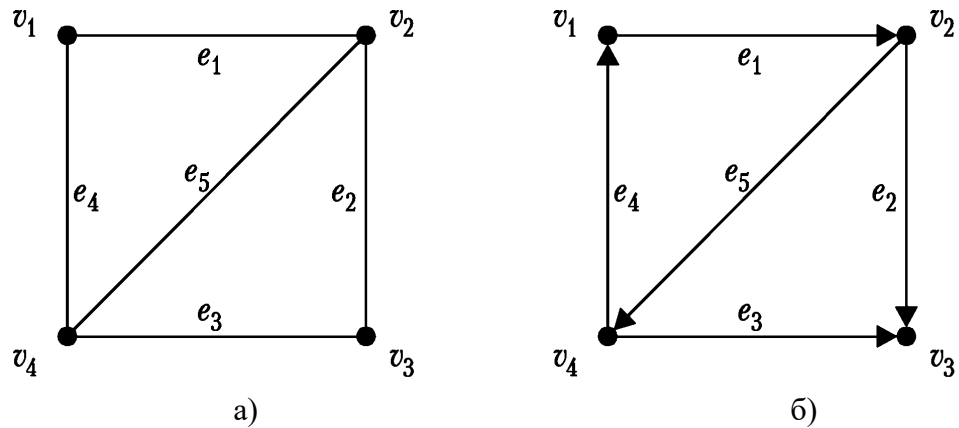


Рис. 5.7. Діаграми звичайного а) та орієнтованого б) графів

- 8) граф Кеніга — звичайний дводольний граф (див. рис. 5.8);

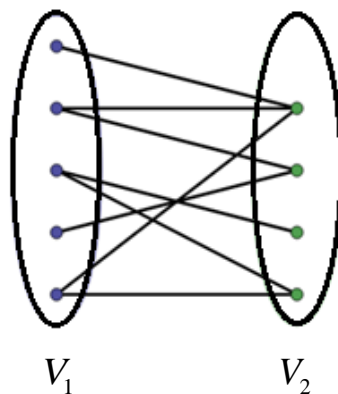


Рис. 5.8. Граф Кеніга

- 9) повний граф — граф, який містить усі ребра для графів заданого типу:
 а) K_n — повний звичайний граф;

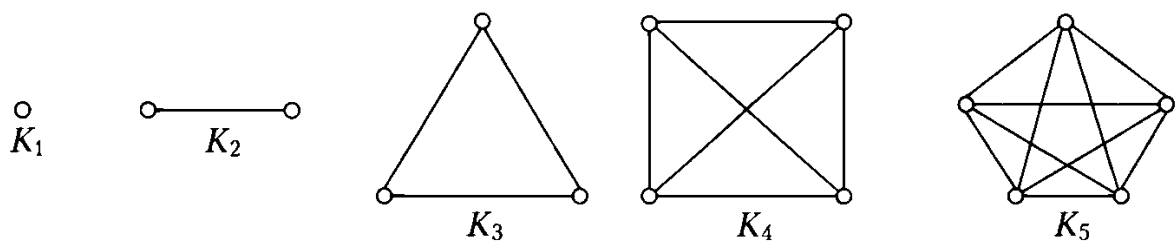


Рис. 5.9. Повні графи K_n для $n = 1, 2, 3, 4, 5$

б) $K_{n,m}$ — повний граф Кеніга (n та m — кількості елементів множин V_1 та V_2 , відповідно);

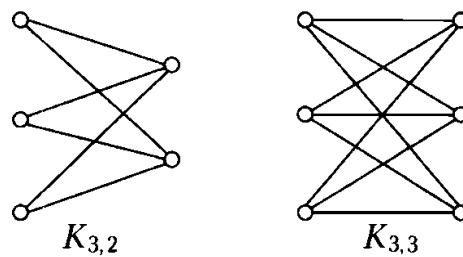


Рис. 5.10. Повні графи Кеніга

Граф $K_{1,m}$ називається *зірковим*.

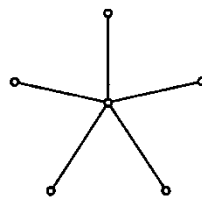


Рис. 5.11. Зірковий граф $K_{1,5}$

10) *Однорідні* (регулярні) графи степені d — звичайні графи, степені усіх вершин яких рівні d ($\forall v \in V \deg v = d$).

Зв'язний однорідний граф степені 2 називається *циклічним графом*. Циклічний граф n -го порядку позначається C_n .

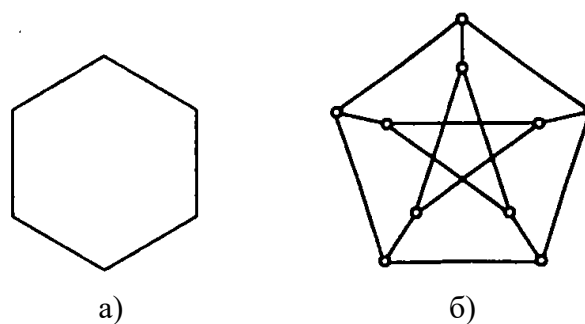
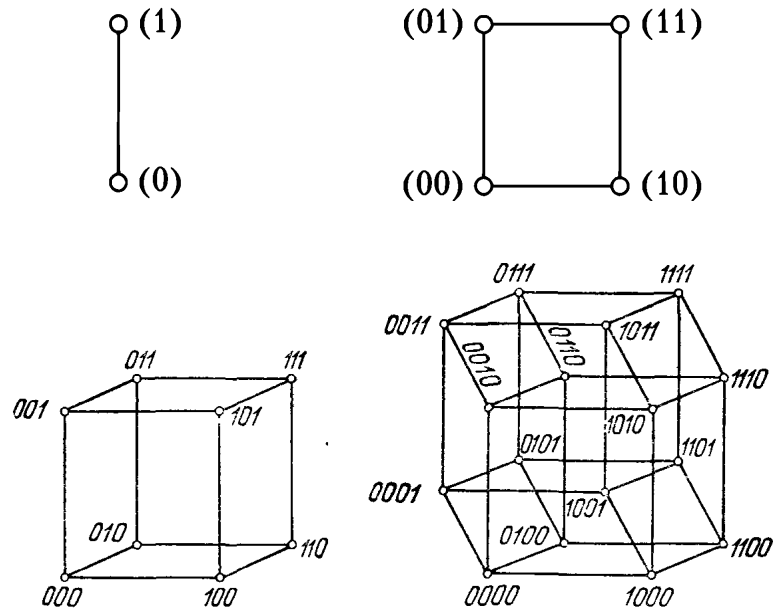


Рис. 5.12. Регулярні графи: а) граф C_6 ; б) кубічний граф Петерсена

Теорема 5.2. Нехай n, d — натуральні числа, $0 \leq d \leq n-1$. Тоді існує регулярний граф n -го порядку степеня d .

11) *n -вимірний куб* — звичайний граф, вершинами якого є n -вимірні булеві вектори, вершини \mathbf{u} та \mathbf{v} суміжні тоді і тільки тоді, коли $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$ (відстань Хеммінга між вершинами рівна 1).

Рис. 5.13. n -вимірні куби ($n=1,2,3,4$)

12) *Турнір* (повний орієнтований граф без петель та кратних дуг).

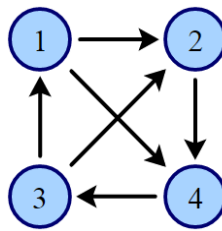


Рис. 5.14. Діаграма турніру

13) *Помічені та нумеровані графи*.

Якщо задана функція $f: V \rightarrow M$ та (або) $g: E \rightarrow M$, то множина M називається множиною *міток*, а граф G називається *поміченим*. Якщо функції f та g однозначні (ін'єктивні) і $M \subset \mathbb{N}$, то граф називається *(про)нумерованим*.

Прикладом нумерованого графа є граф, зображений на рис. 5.14.

5.2. Маршрути у графі

Нехай $G=(V,E)$ — заданий граф, $a=v_{i_0}$, $b=v_{i_n}$. Послідовність вершин та ребер

$$M(a,b) = ae_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\dots v_{i_{n-1}}e_{j_n}b,$$

де e_{j_k} — ребро, інцидентне вершинам $v_{i_{k-1}}$ та v_{i_k} називається *маршрутом довжини n* , який з'єднує вершини a та b . Вершини a та b називаються *кінцями маршруту*.

Якщо усі ребра маршруту є дугами ($e_{j_k} = (v_{i_{k-1}}, v_{i_k})$, $j = 1, \dots, n$), то маршрут називається *шляхом*, який з'єднує вершину a з вершиною b .

Маршрут називається *простим*, якщо вершини у ньому не повторюються (крім, можливо першої та останньої).

Якщо усі ребра у маршруті $M(a, b)$ є різними, то маршрут називається *ланцюгом*, який з'єднує вершини a та b і позначається $L(a, b)$.

Замкнений ланцюг називається *циклом*. Орієнтований цикл називається *контуром*.

Наприклад, $M(a, b) = b4a1a3b9c8b10e10b4a$ — маршрут у графі, діаграма якого наведена на рис. 5.3. Цей маршрут не є ланцюгом, оскільки ребра 4 та 10 повторюються. $L(a, b) = b4a2a3b9c6a$ — ланцюг, який з'єднує вершини a та b . Цей ланцюг не є простим, оскільки вершини повторюються. $a5c7b4a$ — приклад простого циклу, $a5c8b$ — простий шлях.

Теорема 5.3. Довільний маршрут, який з'єднує у графі вершини a та b , містить у собі простий ланцюг.

Теорема 5.4. Довільний цикл містить у собі простий цикл. Довільний цикл непарної довжини містить у собі простий цикл непарної довжини.

Теорема 5.5 (Кеніга). Звичайний граф дводольний тоді і тільки тоді, коли він не містить простих циклів непарної довжини.

5.2.1. Метричні характеристики графів

У параграфах 5.2.1, 5.3.1. та 5.3.2 розглядаються лише неорієнтовані графи. *Відстань $d(u, v)$ між вершинами u та v* неорієнтованого графа — це довжина найкоротшого ланцюга, який з'єднує ці вершини.

Найкоротша *геодезична* між двома вершинами — найкоротший ланцюг, який їх з'єднує.

Діаметр графа — максимальна відстань між вершинами:

$$D(G) = \max \{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Ексцентриситет $\varepsilon(v)$ вершини v — відстань до найбільш віддаленої від неї вершини:

$$\varepsilon(v) = \max \{d(v, u) \mid u \in V\}.$$

Радіус графа — мінімальний ексцентриситет:

$$R(G) = \min \{ \varepsilon(v) \mid v \in V \}.$$

Центр графа — множина вершин графа, які мають мінімальний ексцентриситет:

$$C(G) = \{ v \mid \varepsilon(v) = R(G) \}.$$

Приклад 5.5. Вказати ексцентриситети вершин, центр, радіус та діаметр графа, діаграма якого наведена на рис. 5.15.

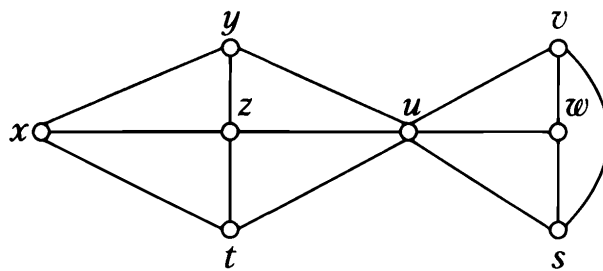


Рис. 5.15.

Розв'язок. $\varepsilon(x) = \varepsilon(v) = \varepsilon(w) = \varepsilon(s) = 3$, $\varepsilon(y) = \varepsilon(z) = \varepsilon(t) = \varepsilon(u) = 2$.
 $D(G) = 3$, $R(G) = 2$, $C(G) = \{y, z, t, u\}$.

5.3. Зв'язність. Компоненти зв'язності

5.3.1. Відношення зв'язності у неорієнтованому графі.

Вершини $a, b \in V$ неорієнтованого графа $G = (V, E)$ називаються *зв'язними*, якщо можна побудувати ланцюг, який їх з'єднує. При цьому вершина вважається зв'язною із самою собою.

Відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин. *Компоненти зв'язності* графа — класи еквівалентності за відношенням зв'язності.

Кількість компонент зв'язності позначається $\kappa(G)$.

Наприклад, граф G , зображений на рис. 5.16, має три компоненти зв'язності (G_1, G_2 та G_3).

Зв'язний граф — це граф, усі вершини якого зв'язні між собою ($\kappa(G) = 1$).

5.3.2. Класифікація ребер та вершин графів з точки зору зв'язності

Міст — ребро графа, видалення якого збільшує кількість компонент зв'язності. Усі інші ребра — *циклові*.

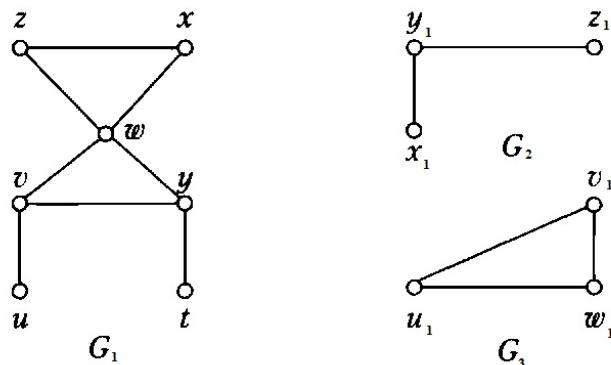


Рис. 5.16. Граф із трьома компонентами зв'язності

Точка зчеплення (шарнір) — вершина графа, видалення якої збільшує кількість компонент зв'язності.

Приклад 5.6. На рис. 5.17 ребро x — міст, усі інші ребра — циклові. Вершини u та v — точки зчеплення.

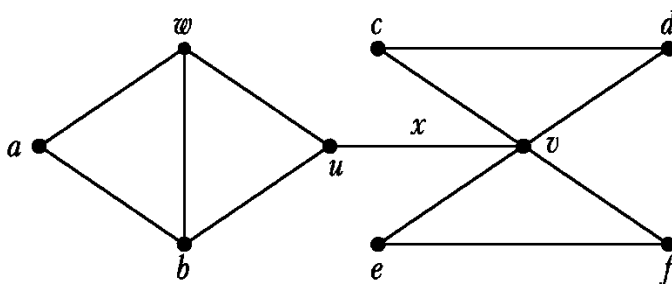


Рис. 5.17. Ребра та мости

Теорема 5.6. Кожний простий цикл містить циклове ребро.

Теорема 5.7. Кількість ребер звичайного графа задовольняє нерівність

$$|V| - \kappa(G) \leq |E| \leq (|V| - \kappa(G))(|V| - \kappa(G) + 1) / 2.$$

Наслідок. Якщо $|E| > (|V| - 1)(|V| - 2) / 2$, то граф $G = (V, E)$ — зв'язний.

5.3.3. Зв'язність у орієнтованих графах

Вершина b називається *досяжною* із вершини a орієнтованого графа G , якщо існує шлях, який з'єднує a з b .

Відношення досяжності не є відношенням еквівалентності.

Вершини $a, b \in V$ орієнтованого графу $G = (V, E)$ називаються *сильно зв'язними*, якщо вершина a є досяжною із b і навпаки.

Відношення сильної зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин. На рис. 5.18 зображено *компоненти сильної зв'язності*.

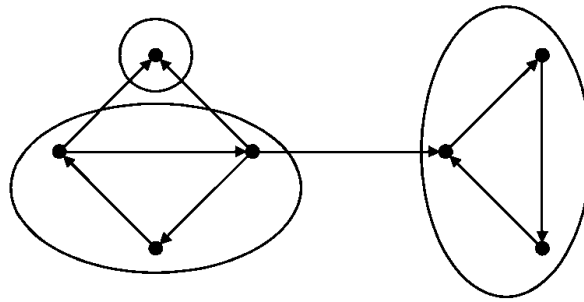


Рис. 5.18. Компоненти сильної зв'язності

5.3.4. Обхід графів

Обхід графів — систематичний перелік вершин графа. У більшості випадків вказується початкова вершина, з якої треба починати обхід.

Алгоритм обходу вершин графа

Вважаємо, що на початку усі вершини не відмічені.

Заносимо у список L початкову вершину.

while $L \neq \emptyset$

{

 видаляємо із списку L першу вершину v ;

 позначаємо вершину v як відвідану;

 додаємо до L усі не відвідані вершини, у які можна потрапити із v ;

}

Якщо у алгоритмі обходу нові вершини додаються у початок списку, то такий обхід називається *пошуком у глибину*.

Якщо у алгоритмі обходу нові вершини додаються у кінець списку, то такий обхід називається *пошуком у ширину*.

На рис. 5.19 продемонстровано обхід графа із застосуванням пошуку у глибину та ширину, починаючи із вершини b :

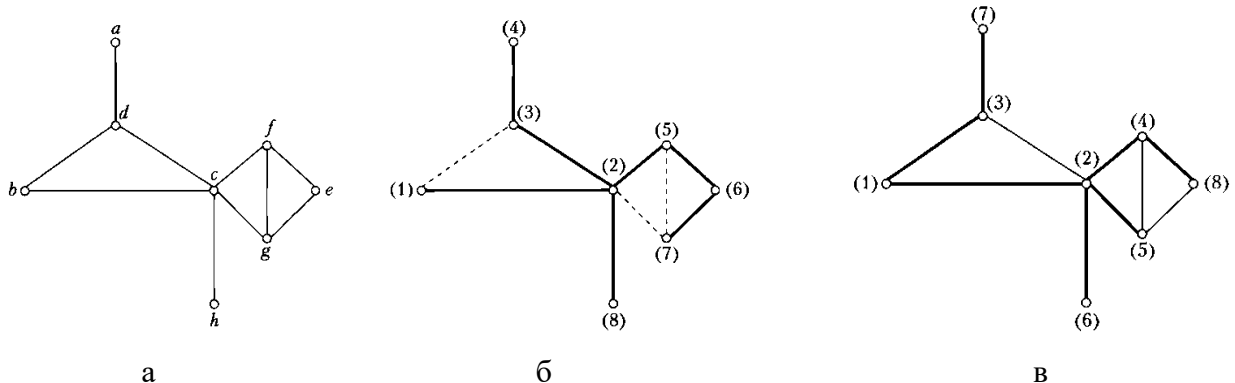


Рис. 5.19. Обхід графа у глибину (б) та ширину (в)

Приклад 5.7. Провести обходи вершин звичайного графа, діаграма якого наведена на рис. 5.20, починаючи із вершини a , які відповідають пошуку в глибину та в ширину.

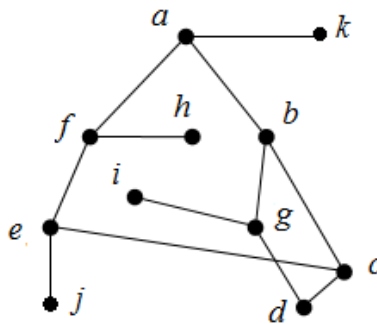


Рис. 5.20

Розв'язок. Проведемо обхід вершин графа, який відповідає пошуку у глибину: $a, b, c, d, g, i, e, f, h, j, k$.

Проведемо обхід вершин графа, який відповідає пошуку у ширину: $a, b, f, k, c, g, e, h, d, j, i$.

5.4. Ейлерові та гамільтонові графи

У цьому та наступному підрозділі розглядаються лише неорієнтовані графи.

5.4.1. Графи Ейлера

Граф Ейлера (ейлерів граф) — це зв'язний граф, для якого існує цикл, який містить усі ребра графа.

Прикладом графа Ейлера є граф G_1 на рис. 5.21. Графи G_2 та G_3 не є графами Ейлера.

Теорема 5.8. Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли степені усіх вершин є парними.

Наслідок. Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли множину його ребер можна розбити на цикли, що не перетинаються.

Ланцюг, який містить усі ребра графа називається *ланцюгом Ейлера*. Граф, для якого існує ланцюг Ейлера називається *напівейлеровим графом*.

Прикладом напівейлерового графа є граф G_3 .

Теорема 5.9. Зв'язний граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли не більше двох його вершин мають непарну степінь.

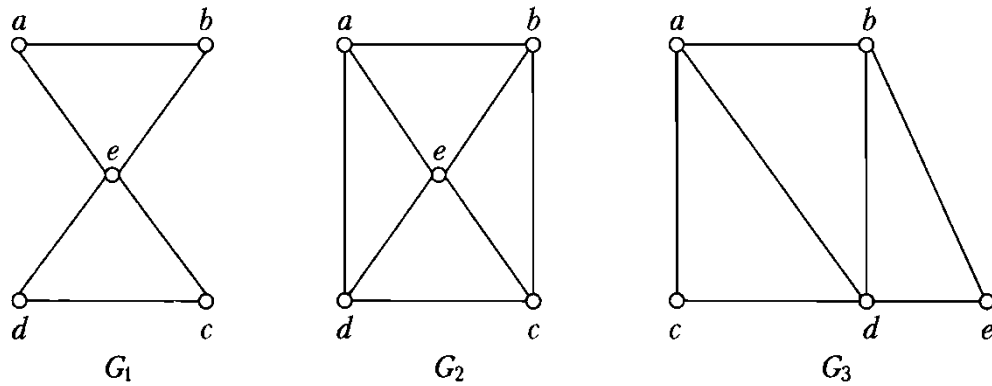


Рис. 5.21.

На рис. 5.22 зображено граф із задачі про кенігсберзькі мости. Оскільки степені усіх чотирьох вершин непарні, то він не є ні ейлеревим, ні напівейлеревим.

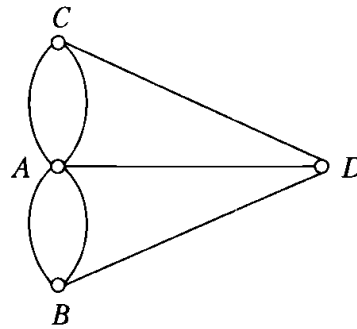


Рис. 5.22. Граф для задачі про кенігсберзькі мости

Алгоритм Флері знаходження ейлерового ланцюга:

- 1) Починаємо з вершини з непарною степеню (або з довільної вершини у випадку парності степенів усіх вершин).
- 2) стираємо (викреслюємо) пройдені ребра та ізольовані вершини, які виникають в процесі руху.
- 3) на кожному кроці вибираємо міст в якості наступного ребра тільки тоді, коли немає циклових ребер, інцидентних поточній вершині.

5.4.2. Гамільтонові графи.

Зв'язний граф називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

Прикладом графа Гамільтона є граф, наведений на рис 5.23 (на діаграмі ребра циклу виділені товстішими лініями).

Теорема 5.10 (теорема Дірака). Якщо у графі $G = (V, E)$ з $n \geq 3$ вершинами степінь кожної вершини не менша за $n/2$, то граф G є гамільтоновим.

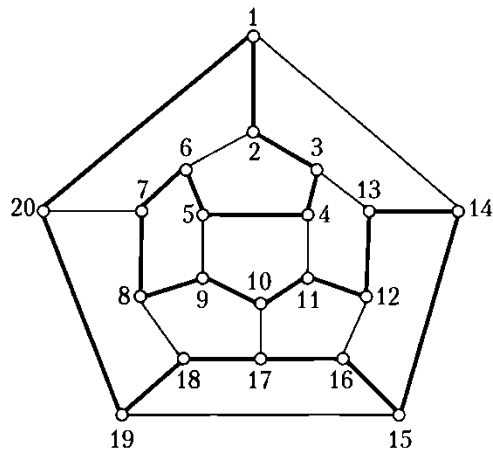


Рис. 5.23. Гамільтонів шлях

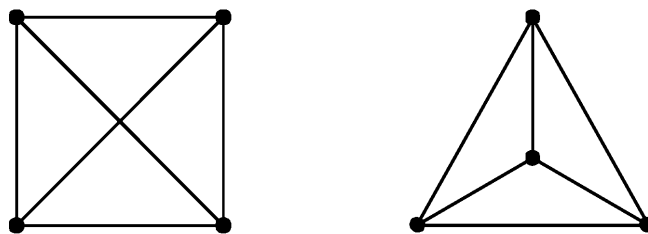
5.5. Планарні графи

Граф допускає *вкладення* (вкладається) на деякій поверхні, якщо його можна зобразити на цій поверхні так, щоб ребра графа не перетиналися.

Граф називається *планарним*, якщо його можна вкласти на площину.

На рис. 5.24 зображено діаграму планарного графа K_4 та його вкладення.

Теорема 5.11. Граф G вкладається на сфері тоді і тільки тоді, коли він є планарним.

Рис. 5.24. Вкладення графа K_4

Частина площина, обмежена ребрами планарного графа, називається *гранню*. Множина граней планарного графа позначається F . У цю множину включається також і зовнішня частина площини. Для графа, зображеного на рис. 5.25, $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Теорема 5.12 (формула Ейлера). Для планарного графа

$$|V| - |E| + |F| = \kappa(G) + 1.$$

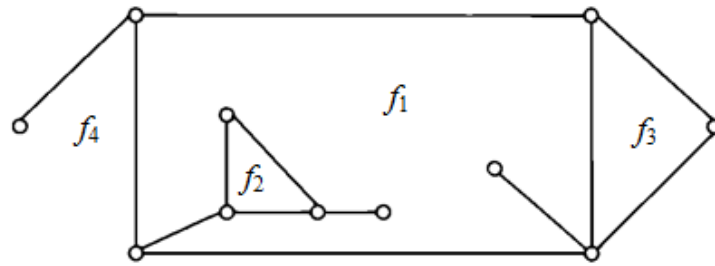


Рис 5.25. Грані планарного графа

Наслідок 1. Для довільного випуклого многогранника

$$B + \Gamma - P = 2,$$

де B — кількість вершин многогранника, Γ — кількість граней, P — кількість ребер.

Наслідок 2. У будь-якому планарному графі без кратних ребер та петель $|E| \leq 3|V| - 6$.

Наслідок 3. Графи K_5 та $K_{3,3}$ не є планарними.

Наслідок 4. У будь-якому планарному графі без кратних ребер та петель існує вершина, степінь якої не більша за 5.

5.6. Дерева

5.6.1. Ліс

Нехай $G = (V, E)$ — заданий неорієнтований граф. Величина

$$\lambda(G) = |E| - |V| + \kappa(G).$$

називається *цикломатичним* числом графа G .

Теорема 5.13. Для довільного графа G

$$\lambda(G) \geq 0 \text{ і } \lambda(G) = 0 \Leftrightarrow \text{граф } G \text{ не містить циклів.}$$

Ліс — це граф без циклів. Приклад лісу зображено на рис. 5.26.

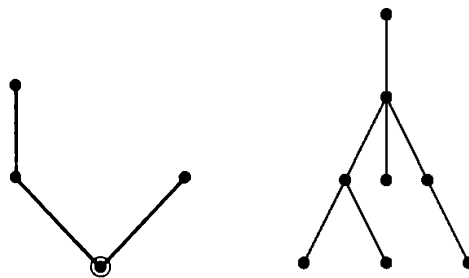


Рис. 5.26. Ліс

Теорема 5.14. Наступні твердження про граф G є еквівалентними:

- 1) G — ліс;
- 2) G не містить простих циклів;
- 3) Всі ланцюги в G — прості;
- 4) $\lambda(G) = 0$.

5.6.2. Неорієнтовані дерева

Дерево — зв'язний граф без циклів. Приклад дерева зображено на рис. 5.27.

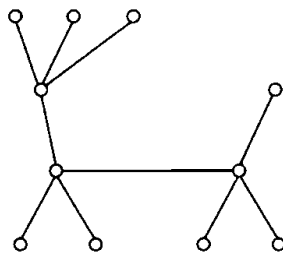


Рис. 5.27. Дерево

Теорема 5.15. Наступні твердження про граф G є еквівалентними:

- 1) G — дерево;
- 2) Будь-які дві вершини в G з'єднані рівно одним простим ланцюгом;
- 3) G — зв'язний граф, кожне ребро якого — міст;
- 4) $|V| = |E| + 1$ і $\kappa(G) = 1$;
- 5) $\lambda(G) = 0$, але після додавання довільного нового ребра $\lambda(G) = 1$.

Наслідок. У кожному дереві з двома і більше вершинами є принаймні дві висячі вершини.

5.6.3. Нумеровані дерева

Для компактного подання нумерованих дерев використовується *код Прюффера*, який для дерева з n вершинами містить $n - 2$ числа.

При побудові коду на кожному кроці видаляється висяча вершина із найменшим номером і номер вершини, з якою вона була пов'язана, дописується у кінець коду.

Код Прюффера для дерева на рис. 5.28: 7, 9, 1, 7, 2, 2, 7, 1, 2, 5

При декодуванні на i -му ($i = 1, 2, \dots, n - 2$) кроці із списку ще невикористаних вершин вибирається (без повернення) вершина з найменшим номером, який не зустрічається у ще не обробленій частині коду Прюффера. Ця вершина з'єднується з i -ю вершиною у коді Прюффера. У кінці з'єднуються останні дві невикористані вершини.

З існування та унікальності коду Прюфера випливає наступна теорема:

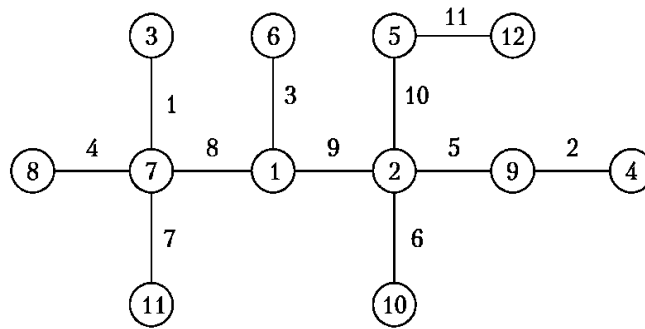


Рис. 5.28. Приклад побудови коду Прюфера для нумерованого дерева

Теорема 5.16 (теорема Келі). Кількість нумерованих дерев із n вершинами рівна n^{n-2} .

5.6.4. Кореневі дерева.

У *корневих деревах* у множині вершин виділяється *корінь*. Орієнтація вершин корневих дерев відбувається у напрямку від кореня. Якщо вершини v та u є суміжними і відстань від v до кореня дерева більша за відстань від u до кореня, то вершина v називається *дочірньою* вершиною для u , а вершина u — *батьківською* для v . Тому кореневі дерева можна вважати орієнтованими графами.

Теорема 5.17. Кожна вершина крім кореня має рівно одну батьківську вершину.

Листи — це вершини кореневого дерева, які не мають дочірніх вершин.

Множина вершин, які розташовані на однаковій відстані від кореня називається *ярусом* дерева.

Дерева б)-в) на рис. 5.29 — кореневі дерева з коренем a та c відповідно, які отримуються із звичайного дерева а). На рис. 5.29 в) a, e — вершини 1-го ярусу, b, d — 2-го, f, g — 3-го.

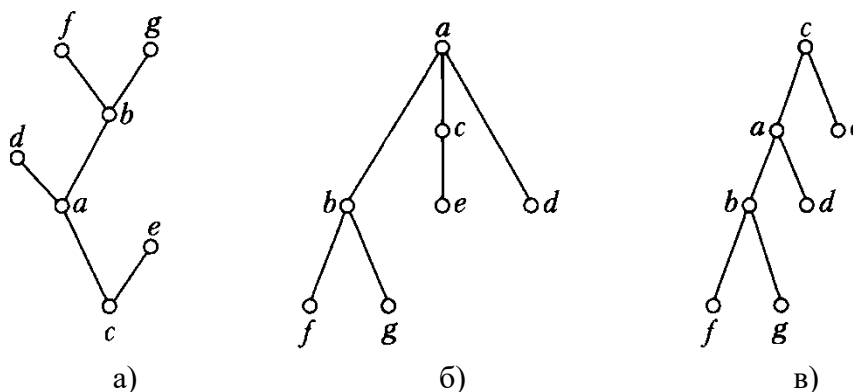


Рис. 5.29. Приклад корневих дерев з коренями a та c відповідно

5.6.5. Орієнтовані дерева

Поняття *орієнтованого дерева* є синонімом до поняття кореневого дерева. Означення орієнтованого дерева:

- 1) Існує єдина вершина r (корінь), для якої $\deg^+(r) = 0$.
- 2) Для всіх інших вершин $v \in T$ $\deg^+(v) = 1$.
- 3) Кожна вершина досяжна із кореня.

Зауваження. При зображенні орієнтованих дерев вважають, що дуги спрямовані зверху вниз. Тому на діаграмах часто не зображають стрілки.

Еквівалентне означення орієнтованого дерева T з використанням піддерев.

- 1) Є єдиний елемент r — корінь.
- 2) Усі інші вершини містяться у k ($k \geq 0$) підблоках, які називаються піддеревами.

$$T = (r, \{T_1, \dots, T_k\}).$$

Для *упорядкованих дерев* також вказується відносний порядок піддерев T_1, \dots, T_k .

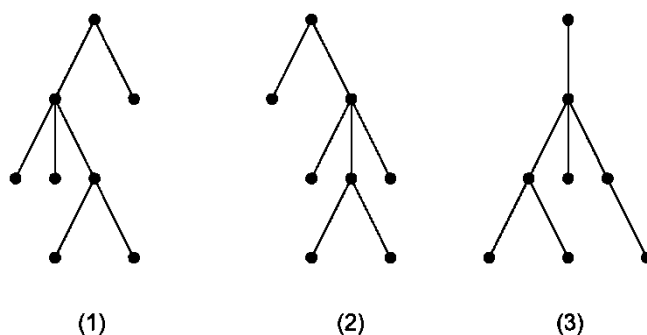


Рис. 5.30. Діаграми орієнтованих дерев

Наведені на рис. 5.30 дерева є ізоморфними як звичайні дерева та не ізоморфними, як впорядковані дерева. Як орієнтовані дерева (1) та (2) ізоморфні, але (2) та (3) та (1) та (3) не є ізоморфними.

5.6.6. Бінарні дерева

Означення *бінарного дерева*:

- 1) Є одна вершина — *корінь дерева*.
- 2) Усі інші вершини належать одному із піддерев (лівому чи правому), які не перетинаються.

За допомогою бінарних дерев можна зобразити довільне упорядковане дерево. При переході до бінарних дерев для кожної вершини ліве ребро з'єднує її з старшим сином (у початковому дереві), праве ребро — із наступним

(молодшим) братом у початковому дереві. На рис. 5.31 наведено упорядковане дерево а) та відповідне йому бінарне дерево б).

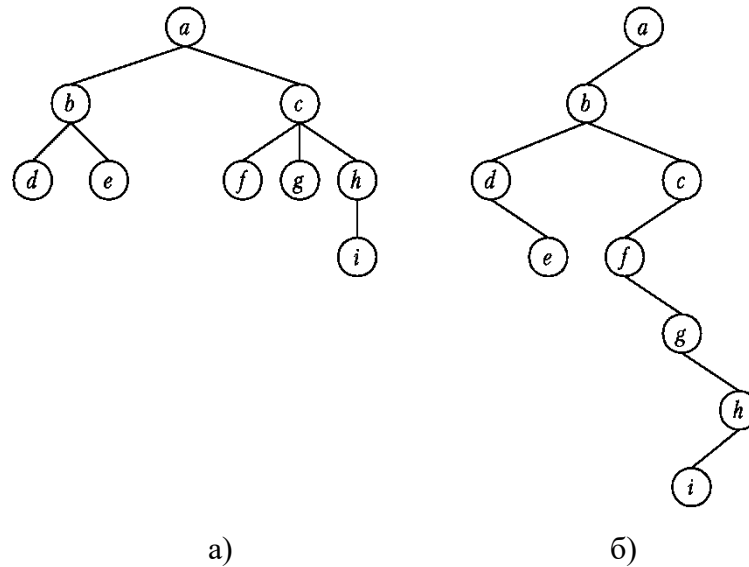


Рис. 5.31. Зображення упорядкованого дерева а) за допомогою бінарного б)

Бінарне дерево не є окремим випадком упорядкованого дерева. Наведені на рис. 5.32 бінарні дерева не є ізоморфними, хоча як упорядковані дерева вони ізоморфні. Справа у тому, що корінь має лише піддерево, і тому дерева на обох діаграмах не відрізняються, якщо розглядати їх як упорядковані.



Рис. 5.32. Зображення різних бінарних дерев

Теорема 5.18. Кількість різних бінарних дерев із n вершинами рівна $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Доведення. Нехай C_n — кількість різних бінарних дерев із n вершинами. Очевидно, що $C_0 = 1$. Розіб'ємо множину усіх бінарних дерев із n вершинами на n підмножин A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , де множина A_i складається з дерев, у лівому піддереві яких міститься i вершин, а у правому — $n - i - 1$ вершин. Тоді

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} |A_i| = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}.$$

Порівнюючи останню рівність та співвідношення (3.6), приходимо до висновку, що числа C_n є числами Каталана. Отже, $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$, що й доводить теорему.

Обходи бінарних дерев

Виокремлюють наступні способи обходу вершин бінарних дерев:

- *прямий* (префіксний): корінь, ліве піддерево, праве піддерево;
- *внутрішній* (інфіксний, симетричний): ліве піддерево, корінь, праве піддерево;
- *зворотний* (постфіксний, кінцевий): ліве піддерево, праве піддерево, корінь.

Приклад 5.8. Провести обходи вершин дерева, наведеного на рис. 5.33.

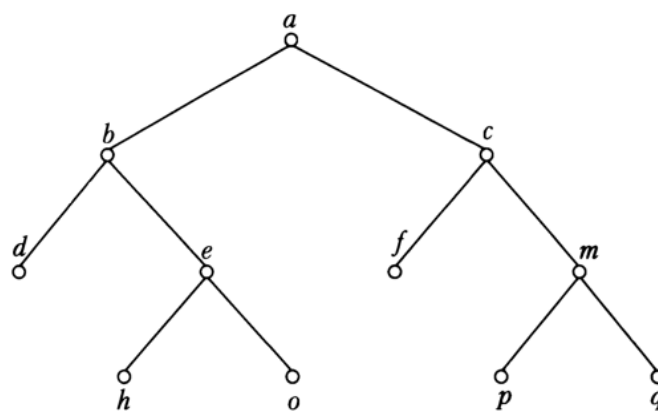


Рис. 5.33. Обхід бінарного дерева

Розв'язок. Запишемо обходи вершин дерева:

обхід у прямому порядку: $a, b, d, e, h, o, c, f, m, p, q$;

обхід у внутрішньому порядку: $d, b, h, e, o, a, f, c, p, m, q$;

обхід у зворотному порядку: $d, h, o, e, b, f, p, q, m, c, a$.

Дерева арифметичних виразів (листя відповідають числам або змінним, внутрішні вершини — операціям). Запис виразу з використанням прямого обходу вершин називається *польською нотацією* (префіксним записом), запис з використанням внутрішнього обходу — *інфіксним записом*, запис з використанням зворотного обходу вершин — *оберненою польською нотацією* (ОПН) виразу.

Приклад 5.9. Записати вираз $(a + b / c) * (d - e * f)$ у префіксній, інфіксній формах та ОПН.

Розв'язок. Дерево виразу наведено на рис. 5.34. З трьох використанням вищенаведених обходів отримуємо наступні записи виразу:

префіксий: $*+ /bc - d * e f$;

інфіксий: $a + b / c * d - e * f$;

ОПН: $abc / + def * - *$.

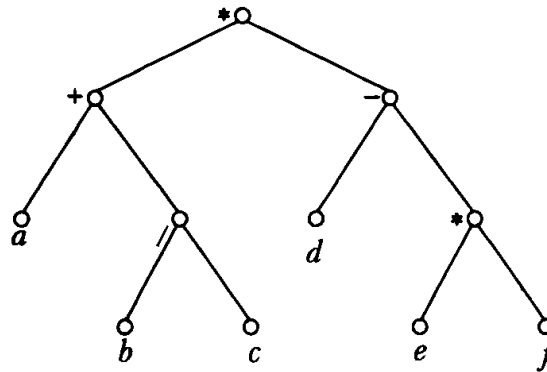


Рис. 5.34. Дерево арифметичного виразу

Перевагою префіксного запису та ОПН є те, що вони не вимагають дужок для однозначного відтворення виразу. Інфіксийний запис неоднозначний і тому потребує дужок.

Алгоритм Дейкстри побудови ОПН

- 1) Поки вхідний рядок не закінчився:
 - Читаємо черговий символ.
 - Якщо символ є числом, то додаємо його у вихідний рядок.
 - Якщо символ є відкриваючою дужкою, то заносимо його у стек.
 - Якщо символ є закриваючою дужкою, то до тих пір, поки верхнім елементом стека не буде відкриваюча дужка, виштовхуємо елементи зі стеку і вихідний рядок. При цьому відкриваюча дужка видаляється зі стеку.
 - Якщо на верхівці стеку виявився знак (символ) функції, то виштовхуємо його зі стеку.
 - Якщо відкриваюча дужка не знайдена, то початковий вираз не є коректним.
 - Якщо символ виявився оператором o_1 , то якщо на верхівці стеку знаходиться оператор o_2 , який має пріоритет \geq за o_1 , то виштовхуємо o_2 зі стеку. заносимо o_1 у стек.
- 2) якщо стек непорожній, то виштовхуємо його вміст у кінець вихідного рядка.

Обчислення виразів, записаних у ОПН, також засновано на використанні стека.

Алгоритм обчислення значень виразів, записаних в ОПН

- 1) Обробка вхідного символу:
Якщо вхідний символ є операндом, то занести його у стек.
Якщо вхідним є символ операції, то відповідна операція виконується над потрібною кількістю операндів, які виймаються зі стеку. Результат операції заноситься у верхівку стека.
- 2) Якщо вхідний рядок оброблений не до кінця, перейти до кроку 1.
- 3) Вибрати кінцевий результат обчислень зі стеку.

5.7. Задачі до п'ятого розділу

1. Зобразити діаграму графа, який заданий за допомогою:

а) матриці інцидентності

$$B(G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

б) матриці сусідства

$$A(G) = \begin{pmatrix} \beta & 2\beta + \alpha & \beta + \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & \beta & \beta & 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & 3\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha & 2\beta \end{pmatrix}.$$

2. Діаграма графа G наведена на рис. 5.35, G' — відповідний йому неорієнтований граф. Позначити ребра графа та виконати наступні завдання:
 - а) вказати матриці інцидентності та суміжності;
 - б) знайти степені усіх вершин підграфа H_1 ;
 - в) вказати компоненти слабкої та сильної зв'язності.
 - г) знайти діаметр, радіус та центр неорієнтованого графа H'_1 , який відповідає підграфу H_1 та визначити його цикломатичне число;
 - д) вказати точки зчеплення та мости графа G' ;
 - е) вказати компоненти графа G' , які є ейлеревими та гамільтоновими.

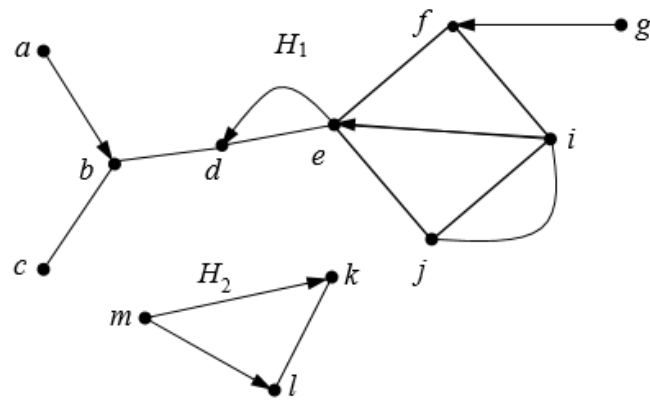


Рис. 5.35

3. Вказати усі неізоморфні звичайні графи, у яких:
- одна вершина має степінь 2, дві — 3, дві — 4;
 - три вершини мають степінь 2, дві — 3, одна — 4.
4. Серед пар графів, зображених на рис. 5.36 та 5.37, вказати пари ізоморфних.

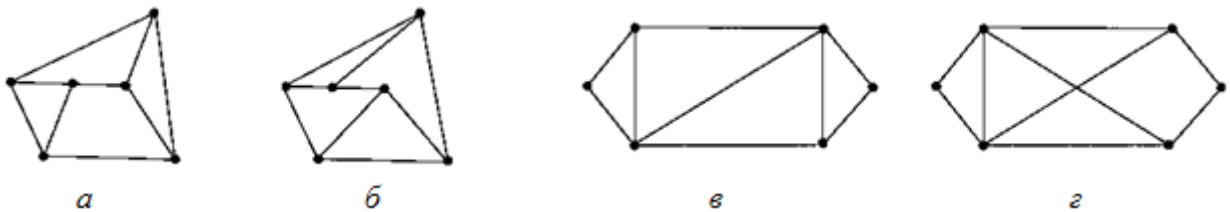


Рис. 5.36

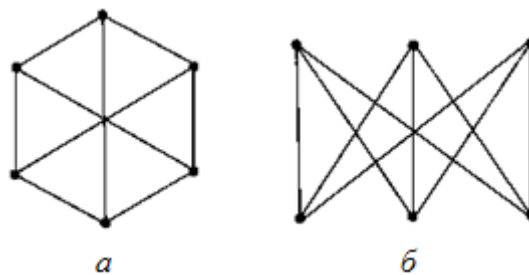


Рис. 5.37

- Записати усі неізоморфні графи 4-го порядку, які не містять циклів.
- Довести, що серед довільних 6 людей є 3 попарно знайомі або 3 попарно незнайомі.
- Для графа, зображеного на рис. 5.38, знайти цикли з:
 - 4 ребер;
 - 5 ребер;
 - 11 ребер.

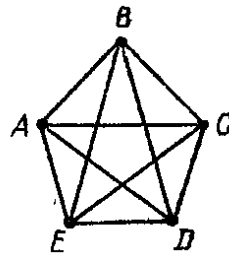


Рис. 5.38

8. Чи існує ейлерів ланцюг у графах, зображених на рис. 5.39?

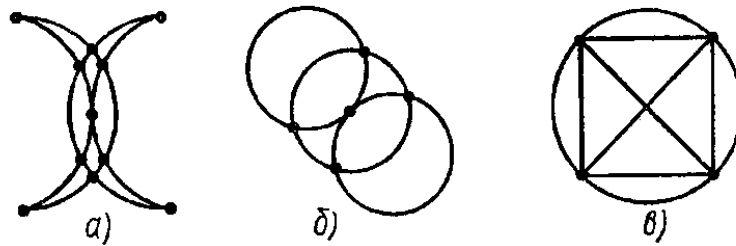


Рис. 5.39

9. Діаграма графа наведена на рис. 5.40. Виконати наступні завдання:

- визначити ексцентриситети вершин, діаметр, радіус і центр графа;
- вказати усі геодезичні між вершинами c та h ;
- перевірити, чи є граф ейлеревим, напівейлеровим, гамільтоновим або планарним;
- провести обхід вершин з використанням пошуку у глибину та ширину, починаючи з вершини e .

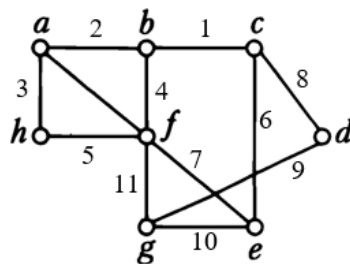


Рис. 5.40

10. З'ясувати, для яких з наведених на рис. 5.41 графів існує ейлерів ланцюг, та зобразити його.

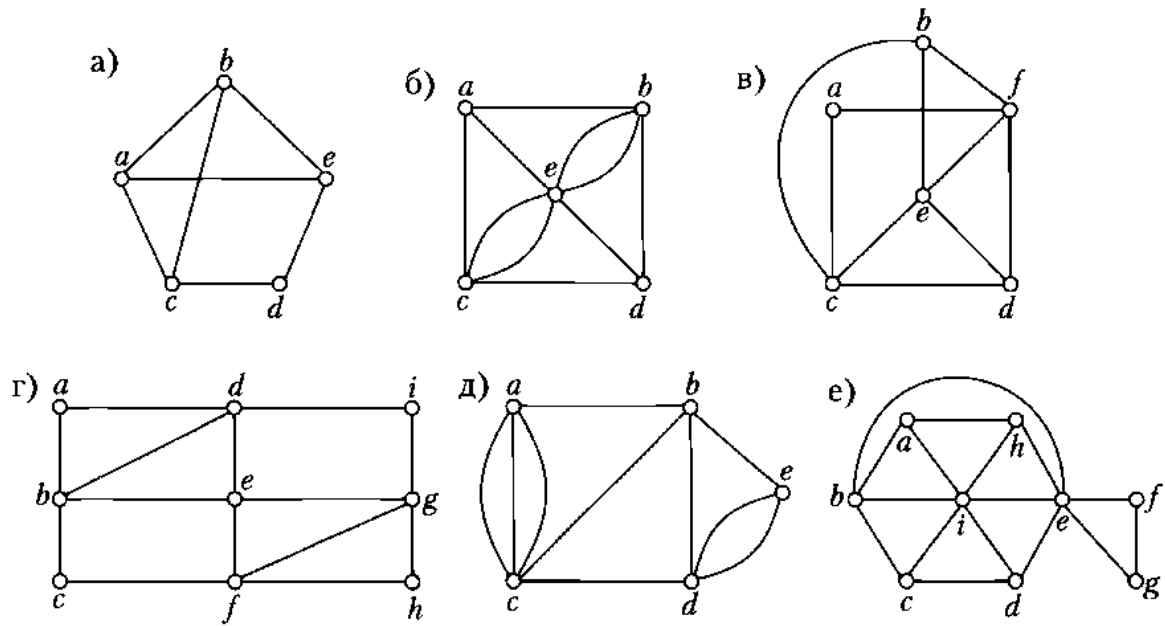


Рис. 5.41.

11.3'ясувати, для яких з наведених на рис. 5.42 графів існує гамільтонів цикл.

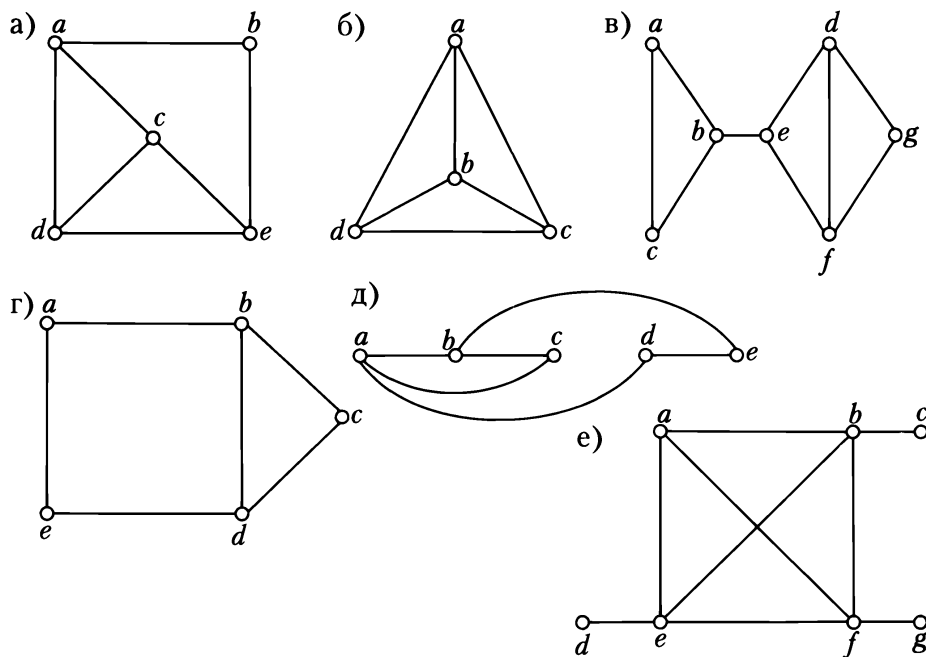


Рис. 5.42

12. Для впорядкованого дерева, діаграма якого зображена на рис. 5.43, виконати наступні завдання:

- вказати код Прюфера;
- знайти центр дерева;
- провести обходи вершин, які відповідають пошуку у глибину та ширину, починаючи із вершини 5;

- г) зобразити кореневе дерево з коренем у вершині 1;
- д) зобразити впорядковане дерево за допомогою бінарного дерева.

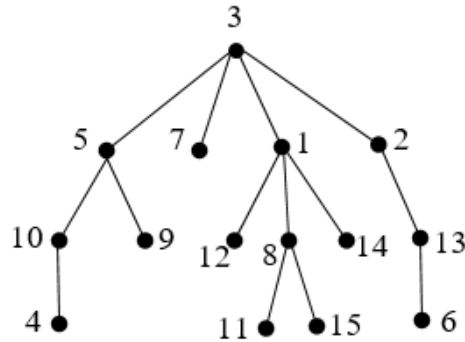


Рис. 5.43

13.Зобразити дерево із коренем 5, яке має наступний код Прюфера: 4, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 3, 4.

14.Записати у префікській та постфікській формі наступний вираз

$$((a+1)(b+c)-2)*(3-b)/(b-a*c)+4.$$

15.Обчислити значення виразу $1, 3, 2, ^, 6, -, +, 2, 3, ^, 5, -, *, 3, 4, *, -$ та записати його у інфікській формі.

16.Зобразити упорядковане дерево, наведене на рис. 5.44, за допомогою бінарного дерева та провести прямий, внутрішній та зворотний обходи його вершин.

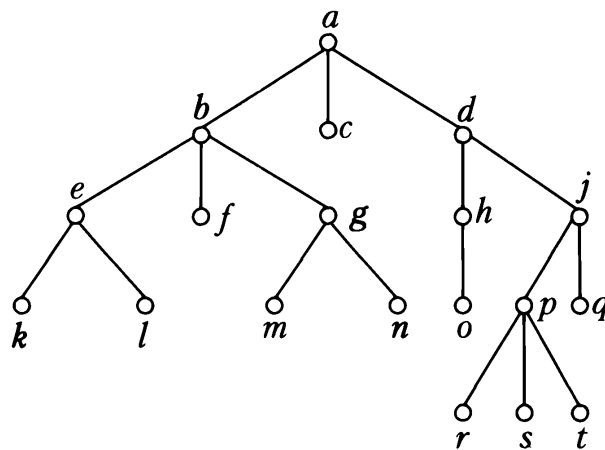


Рис. 5.44

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. СПб.: Вильямс, 2003. 958 с.
2. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. К.: Центр навчальної літератури, 2004. 254 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. К.: Вища школа, 2002. 287 с.
4. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: «Компанія Сміт», 2004. 480 с.
5. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. Ужгород: УжДУ, 1971. 224 с.
6. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 416 с.
7. Дрозд Ю. Дискретна математика. К.: Київський університет імені Т. Шевченка, 2004. 70 с.
8. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. 580 с.
9. Комплект конкурсних завдань до університетських студентських олімпіад зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Розробник: В. М. Коцовський. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. 13 с.
10. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина І: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп'ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення". Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 52 с.
11. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина ІІ: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп'ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення". Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 52 с.
12. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів: Методичні матеріали до практичних робіт. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 35 с.
13. Коцовський В. М. Методи та системи штучного інтелекту: методичний посібник для студентів напрямів підготовки: 6.050101 — «Комп'ютерні науки», 6.050103 — «Програмна інженерія» факультету інформаційних технологій УжНУ. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. 56 с.
14. Коцовський В. М. Теорія паралельних обчислень. Частина І: Методичний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 51 с.

15. Коцовський В. М. Теорія паралельних обчислень. Частина II: Методичний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 52 с.
16. Коцовський В. М. Технології розподілених систем та паралельних обчислень. Частина I: Методичний посібник Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. 51 с.
17. Коцовський В. М. Технології розподілених систем та паралельних обчислень. Частина II: Методичний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. 76 с.
18. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. 480 с.
19. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. 5-е изд., исправл. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 256 с.
20. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. Мн.: Выш. шк., 1991. 269 с.
21. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 264 с.
22. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. К.: Видавнича група ВНУ, 2007. 368 с.
23. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. СПб.: Питер, 2013. 432 с.
24. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. К: Техніка, 1973. 76 с.
25. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. 312 с.
26. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2003. 384 с.
27. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. 83 с.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

Теорія множин

$x \in A$ — x є елементом множини A .

$\{a_1, \dots, a_n\}$ — множина, яка складається з елементів a_1, \dots, a_n .

$\{x \mid P(x)\}$ — множина елементів, які мають властивість $P(x)$.

\emptyset — порожня множина.

U — універсальна множина.

\mathbb{N} — множина натуральних чисел.

\mathbb{Z} — множина цілих чисел.

\mathbb{Q} — множина раціональних чисел.

\mathbb{R} — множина дійсних чисел.

$A \subseteq B$ — множина A є підмножиною множини B .

$A \subset B$ — множина A є власною підмножиною множини B .

$\mathcal{B}(A)$ — множина усіх підмножин множини A (булеан).

\bar{A} — доповнення множини A до універсальної множини.

$A \cap B$ — перетин множин A та B .

$A \cup B$ — об'єднання множин A та B .

$A \setminus B$ — різниця множин A та B .

$A \Delta B$ — симетрична різниця множин A та B .

Бінарні відношення

$A \times B$ — декартів добуток множин A та B .

aRb або $(a, b) \in R$ — елементи a та b перебувають у відношенні R .

$M(R)$ — матриця бінарного відношення R .

$\text{pr}_1 R$ — проекція бінарного відношення R на першу базисну множину.

$\text{pr}_2 R$ — проекція бінарного відношення R на другу базисну множину.

$R[C]$ — переріз бінарного відношення R за множиною C .

$R[a]$ — переріз бінарного відношення R за елементом a .

A/R — фактор-множина множини A за відношенням R .

R^{-1} — обернене відношення до відношення R .

$S \circ R$ — добуток (композиція) відношень R та S .

$\sup C$ — точна верхня грань множини C .

$\inf C$ — точна нижня грань множини C .

$f : A \rightarrow B$ — функція із A у B .

$\text{Dom } f$ — область визначення функціонального відношення f .

$\text{Im } f$ — область значень функціонального відношення f .

Комбінаторика

$n!$ — факторіал числа n .

A_n^r — кількість розміщень без повторень з n елементів по r .

\bar{A}_n^r — кількість розміщень з повтореннями з n елементів по r .

C_n^r — кількість комбінацій без повторень з n елементів по r .

\bar{C}_n^r — кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по r .

$P_n(n_1, \dots, n_k)$ — кількість перестановок з повтореннями.

$\lfloor a \rfloor$ — ціла частина числа a .

$\lceil a \rceil$ — найменше ціле число, яке не менше за a .

$S(n, k)$ — число Стірлінга другого роду (кількість способів розміщення n різних предметів у k однакових ящиках).

B_n — n -те число Белла (кількість розбиттів n -елементної множини).

C_n — n -те число Каталана.

Теорія булевих функцій

$N(\mathbf{x})$ — номер булевого вектора \mathbf{x} .

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — відстань Хеммінга між векторами \mathbf{x} та \mathbf{y} .

$\|\mathbf{x}\|$ — норма Хеммінга вектора \mathbf{x} .

\bar{x} — заперечення x .

$x \wedge y$ — кон'юнкція x та y .

$x \vee y$ — диз'юнкція x та y .

$x \Rightarrow y$ — x імплікує y .

$x \Leftrightarrow y$ — еквівалентність x та y .

$x \oplus y$ — сума за модулем 2 x та y .

$x \ll k$ — логічний зсув на k позицій вліво.

$x \gg k$ — логічний зсув на k позицій вправо.

$x \lll k$ — циклічний зсув на k позицій вліво.

$x \ggg k$ — циклічний зсув на k позицій вправо.

БФ — булева функція.

$f^*(x_1, \dots, x_n)$ — функція, двоїста до булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$.

$x_i^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_i^{\sigma_r}$ — елементарна кон'юнкція рангу r , побудована із змінних x_i, \dots, x_i .

$x_i^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_i^{\sigma_r}$ — елементарна диз'юнкція рангу r , побудована із змінних x_i, \dots, x_i .

ДНФ — диз'юнктивна нормальна форма.

КНФ — кон'юнктивна нормальна форма.

ДДНФ — досконала диз'юнктивна нормальна форма.

ДКНФ — досконала кон'юнктивна нормальна форма.

Теорія графів

$G(V, E)$ — граф з множиною вершин V та набором ребер E .

$\langle a, b \rangle$ — ребро графа, інцидентне вершинам a та b .

$\{a, b\}$ — ланка графа, яка з'єднує вершини a та b .

(a, b) — дуга з початком у вершині a та кінцем у вершині b .

(a, a) — петля при вершині a .

$\deg v$ — степінь вершини v .

$A(G)$ — матриця суміжності (сусідства) графа G .

$B(G)$ — матриця інцидентності графа G .

K_n — повний звичайний граф n -го порядку.

$K_{n,m}$ — повний граф Кеніга.

$M(a, b)$ — маршрут, який з'єднує вершини a та b .

$L(a, b)$ — ланцюг, який з'єднує вершини a та b .

$d(a, b)$ — відстань між вершинами a та b .

$\varepsilon(v)$ — ексцентриситет вершини v .

$D(G)$ — діаметр неорієнтованого графа G .

$R(G)$ — радіус неорієнтованого графа G .

$C(G)$ — центр неорієнтованого графа G .

$\kappa(G)$ — кількість компонент зв'язності неорієнтованого графа G .

$\lambda(G)$ — цикломатичне число неорієнтованого графа G .

ОПН — обернена польська нотація.