

УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, М. П. Желізняк (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО НЕРОЗКЛАДНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ 2-ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

З'ясовується, коли є скінченною множина степенів всіх нерозкладних матричних зображень скінченної 2-групи над нетеровою локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Нехай K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p і $D(G, K)$ — множина степенів всіх нерозкладних матричних K -зображень скінченної групи G . Задача про скінченність множини $D(G, K)$ повністю розв'язана, якщо K — повне дискретно нормоване кільце ([1]– [5]), або G — p -група і K — кільце формальних степеневих рядів від змінних x_1, \dots, x_m з коефіцієнтами із повного дискретно нормованого кільця ([6]– [7]).

В даній роботі вивчається, коли множина $D(G, K)$ скінченна, якщо G — скінченна 2-група і K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Лема 1 ([8]). *Нехай L — комутативне кільце з одиницею, G — скінченна група, $\Gamma : g \rightarrow \Gamma(g)$ — матричне L -зображення групи G ($g \in G$, $\Gamma(g) \in GL(n, L)$) і $W(\Gamma) = \{C \in M(n, L) \mid C\Gamma(g) = \Gamma(g)C, g \in G\}$, де $M(n, L)$ — множина всіх матриць порядку n над кільцем L . Якщо $W(\Gamma)$ — локальне кільце, то Γ є нерозкладним матричним L -зображенням групи G .*

Лема 2. *Нехай $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — абелева 2-група типу $(2, 2)$ ($a^2 = b^2 = e$) і K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина $D(H, K)$ нескінченна.*

Доведення. Розглянемо наступне матричне K -зображення Γ_n групи H :

$$a \rightarrow \Gamma_n(a) = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & J \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$b \rightarrow \Gamma_n(b) = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця порядку n і J — жорданова клітка порядку n з одиницями по головній діагоналі. Використовуючи лему 1 і доведення теореми 1 в [9], неважко показати, що зображення Γ_n є нерозкладним над кільцем K . Лема доведена.

Лема 3. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 4 і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики*

2. Множина $D(H, K)$ нескінченна, якщо $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K .

Доведення. Нехай $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K . Тоді існує такий необоротний елемент t кільця K , що $t \notin 2K$. Із доведення теореми 4 в [9] випливає, що наступне матричне K -зображення Γ_n групи $H = \langle a \rangle$ буде нерозкладним:

$$\Gamma_n : a \rightarrow \Gamma_n(a) = \begin{pmatrix} 0 & -E & tE & 0 \\ E & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & -E & tE \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Лема доведена.

Теорема 1. Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 2$ і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина $D(G, K)$ скінченна тоді і тільки тоді, коли G — циклічна група порядку 4 і $2K$ — максимальний ідеал кільця K .

Доведення теореми випливає із лем 2–3 і [2]–[4].

Лема 4. Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2 і K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Якщо 2 не простий елемент кільця K , то множина $D(H, K)$ нескінченна.

Доведення. Нехай

$$2 = \theta t_1^{r_1} \cdots t_s^{r_s} \quad (r_i \geq 1; i = 1, \dots, s), \quad (1)$$

де $\theta \in K^*$ (K^* — мультиплікативна група кільця K), t_1, \dots, t_s — різні прості елементи кільця K , тобто $t_i \neq \theta_j t_j$ при $i \neq j$ ($\theta_j \in K^*$).

Розглянемо спочатку випадок, коли в (1) $s > 1$. Покажемо, що матричне K -зображення

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} E & t_1 E + t_2 J \\ 0 & -E \end{pmatrix} = \Gamma(a) \quad (2)$$

є нерозкладним K -зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Скористаємось лемою 1. Нехай C така матриця порядку $2n$ над кільцем K , що

$$\Gamma(a)C = C\Gamma(a),$$

тобто

$$\begin{pmatrix} E & t_1 E + t_2 J \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & t_1 E + t_2 J \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

де C_i — матриця порядку n ($i = 1, 2, 3, 4$). Звідси одержуємо, що $C_3 = 0$ і

$$t_1 C_4 + t_2 J C_4 = t_1 C_1 + t_2 C_1 J + 2C_2,$$

тобто

$$t_1(C_4 - C_1) + t_2(JC_4 - C_1 J) = 2C_2.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} C_4 &\equiv C_1(\text{modRad}K), \\ JC_4 &\equiv C_1J(\text{modRad}K). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} JC_1 &\equiv C_1J(\text{modRad}K), \\ C &\equiv \begin{pmatrix} \alpha & * \\ & \ddots \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} (\text{modRad}K), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\alpha \in K$, $\text{Rad}K$ — радикал кільця K .

Із (3) одержуємо, що C або $E' - C$ є оборотною матрицею над кільцем K (E' — одинична матриця порядку $2n$). Звідси і з леми 1 отримуємо, що зображення Γ виду (2) є нерозкладним K -зображенням групи $H = \langle a \rangle$.

Нехай далі в (1) $s = 1$ і $r_1 > 1$. Тоді існує такий простий елемент u кільця K , що $u \neq \theta' t_1$ ($\theta' \in K^*$). Аналогічно як і в попередньому випадку показується, що матричне K -зображення

$$\Gamma' : a \rightarrow \begin{pmatrix} E & t_1 E + uJ \\ 0 & -E \end{pmatrix} = \Gamma'(a)$$

буде нерозкладним K -зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2 і K — нетерове не дискретно нормоване локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 — простий елемент кільця K і факторкільце $K/2K$ не є кільцем головних ідеалів. Тоді множина $D(H, K)$ нескінченна.*

Доведення. Нехай $\bar{K} = K/2K$ і $\text{Rad}\bar{K} = \bar{u}_1\bar{K} + \dots + \bar{u}_r\bar{K}$, де $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r$ — мінімальна система твірних елементів $\text{Rad}\bar{K}$ ($r \geq 2$) і $\bar{u}_j = u_j + 2K$ ($u_j \in K; j = 1, \dots, r$). Очевидно,

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} -E & u_1 E + u_2 J \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma(a)$$

буде нерозкладним K -зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Лема доведена.

Лема 6. *Нехай K — нетерове не дискретно нормоване локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 — простий елемент кільця K і факторкільце $K/2K$ — кільце головних ідеалів. Всі нееквівалентні нерозкладні матричні K зображення циклічної групи $H = \langle a \rangle$ порядку 2 вичерпуються такими зображеннями:*

$$\begin{aligned} \Delta_1 : a &\rightarrow 1; \quad \Delta_2 : a \rightarrow -1; \\ \Gamma_i : a &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & u^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i \in \mathbb{N}); \\ \Gamma'_j : a &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & u^j \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{N} \cup \{0\}), \end{aligned}$$

де $\text{Rad}\bar{K} = \bar{u}\bar{K}$, $\bar{u} = u + 2K$ ($u \in K$), \mathbb{N} — множина всіх натуральних чисел.

Доведення. Очевидно, $\text{Rad}K = 2K + uK$ і K/uK — дискретно нормоване кільце характеристики нуль, де $\bar{2} = 2 + uK$ — простий елемент. Аналогічно як і у випадку $K = \mathbb{Z}_2[[x]]$ ([6]), де \mathbb{Z}_2 — кільце цілих 2-адичних чисел, доводиться, що всі нееквівалентні нерозкладні матричні K -зображення групи $H = \langle a \rangle$ вичерпуються зображеннями $\Delta_1, \Delta_2, \Gamma_i$ ($i \in \mathbb{N}$), Γ'_j ($j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Множина степенів всіх нерозкладних матричних K -зображень групи G скінченна тоді і тільки тоді, коли G — група порядку 2, 2 — простий елемент кільця K і $\text{Rad}K/2K$ — головний ідеал кільця $K/2K$.*

Доведення теореми випливає із теореми 1 і лем 4–6.

1. Берман С. Д., Гудивок П. М. О целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. — 1962. — 145, №6. — С. 1199-1201.
2. Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p -адических чисел // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1964. — 28, №4. — С. 875-910.
3. Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers. I, II // Ann. Math. — 1962. — 76. — Р. 73-92; 1963. — 77. — Р. 318-328.
4. Гудивок П. М. Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1967. — 31, №4. — С. 799-834.
5. Jacobinski H. Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de reseaux indecomposables // Acta Math. — 1967. — 118. — Р. 1-31.
6. Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В. О представлениях конечных p -групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p -адическими коэффициентами // Укр. матем. ж. — 1992. — 44, №6. — С. 753-765.
7. Бондаренко В. М., Гудивок П. М. О представлениях конечных p -групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p -адическими коэффициентами // Сб. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев, Институт матем. НАН Украины. — 1993. — С. 5-14.
8. Каиш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981. — 368 с.
9. Гудивок П. М., Желізняк М. П. Про нерозкладні матричні зображення скінченних p -груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем і інформ. — 2007. — Вип. 14-15. — С. 22-32.

Одержано