КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ "ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА". Частина 1. Кінематика матеріальної точки та твердого тіла

доц. Рейтій О.К.

01.09.2019 р.

1 Лекція 1. Вступ до теоретичної механіки. Основні поняття, моделі та закони. Історичні етапи розвитку.

1.1 Предмет теоретичної механіки

Теоретична механіка – це наука, яка вивчає найбільш загальні закони механічного руху матеріальних тіл. Під *механічним рухом* розуміють зміну положення тіла в просторі відносно інших тіл з плином часу.

Теоретична механіка складається з трьох розділів – *статики*, *кінематики* й *динаміки*. Статика вивчає методи перетворення одних сукупностей сил в інші, еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло. Кінематика вивчає рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, незалежно від діючих на них сил. В динаміці механічний рух вивчається з урахуванням сил, що діють на тіла.

1.2 Основні поняття теоретичної механіки

Основними поняттями в теоретичній механіці є *простір*, *час*, *сила*, *маса*, *система відліку* та ін. За простір, в якому відбувається рух, береться „звичайний" тривимірний евклідів простір, а час вважається неперервним і однорідним (абсолютним), тобто незалежним від руху тіл і однаковим в усіх точках простору.

Сила є мірою взаємодії тіл між собою. В класичній механіці вважається, що взаємодія між тілами передається миттєво. Тому область застосовності класичної механіки обмежується швидкостями, набагато меншими за швидкість світла. Рух матеріальних тіл, швидкості яких є близькими до швидкості світла, вивчає релятивістська механіка, побудована на постулатах теорії відносності А. Ейнштейна.

Маса є мірою інертності тіла, а також гравітаційної взаємодії даного тіла з іншими тілами.

Коли кажуть про рух тіла, то розуміють під цим зміну його положення з плином часу по відношенню до якогось іншого тіла. Це означає, що при вивченні руху ми завжди маємо вказати, відносно якого іншого тіла розглядується його рух. З тілом, по відношенню до якого вивчається рух, (*тілом відліку*) пов'язують систему координат і годинник. Цю сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і годинника називають *системою відліку.* Оскільки час в теоретичній механіці вважається однаковий у всіх системах відліку, то, кажучи про систему відліку, можна обмежитися зазначенням тільки тіла відліку та системи координат, пов'язаної з цим тілом.

1.3 Основні моделі теоретичної механіки

У теоретичній механіці, зокрема кінематиці, при вивченні руху реальні матеріальні тіла замінюють на модельні, в яких зберігаються основні ознаки реальних тіл – адже для моделей набагато простіше встановити загальні закономірності руху, ніж для тіл реальних. Основними моделями в кінематиці є *матеріальна точка*, *матеріальна (механічна) система* й *абсолютно тверде тіло.*

Матеріальною точкою називають матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з розмірами, що характеризують рух. Одне й те саме тіло в деяких задачах можна прийняти за матеріальну точку, в інших задачах – ні. Наприклад, Землю можна вважати матеріальною точкою, якщо розглядати її рух навколо Сонця, коли власний обертальний рух Землі навколо своєї осі є несуттєвим порівняно з її обертальним рухом. Якщо ж йдеться про вплив власного обертання Землі на окремі механічні явища, які відбуваються на ній, то Землю вже не можна прийняти за матеріальну точку.

Сукупність матеріальних точок, рухи яких взаємопов'язані між собою, називається *матеріальною (механічною) системою.*

Матеріальна (механічна) система, маса якої розподілена в просторі неперервно, називається *твердим тілом.* Тверде тіло, яке зберігає свою геометричну форму і об'єм незмінними, незалежно від дії на нього інших тіл, називається *абсолютно твердим тілом.* Звичайно, абсолютно твердих тіл немає, оскільки в результаті дії сил всі тіла змінюють свою форму, тобто деформуються, але в багатьох випадках деформацією тіла можна знехтувати. Наприклад, при розрахунку польоту ракети ми можемо знехтувати невеликими коливаннями окремих її частин, так як ці коливання мало відобразяться на параметрах її польоту. Але при розрахунку ракети на міцність врахування цих коливань є обов'язковим, оскільки вони можуть викликати руйнування корпусу ракети.

1.4 Основні закони механіки

Фундаментальні закони теоретичної механіки було чітко вперше сформульовано у найбільш повному і завершеному вигляді Ісааком Ньютоном в його знаменитій книзі „Математичні начала натуральної філософії" (1687 р.). Їх можна сформулювати наступним чином.

Перший закон Ньютона (принцип інерції Галілея-Ньютона). *Існують такі системи відліку, відносно яких ізольована матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.* Такі системи відліку називаються *інерціальними.* Системи відліку, в яких принцип інерції не виконується, називаються *неінерціальними.*

Ізольованою називають матеріальну точку, яка не взаємодіє з іншими тілами, або коли сили, що діють на точку, взаємно компенсуються. Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху називається *інертністю.*

Слід відмітити, що всі закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку. Однак, звідси зовсім не випливає, що в динаміці вивчаються рухи, які відбуваються тільки в інерціальних системах. Пізніше ми будемо розглядати рух і в неінерціальних системах, однак таких, рух яких відносно інерціальної системи задано (відносний рух).

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами, причому мірою цієї взаємодії, як вже відмічалося, є сила. Зв'язок між зміною руху і силою дає наступний закон.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). *В інерціальних системах відліку похідна кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{F}, \tag{1}$$

де $\vec{L} = m\vec{v}$ – кількість руху (імпульс) матеріальної точки, m – маса матеріальної точки, $\vec{v}$ – її швидкість, $\vec{F}$ – сила, що діє на точку.

У класичній механіці розглядають рух зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла c. При русі з великими (порядку c) швидкостями, згідно спеціальної теорії відносності А. Ейнштейна, маса залежить від швидкості руху: $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, де m_0 — маса спокою тіла, v – швидкість руху.

При малих швидкостях ($v \ll c$) $m \approx m_0$, тому для тіл постійного складу ($m_0 = \mathrm{const}$) основний закон динаміки має добре відомий з курсу шкільної фізики вигляд

$$m\vec{w} = \vec{F}, \tag{2}$$

де $\vec{w} = d\vec{v}/dt$ -– прискорення точки. Зазначимо, що таке формулювання другого закону Ньютона непридатне у динаміці тіла змінної маси.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії). *Сили взаємодії двох матеріальних точок (дія і протидія) рівні за величиною і напрямлені в протилежні боки по прямій, що з'єднує ці точки:*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \tag{3}$$

де $\vec{F}_{21}$ – сила, що діє на першу точку з боку другої, а сила $\vec{F}_{12}$ діє на другу точку з боку першої.

1.5 Історичні етапи розвитку механіки

Вперше термін "механіка" ввів великий грецький мислитель Арістотель (384 –322 до н. е.) в своїх творах "Фізика", "Механіка", "Про світ і небо" та ін. З грецької мови слово "механіка" означає "знаряддя", "споруда", "мистецтво побудови машин". Твори Арістотеля носили дещо метафізичний характер; він, наприклад, вважав, що швидкість падаючого тіла залежить від його ваги, що було спростовано Галілеєм аж через близько 2000 років.

Поштовх математичній думці дали "Начала" Евкліда (365–270 до н. е.), в яких систематизовано викладено геометрію, а також деякі питання теорії чисел. Евклід є також автором праць з астрономії, оптики, музики та ін.

Птолемей (бл. 87–165) – давньогрецький вчений (математик, астроном, географ, астролог), твори якого мали великий вплив на розвиток астрономії, географії та оптики. Створив геоцентричну систему світу, розробив математичну теорію руху планет навколо нерухомої Землі, яка дозволяла обчислювати їхнє розташування на небі. Система Птолемея викладена в його головній праці «Альмагест» – енциклопедії астрономічних знань давнини.

Леонардо да Вінчі (1452–1519) – італійський художник (живописець, скульптор, архітектор), вчений (анатом, натураліст), винахідник, письменник, музикант, один з найбільших представників мистецтва Високого Відродження. Проводив дослідження в області теорії механізмів, тертя в машинах і русі по похилій площині, займався перспективою, теорією тіней, будував літальні апарати. Основні винаходи: орнітоптер (дельтаплан), який відтворював пташиний політ, танк, водолазний костюм, гелікоптер, парашут, робот-лицар, прототип автомобіля, кулемет, велосипед, прожектор, рятувальне коло, коліщатковий замок – механізм вогнепальної зброї і т.д., більшість з яких були визнані набагато пізніше його смерті.

Миколай Коперник (1473–1543) -— астроном і математик, фізик, правник, дипломат, економіст, канонік та лікар польсько-німецького походження. Автор геліоцентричної картини світу.

Йоганн Кеплер (1571–1630) – німецький філософ, математик, астроном, астролог і оптик, відомий насамперед відкриттям трьох законів руху планет, названих законами Кеплера на його честь. В обчислювальній математиці на його честь названо метод наближеного обчислення інтегралів. Він поширював логарифмічне числення у Німеччині, заснував оптику як науку, вдосконалив телескоп-рефрактор та допоміг довести відкриття, зроблені за допомогою телескопа його сучасником Ґ. Ґалілеєм.

Основи сучасної кінематики і динаміки заклав Ґалілео Ґалілей (1564–1642), який вперше знайшов закони вільного падіння і руху тіл, кинутих під кутом до горизонту, сформулював відомий принцип інерції, а також дав закони рівноприскореного руху.

Ісаак Ньютон (1643–1727) -— англійський вчений, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих.

У книзі «Математичні начала натуральної філософії» Ньютон сформулював закони руху, відомі як закони Ньютона й закон всесвітнього тяжіння, які стали основою наукового світогляду впродовж трьох наступних століть і мали великий вплив не тільки на фізику, а й на філософію. Використовуючи свою теорію Ньютон зумів пояснити закони Кеплера, що описують рух планет навколо Сонця, чим заперечив останні сумніви щодо геліоцентричної системи світобудови.

Ньютон побудував перший телескоп-рефлектор і розвинув теорію кольору на основі спостережень розщеплення білого світла в спектр в оптичній призмі. Він сформулював емпіричний закон теплообміну, першим запропонував формулу розрахунку швидкості звуку в повітрі. У математиці Ньютон паралельно з Ґотфрідом Лейбніцом розвинув числення нескінченно малих, працював з рядами, узагальнив біном Ньютона та запропонував метод Ньютона розв'язування нелінійних рівнянь.

Визначний внесок в математику та механіку зробили Ейлер, Д'аламбер, Лагранж, які розробили аналітичні методи розв'язування механічних задач за допомогою диференціальних рівнянь.

Подальший розвиток механіки пов'язаний з працями Лапласа, Фур'є, Гауса, Якобі, Гамільтона, Остроградського, Кельвіна, Герца та ін.

На початку XX ст. Альберт Ейнштейн створив спеціальну та загальну теорії відносності, які дають нові поняття про простір, час, матерію та їх властивості.

2 Лекція 2. Способи задання руху матеріальної точки. Траєкторія руху. Швидкість і прискорення точки при різних способах задання руху

2.1 Основні поняття кінематики точки

В кінематиці рух вважається заданим, тобто вважаються заданими як функції часу параметри, які визначають положення тіла відносно вибраної системи відліку. Причому, не має значення, який рух здійснює вибрана система координат по відношенню до інших тіл, які не входять до нашого розгляду. Однак завжди слід мати на увазі, що характер спостережуваного руху істотно залежить від вибору системи відліку. Так, поршень автомобільного двигуна здійснює прямолінійний коливальний рух відносно автомобіля і синусоїдальний рух відносно дороги, по якій переміщується зі сталою швидкістю.

Якщо положення точки відносно вибраної системи відліку не змінюється, то кажуть, що точка знаходиться у *стані спокою* по відношенню до цієї системи відліку. Якщо положення точки відносно вибраної системи відліку змінюється, то кажуть, що точка рухається по відношенню до цієї системи відліку. Оскільки спокій і рух тіла ми розглядаємо лише по відношенню до вибраної системи відліку (яка в свою чергу може переміщуватися довільним чином), то поняття “спокій” і “рух” є відносними. Однак в кінематиці часто користуються термінами “абсолютний рух”, “абсолютна швидкість” тощо, які мають, звичайно, умовний характер. Зокрема, якщо немає спеціального застереження, під виразом “нерухома система координат” слід розуміти систему осей, відносно яких розглядається рух.

Рух, як і час, по своїй суті неперервний. Неперервну криву, яку описує точка при своєму русі в просторі, називають *траєкторією точки.* В задачах небесної механіки траєкторію іменують також *орбітою.* Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то рух називають *прямолінійним.* Якщо ж траєкторія – крива лінія (не обов’язково плоска), то рух точки називається *криволінійним.*

Ми почнемо з вивчення криволінійного руху точки, оскільки прямолінійний рух є частинним випадком криволінійного. Приступаючи до вивчення руху точки, ми повинні сформулювати ті задачі, які розв’язуються в кінематиці. Виходячи з того, що основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є *положення*, *швидкість* і *прискорення*, ми можемо сформулювати ці задачі наступним чином: *знайти способи задання руху і, виходячи з них, дати методи визначення швидкості і прискорення матеріальної точки.*

2.2 Способи задання руху точки

Перш за все означимо, що слід розуміти під терміном “задати рух”.

Задати рух точки означає визначити її положення відносно вибраної системи відліку в будь-який момент часу або, як кажуть, написати рівняння (закон) руху. Існують три способи задання руху точки у просторі: *векторний*, *координатний* і *натуральний.* Розглянемо коротко кожен із них.

Векторний спосіб. При векторному способі положення точки в просторі задається *радіус-вектором* $\vec{r}$, який проводиться із якогось заданого центра і відомий як функція часу. Таким чином, рівність

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{4}$$

є *кінематичним рівнянням руху у векторній формі* і, одночасно, рівнянням траєкторії.

Криву, яку описує кінець будь-якого вектора за умови, що початок його знаходиться весь час в одній і тій самій точці, називають *годографом* цього вектора. Отже, траєкторія точки є годографом радіус-вектора $\vec{r}$.

Координатний спосіб. Положення точки по відношенню до якої-небудь системи координат повністю визначається координатами точки. Координатний спосіб задання руху полягає в заданні координат точки як відомих функцій часу. Положення точки в тривимірному просторі визначається трьома числами q_1, q_2, q_3, які взагалі називаються *криволінійними координатами точки.* Отже, *закон руху точки в координатному способі задання руху* буде задаватися рівняннями

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t). \tag{5}$$

Тут всі функції повинні бути однозначними, неперервними і диференційовними.

Найчастіше користуються прямокутними декартовими координатами точки x, y, z. Тоді рівнянням руху буде сукупність трьох рівностей:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{6}$$

які одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі, причому роль параметра відіграє час t. Виключаючи з рівнянь (6) параметр t, отримаємо одну з наступних систем рівнянь:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi(x,y) = 0, \\ \chi(x,z) = 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} \psi(x,y) = 0, \\ \varphi(x,z) = 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} \chi(x,y) = 0, \\ \psi(x,z) = 0 \end{array}\right\}, \tag{7}$$

кожна з яких задає траєкторію точки як перетин двох циліндричних поверхонь.

Крім декартової, в механіці для вивчення руху точки використовуються часто і інші системи координат, зокрема сферична, циліндрична та ін.

Натуральний спосіб. При натуральному способі задання руху вказуються траєкторія точки і закон її руху по цій траєкторії.

Нехай точка рухається по відношенню до вибраної системи відліку по траєкторії, що визначається рівняннями

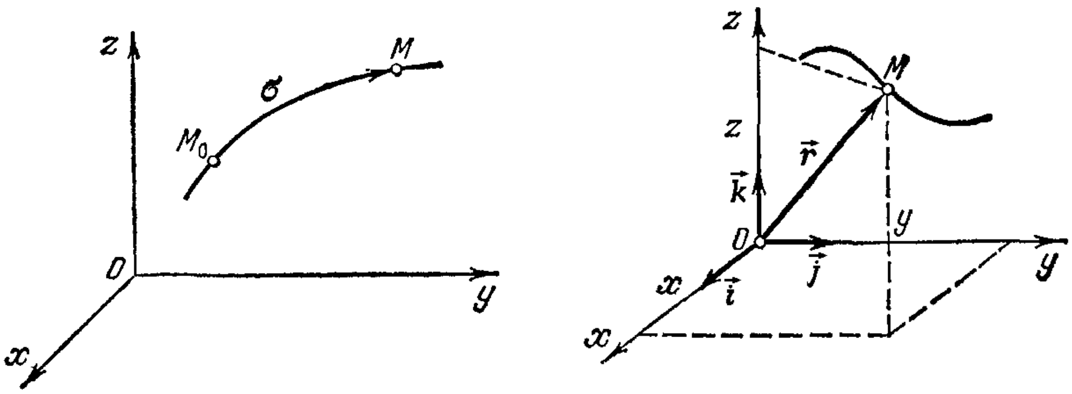
$$f_1(x,y,z) = 0, \qquad f_2(x,y,z) = 0. \tag{8}$$

Нехай M_0 – деяка фіксована точка на траєкторії. Вибравши напрямок додатного відліку дуги по траєкторії, ми визначимо положення точки M в будь-який момент часу, якщо будемо знати, як змінюється дуга $\sigma = \overset{\frown}{M_0M}$ (рис. 1, a) з часом

$$\sigma = \sigma(t). \tag{9}$$

Ця залежність є *законом руху при натуральному способі задання.*

Всі розглянуті способи задання руху взаємопов'язані.



а) б)

Рис. 1

Нехай, наприклад, рух задано координатним способом у вигляді (6). Очевидно, що при цьому проекції радіус-вектора $\vec{r}$ (рис. 1, *б*) на осі координат дорівнюють координатам точки M і, отже, можна записати

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{10}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти) координатних осей x, y, z.

Модуль вектора $\vec{r}$ знаходитиметься за формулою

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а напрям визначатиметься напрямними косинусами

$$\cos(\widehat{x, \vec{r}}) = x/r,$$
$$\cos(\widehat{y, \vec{r}}) = y/r,$$
$$\cos(\widehat{z, \vec{r}}) = z/r.$$

Розглянемо також перехід від координатного способу до натурального.

Нехай рух задано рівняннями (6). Виключаючи з них час t, отримаємо рівняння траєкторії (8). Знайдемо тепер закон руху $\sigma = \sigma(t)$.

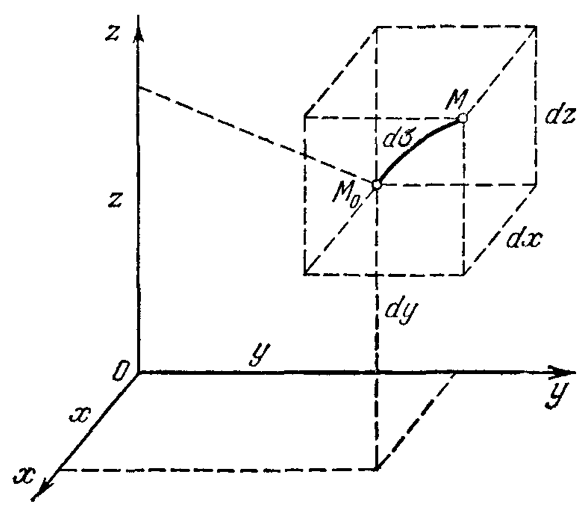


Рис. 2

Диференціал дуги можна знайти за формулою (див. рис. 2) $d\sigma = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, де dx, dy, dz – диференціали координат точки, які з урахуванням (6) дорівнюють $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, $dz = \dot{z}(t)dt$.

Формулу для $d\sigma$ можна переписати у вигляді $d\sigma = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt$.

Інтегруючи цей вираз в проміжку від $t = 0$ (початок руху) до деякого моменту часу t, отримаємо закон руху

$$\sigma = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t') + \dot{z}^2(t')}dt'.$$

Знак “плюс” чи “мінус” перед інтегралом ставиться в залежності від вибору додатного відліку дуги: якщо рух точки починається в бік додатного відліку дуги, то слід ставити знак “плюс”, в протилежному випадку – знак “мінус”.

2.3 Швидкість матеріальної точки

Перейдемо тепер до означення швидкості точки та методам її знаходження в різних способах задання руху.

Векторний спосіб. Нехай в момент часу t положення точки визначається вектором $\vec{r}(t)$, а в момент $t+\Delta t$ – радіус-вектором $\vec{r}(t+\Delta t)$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ називається *вектором переміщення точки* за час Δt.

Швидкістю точки в даний момент часу (або миттєвою швидкістю) називають границю відношення вектора переміщення точки до проміжку часу, за який це переміщення відбулося, коли цей проміжок прямує до нуля, тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{11}$$

Розмірність швидкості буде

$$[v] = \frac{[\text{довжина}]}{[\text{час}]}.$$

Одиницями вимірювання швидкості можуть бути м/с, см/с, км/год.

Як видно із означення, швидкість точки рівна похідній за часом від радіус-вектора. Таким чином, вектор швидкості завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в бік руху точки. Якщо модуль швидкості не змінюється з часом, то рух називається *рівномірним*.

Координатний спосіб. Підставляючи вираз (10) в (11) і враховуючи, що орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вибраної системи координат сталі, отримуємо формулу для *швидкості точки при координатному способі задання*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{12}$$

Вираз (11) можна також подати в іншій формі:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \tag{13}$$

де проекції швидкості на координатні осі будуть

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{14}$$

Знаючи їх можна визначити модуль і напрям вектора швидкості точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\widehat{x, \vec{v}}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(\widehat{y,\vec{v}}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(\widehat{z,\vec{v}}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Натуральний спосіб. Нехай точка M рухається по деякій кривій (рис. 3). За проміжок часу Δt точка переміститься по кривій із положення M в положення M_1. Дуга $MM_1 = \Delta\sigma > 0$, якщо рух точки відбувається в бік додатного відліку дуги, і $\Delta\sigma < 0$, якщо рух відбувається в протилежний бік. Формулу (11) для швидкості перепишемо у вигляді

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\sigma} \cdot \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\sigma} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}. \tag{15}$$

Оскільки границя відношення дуги до хорди, що її стягує, дорівнює за модулем одиниці, а граничне положення січної MM_1 співпадає з напрямом дотичної до кривої в точці M, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\sigma} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої, напрямлений в бік додатного відліку дуги.

Справді, якщо $\Delta\sigma > 0$, то вектор $\Delta\vec{r}/\Delta\sigma$ напрямлений в бік $\Delta\vec{r}$ (рис. 3, *а*), а при $\Delta\sigma < 0$ цей вектор напрямлений в бік, протилежний $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.4, *б*). В обох випадках даний вектор, а, отже, і його границя $d\vec{r}/d\sigma = \vec{\tau}$, напрямлені в бік зростання дуги σ.

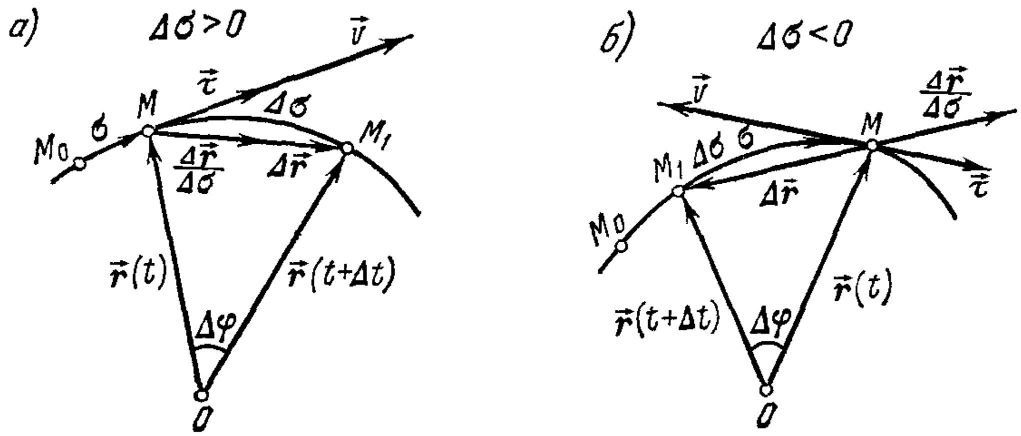


Рис. 3

Беручи до уваги, що

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma},$$

маємо

$$\vec{v} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau}. \tag{16}$$

Позначаючи $v_\tau = d\sigma/dt$, отримаємо

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}. \tag{17}$$

Із формули (17) випливає, що $v = |v_\tau|$. Очевидно, що $v_\tau = v$, якщо рух відбувається в бік додатного відліку дуги, і $v_\tau = -v$, якщо рух відбувається в протилежний бік.

2.4 Прискорення матеріальної точки

Векторний спосіб. *Прискоренням точки в даний момент часу (миттєвим прискоренням) називають границю відношення приросту швидкості точки до проміжку часу, за який цей приріст відбувся, коли цей проміжок прямує до нуля*, тобто

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \tag{18}$$

Можна також використовувати іншу форму запису: $\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$. Розмірність прискорення буде

$$[w] = \frac{[\text{швидкість}]}{[\text{час}]} = \frac{[\text{довжина}]}{[\text{час}]^2}.$$

Одиницями вимірювання прискорення можуть бути м/с^2, см/с^2.

Координатний спосіб. Підставляючи рівність (13) в (18), отримуємо формулу для *прискорення точки при координатному способі задання*:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}. \tag{19}$$

Нехай w_x, w_y, w_z – проекції прискорення на координатні осі x, y, z; тоді

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \;\; w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \;\; w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{20}$$

Модуль прискорення визначається за формулою

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Знаючи проекції прискорення та його модуль, легко знаходимо напрямні косинуси вектора прискорення:

$$\cos(\widehat{x, \vec{w}}) = \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos(\widehat{y, \vec{w}}) = \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos(\widehat{z, \vec{w}}) = \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

Натуральний спосіб. Перед тим, як визначити прискорення в натуральному способі задання руху, нагадаємо деякі відомості з диференціальної геометрії. У будь-якій точці M просторової кривої можна визначити три взаємно перпендикулярні напрями: *дотична*, *головна нормаль* і *бінормаль*, одиничні вектори яких позначимо відповідно $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Орт $\vec{\tau}$ напрямлений у бік додатного відліку дугової координати σ, орт $\vec{n}$ – у бік угнутості траєкторії, орт $\vec{b}$ напрямлений так, щоб $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ утворювали праву систему координат. Вказані рухомі осі (дотична, головна нормаль і бінормаль) називаються *натуральними*, а прямокутний трiедр з вершиною в точці M, утворений їх напрямами – *натуральним тригранником*.

Координатна площина, що проходить через головну нормаль $\vec{n}$ і бінормаль $\vec{b}$, називається нормальною. Площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і головну нормаль $\vec{n}$, називається стичною, а площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ і бінормаль $\vec{b}$ – спрямною. На рис. 4 стична, нормальна і спрямна площини позначено відповідно цифрами *I*, *II* і *III*. Якщо розглядувана крива є плоскою, то вона розташована в стичній площині.

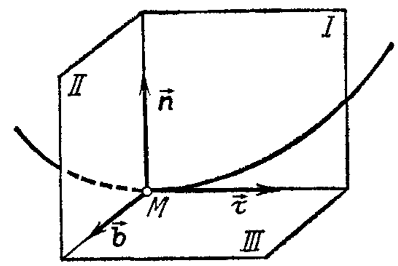


Рис. 4

Кут, що стягує дугу $\Delta\sigma$ між двома дотичними у двох будь-яких точках M і M_1 на кривій, називається *кутом суміжності*. Позначимо його через $\Delta\varphi$ (рис. 3, 5).

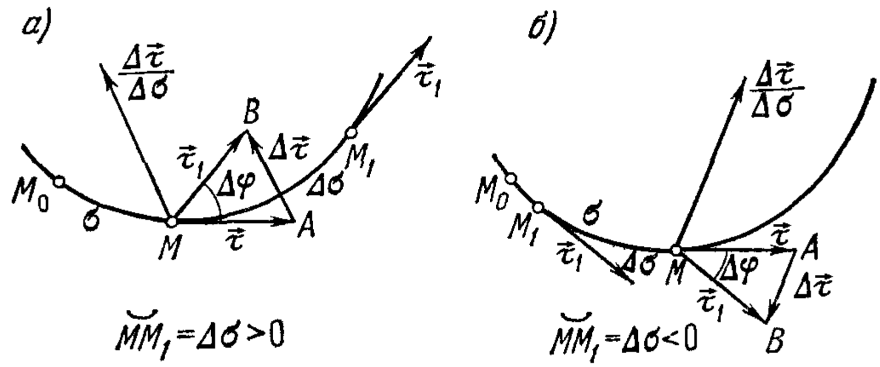


Рис. 5

Границя відношення кута суміжності $\Delta\varphi$ до елемента дуги $\overbrace{MM_1} = \Delta\sigma$ при $\Delta\sigma \to 0$ називається *кривизною* k кривої в даній точці M:

$$k = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta\sigma|}.$$

Величина

$$\rho = \frac{1}{k} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{|\Delta\sigma|}{\Delta\varphi}$$

називається *радіусом кривизни* кривої. Відмітимо, що кривизна прямої дорівнює нулю, а її радіус кривизни рівний нескінченності.

Підставляючи (17) в формулу (18) для прискорення точки, одержимо

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_\tau\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{21}$$

Перший доданок є вектором, напрямленим по дотичній $\vec{\tau}$; він називається *дотичною* або *тангенціальною складовою прискорення* і позначається $\vec{w}_\tau$. Отже,

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\vec{\tau} = \ddot{\sigma}\vec{\tau} = w_\tau\vec{\tau}. \tag{22}$$

Щоб визначити другий доданок, знайдемо величину і напрям вектора $d\vec{\tau}/d\sigma$.

Нехай в момент часу t точка знаходиться в положенні M на траєкторії, а в момент часу $t+\Delta t$ – в положенні M_1. Переносячи вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M, знайдемо приріст вектора $\vec{\tau}$ за проміжок часу Δt (рис. 5, *а*)

$$\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}.$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}$ при русі точки в бік додатного відліку дуги напрямлений в бік увігнутості траєкторії (рис. 5, *а*), а при русі в бік від'ємного відліку дуги напрямлений в бік опуклості траєкторії (рис. 5, *б*).

Знайдемо похідну вектора $\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}v_\tau. \tag{23}$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}/\Delta\sigma$ завжди напрямлений в бік увігнутості траєкторії (див. рис. 5, *а* та *б*) і лежить в площині, що проходить через точку M та вектори $\vec{\tau}$ та $\vec{\tau}_1$ (площина MAB). Отже, вектор $d\vec{\tau}/d\sigma$ лежить в стичній площині, оскільки при $\Delta\sigma\to 0$ ($\Delta t\to 0$) площина MAB співпадає зі стичною площиною до траєкторії в точці M.

Диференціюючи тотожність $\vec{\tau}^2 = 1$ по σ; одержимо $2\vec{\tau}d\vec{\tau}/d\sigma = 0$. Із цього випливає, що вектори $d\vec{\tau}/d\sigma$ і $\vec{\tau}$ є перпендикулярними. Таким чином, вектор $d\vec{\tau}/d\sigma$ лежить у стичній площині, напрямлений в бік угнутості траєкторії та перпендикулярний до $\vec{\tau}$, тобто напрямлений по головній нормалі $\vec{n}$ до центра кривизни траєкторії.

Визначимо тепер модуль вектора $d\vec{\tau}/d\sigma$. Із рівнобедреного трикутника MAB (рис. 5) випливає, що $AB = |\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}| = 2\sin(\Delta\varphi/2)$, де $\Delta\varphi$ – кут суміжності. Тоді

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta\sigma|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Враховуючи, що $\vec{n}$ є одиничним вектором головної нормалі, матимемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{\vec{n}}{\rho}. \tag{24}$$

Таким чином, з урахуванням (23) і (24) другий доданок виразу (21) набуває вигляду

$$v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

і називається *нормальним прискоренням* та позначається

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = w_n\vec{n}. \tag{25}$$

Оскільки складові $\vec{w}_\tau$, $\vec{w}_n$ лежать у стичній площині, то й вектор $\vec{w}$ також розташований у ній. Тому проекція повного прискорення на бінормаль $w_b = 0$.

Отже, на підставі (21), (22) і (25) остаточно одержимо формулу для *прискорення точки в натуральному способі задання руху*:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \tag{26}$$

Модуль повного прискорення

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \tag{27}$$

Дотичне прискорення $w_\tau = dv_\tau/dt$ рівне нулю при русі точки зі сталою за модулем швидкістю і в моменти часу, в які швидкість v_τ досягає екстремальних значень.

Якщо v_τ і w_τ одного знаку, то модуль швидкості $v = |v_\tau|$ зростає і рух називається *прискореним.* Якщо ж v_τ і w_τ різних знаків, то модуль швидкості спадає і рух буде *сповільненим.* При $w_\tau = 0$ модуль швидкості v залишається сталим – рух рівномірний.

Як видно з (25), нормальне прискорення є завжди додатною величиною і рівне нулю при прямолінійному русі ($\rho = \infty$), в точках перегину криволінійної траєкторії і в моменти часу, в які швидкість обертається в нуль.

3 Лекція 3. Частинні випадки руху точки

3.1 Найпростіші види руху точки

3.1.1 Рівномірний рух точки

Рух матеріальної точки називається рівномірним, якщо модуль її швидкості з часом не змінюється, тобто $v = |v_\tau| = \text{const}$.

З рівняння $d\sigma/dt = v_\tau$, інтегруючи, знайдемо закон рівномірного руху:

$$\sigma = v_\tau t + \sigma_0, \tag{28}$$

де $\sigma_0 = \sigma(0)$ – початкове положення точки на траєкторії (в момент $t = 0$).

Дотичне прискорення при рівномірному русі $w_\tau = dv_\tau/dt = 0$.

3.1.2 Рівнозмінний рух точки

Рух матеріальної точки називається рівнозмінним, якщо її дотичне прискорення з часом не змінюється, тобто $w_\tau = \text{const}$.

З рівняння $dv_\tau/dt = w_\tau$, інтегруючи, знайдемо закон зміни швидкості рівнозмінного руху:

$$v_\tau = w_\tau t + v_{\tau 0}, \tag{29}$$

де $v_{\tau 0} = v_\tau(0)$ – початкова швидкість точки (в момент $t = 0$).

Підставляючи (29) в рівняння $d\sigma/dt = v_\tau$ та інтегруючи його, знайдемо закон рівнозмінного руху:

$$\sigma = \frac{v_\tau t^2}{2} + v_{\tau 0} t + \sigma_0, \tag{30}$$

де $\sigma_0 = \sigma(0)$ – початкове положення точки на траєкторії (в момент $t = 0$).

Якщо v_τ і w_τ одного знаку, то рух тут називається *рівноприскореним.* Якщо ж v_τ і w_τ різних знаків, то рух буде *рівносповільненим.*

3.1.3 Прямолінійний рух точки

Рух матеріальної точки називається прямолінійним, якщо її траєкторією є пряма лінія.

Направляючи одну з координатних осей, наприклад, вісь x, уздовж цієї прямої, ми повністю визначимо положення точки заданням її абсциси як функції часу, тобто $x = x(t)$. В цьому випадку рівнянням руху буде $\sigma = x(t)$, а вектор $\vec{\tau} = \vec{i}$.

Проекції швидкості і прискорення на вісь x відповідно будуть

$$v_x = v_\tau = \dot{x}, \quad w_x = w_\tau = \dot{v}_x = \ddot{x}.$$

Модулі швидкості і прискорення відповідно рівні

$$v = |\dot{x}|, \quad w = |\dot{v}_x| = |\ddot{x}|.$$

Нормальне прискорення в прямолінійному русі $w_n = v^2/\rho = 0$, оскільки для прямої радіус кривизни $\rho = \infty$.

Якщо $v_x > 0$, то рух точки відбувається в бік додатнього напрямку осі x. Якщо при цьому $w_x > 0$, то рух прискорений, якщо ж $w_x < 0$, то рух сповільнений.

При $v_x < 0$ точка рухається в напрямку, протилежному додатньому напрямку осі x. Якщо при цьому $w_x > 0$, то рух сповільнений, якщо ж $w_x < 0$, то рух прискорений.

3.1.4 Обертальний рух точки

Рух матеріальної точки називається обертальним (коловим), якщо її траєкторією є коло.

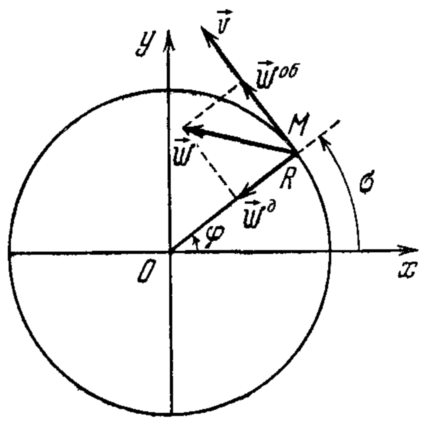


Рис. 6

При русі точки по колу радіуса R її положення зручно задавати за допомогою кута повороту $\varphi(t)$, який відраховується від додатнього напрямку осі x (див. рис. 6). Тоді рівнянням руху точки в натуральному способі задання буде

$$\sigma = R\varphi(t). \tag{31}$$

Швидкість точки з урахуванням (31) визначається формулою

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}.$$

Величину

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

називають *кутовою швидкістю* обертання точки.

Таким чином, при обертальному русі швидкість точки буде

$$v_\tau = R\omega. \tag{32}$$

Вектор швидкості напрямлений увесь час по дотичній до кола (тобто перпендикулярно до радіуса OM)

а) проти руху годинникової стрілки, якщо $\omega = \dot{\varphi} > 0$ (як зображено на рис. 6), або

б) за рухом годинникової стрілки, якщо $\omega = \dot{\varphi} < 0$.

Дотичне прискорення

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}.$$

Величину $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ називають *кутовим прискоренням* точки, а прискорення

$$w_\tau = w^{об} = R\varepsilon \tag{33}$$

– *обертальним прискоренням* точки. Як і швидкість, вектор обертального прискорення напрямлений увесь час по дотичній до кола (тобто перпендикулярно до радіуса OM)

а) проти руху годинникової стрілки, якщо $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ (як зображено на рис. 6), або

б) за рухом годинникової стрілки, якщо $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$.

Оскільки для кола радіус кривизни $\rho = R$, то нормальне прискорення, яке називається тут *доцентровим*, буде рівне

$$w_n = w^{\partial} = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2 \qquad (34)$$

і напрямлено завжди до центра кола.

Оскільки вектори обертального та доцентрового прискорень взаємноперпендикулярні, то модуль повного прискорення точки в обертальному русі буде рівний

$$w = \sqrt{(w^{об})^2 + (w^{\partial})^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (35)$$

3.2 Рух точки в полярних координатах

3.2.1 Рівняння руху точки. Швидкість

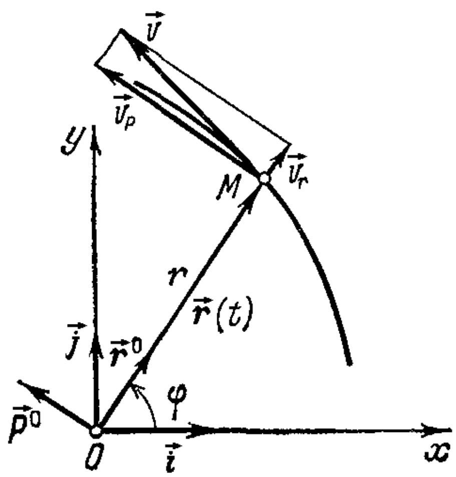


Рис. 7

Розглянемо тепер рух, заданий в полярних координатах, тобто нехай дано як функції часу полярний радіус $r(t)$ і полярний кут $\varphi(t)$, що визначають положення точки. Тоді рівності

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (36)$$

є рівняннями руху, а також рівняннями траєкторії у параметричному вигляді (якщо вдається виключити з них час, то отримаємо рівняння траєкторії $F(r, \varphi) = 0$ в явному вигляді).

Введемо в розгляд одиничні вектори: $\vec{r}^0$, напрямлений по радіусу-вектору в бік зростання r, і $\vec{p}^0$, повернутий відносно $\vec{r}^0$ на кут $\pi/2$ в бік зростання кута φ (рис. 7). Тоді одиничні вектори $\vec{r}^0$ і $\vec{p}^0$ можуть бути представлені через одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатних осей:

$$\vec{r}^0 = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j},$$
$$\vec{p}^0 = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}.$$

Надалі нам будуть потрібні вирази для похідних за часом від одиничних векторів $\vec{r}^0$ і $\vec{p}^0$.

Диференціюючи $\vec{r}^0$ за часом, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}^0}{dt} = \left(-\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}\right)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{p}^0. \qquad (37)$$

Аналогічно

$$\frac{d\vec{p}^0}{dt} = -\left(\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}\right)\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{r}^0. \qquad (38)$$

Радіус-вектор $\vec{r}$, що визначає положення точки M, можна подати у вигляді

$$\vec{r} = r\vec{r}^0, \tag{39}$$

При русі точки вектор $\vec{r}$ змінюється і за довжиною, і за напрямком, а отже, $\vec{r}^0$ та r є деяким функціями часу. Диференціюючи рівність (39) за часом, отримаємо наступний вираз для швидкості точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}^0 + r\frac{d\vec{r}^0}{dt}. \tag{40}$$

Швидкість, як видно з цього виразу, складається з двох доданків. Перший з них має той же напрямок, що і радіус-вектор $\vec{r}$, і характеризує зміну $\vec{r}$ за модулем. Щоб з'ясувати зміст другого доданка, необхідно підставити в нього похідну (37). Тоді

$$r\frac{d\vec{r}^0}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^0. \tag{41}$$

Таким чином, другий доданок представляє зміну вектора $\vec{r}$ за напрямком. Кінцевий вираз швидкості буде:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \frac{dr}{dt}\vec{r}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^0. \tag{42}$$

Перший доданок $\vec{v}_r = \dot{r}\vec{r}^0$ називається *радіальною* складовою, а другий доданок $\vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}^0$ – *трансверсальною (або поперечною)* складовою швидкості.

Проекції швидкості на радіальний та трансверсальний (поперечний) напрямки

$$v_r = \dot{r}, \quad v_p = r\dot{\varphi} \tag{43}$$

називають відповідно радіальною та трансверсальною (поперечною) швидкостями.

Модуль швидкості знаходиться за формулою

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \tag{44}$$

3.2.2 Прискорення точки

Знайдемо тепер прискорення в полярних координатах. Диференціювання (42) за часом дає

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{r}^0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{p}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{p}^0}{dt}.$$

Враховуючи формули для похідних (37), (38), отримуємо кінцевий вираз для прискорення

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_p = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{p}^0. \tag{45}$$

Звідси знаходимо проекції прискорення на радіальний та трансверсальний напрямки

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Модуль вектора прискорення визначається формулою $w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2}$.

3.3 Секторна швидкість

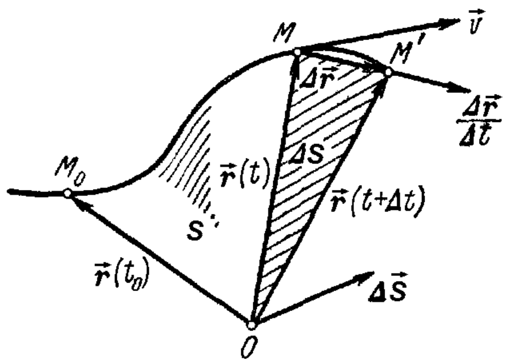


Рис. 8

Припустимо, що точка рухається у просторі за законом:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Радіус-вектор точки, переміщуючись в просторі, описує конус, направляючою якого служить траєкторія точки. Позначимо величину площі OM_0M бічної поверхні цього конуса, обмеженої кривою і двома радіус-векторами $r(t_0)$ і $r(t)$, через S (рис. 8). Нехай в момент t точка знаходиться в положенні M, який визначається радіусом-вектором $\vec{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ приходить в положення M', яке визначається радіус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$. Тоді приріст площі, що описується радіус-вектором за час Δt, позначимо ΔS.

Границя відношення приросту площі, що описується радіус-вектором, до відповідного проміжку часу Δt, при $\Delta t \to 0$ називається *секторною швидкістю* точки відносно центра O:

$$v_S = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{46}$$

Якщо величина Δt мала, то приріст площі Δs за проміжок часу Δt можна наближено (з точністю до малих вищого порядку) прирівняти до площі трикутника OMM':

$$\Delta S \approx S_{\triangle OMM'} = \frac{1}{2} |\vec{r}(t)| \, |\Delta\vec{r}| \sin(\vec{r}(t), \Delta\vec{r}) = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \Delta\vec{r}| \,,$$

де $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ – вектор переміщення точки.

Введемо вектор приросту площі $\Delta\vec{S} \approx (\vec{r}(t) \times \Delta\vec{r})/2$. Тоді вектор

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{47}$$

називається *вектором секторної швидкості* точки відносно центра O.

Вектор $\vec{v}_S$ можна виразити через вектор швидкості $\vec{v}$, якщо підставити в (47) елемент площі $d\vec{S} = (\vec{r} \times d\vec{r})/2$:

$$\vec{v}_S = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}. \tag{48}$$

У разі плоского руху величина елемента площі може бути представлена через полярні координати, якщо записати площу трикутника OMM' у вигляді (див. рис. 9)

$$\Delta S \approx S_{\triangle OMM'} = \frac{1}{2} r(t) r(t + \Delta t) \sin\Delta\varphi. \tag{49}$$

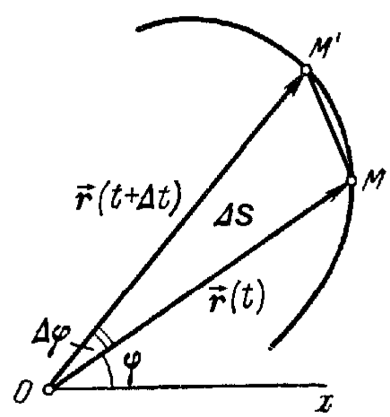


Рис. 9

Підставляючи (49) в (46), одержимо, що чисельне значення секторної швидкості в полярних координатах виражається рівністю

$$v_S = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t) r(t + \Delta t) \sin\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \tag{50}$$

4 Лекція 4. Найпростіші види руху твердого тіла

4.1 Задання руху твердого тіла

При русі твердого тіла окремі його точки рухаються в загальному випадку по різних траєкторіях і мають в кожен момент часу різні швидкості та прискорення. Може спочатку здатися, що для задання руху твердого тіла потрібно задати рух кожної його точки, тобто необхідно мати безліч рівнянь руху. Насправді це не так, бо переміщення окремих точок пов'язані умовою незмінності відстаней між ними.

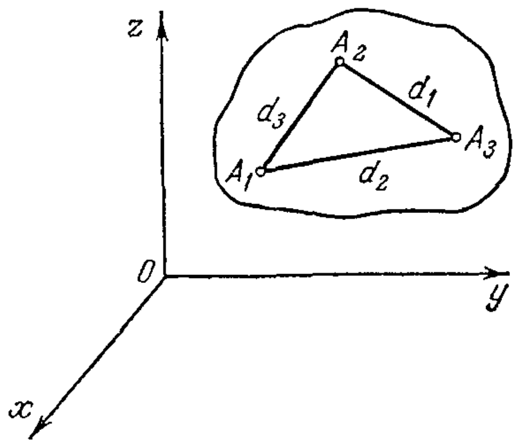


Рис. 10

Покажемо, що положення твердого тіла в загальному випадку цілком визначається завданням шести незалежних параметрів. Для цього візьмемо в тілі три не лежать на одній прямій точки (рис. 10) A_1, A_2, A_3 з координатами

$$x_k = x_k(t),\ y_k = y_k(t),\ z_k = z_k(t)\ \ (k = 1, 2, 3). \quad (51)$$

Оскільки відстані d_1, d_2, d_3 між точками твердого тіла не змінюються, то координати точок повинні задовольняти трьом рівнянням

$$\left.\begin{array}{l}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_3^2,\\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d_1^2,\\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_2^2.\end{array}\right\} \quad (52)$$

Отже, з дев'яти координат (51) незалежних тільки шість, інші три визначаються з рівнянь (52). Якщо взяти ще одну точку A_4 з координатами x_4, y_4, z_4, то ці координати повинні будуть задовольняти трьом рівнянням вигляду (52), що виражають незмінність відстані до раніше обраних точок A_1, A_2, A_3. Таким чином, положення твердого тіла відносно довільно обраної системи координат повністю визначається шістьма незалежними параметрами.

Число незалежних параметрів, завдання яких однозначно визначає положення твердого тіла в просторі, називається числом ступенів вільності (свободи) твердого тіла.

Зауважимо, що задання шести декартових координат не є найкращим способом задання руху твердого тіла. Як буде пізніше показано, існують зручніші параметри, що визначають положення тіла в просторі. В кожному окремому випадку ми будемо намагатися вибирати незалежні параметри, які визначають рух твердого тіла, виходячи з міркувань простоти і зручності розв'язання основних задач кінематики.

4.2 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому будь-яка пряма, жорстко зв'язана з тілом, рухається паралельно сама собі (залишається увесь час руху паралельною своєму початковому стану).

Теорема. *При поступальному русі твердого тіла всі його точки рухаються однаково, оскільки їх переміщення, швидкості і прискорення геометрично рівні.*

Доведення

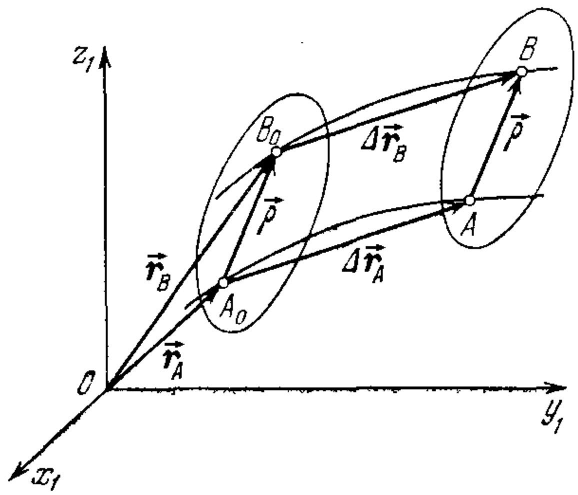


Рис. 11

Нехай тверде тіло рухається поступально відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 11), $\vec{r}_A$ – радіус-вектор точки A, $\vec{r}_B$ – радіус-вектор точки B, а $\vec{\rho}$ – радіус-вектор, який визначає положення точки B в рухомій системі координат $Axyz$, жорстко зв'язаній з тілом (на рис. 11 цю систему не показано).

Так як дане тіло абсолютно тверде і його рух поступальний, то вектор $\vec{\rho}$ при русі тіла не змінює модуль і напрямок.

З розгляду рис. 11 випливає

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{53}$$

Нехай в момент часу t тіло займало положення I, а в момент часу $t + \Delta t$ – положення II (рис. 11). Тоді $\Delta\vec{r}_A$ буде вектором переміщення точки A, а $\Delta\vec{r}_B$ – вектором переміщення точки B за проміжок часу Δt.

Під час руху вектор $\vec{\rho}$ не змінюється, значить, відрізки A_0B_0 і AB рівні та паралельні і, отже, фігура A_0B_0BA – паралелограм.

Таким чином, $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$, тобто при поступальному русі абсолютно твердого тіла переміщення всіх його точок геометрично рівні між собою.

З рівності (53) і умови сталості вектора $\vec{\rho}$ також випливає, що *траєкторії точок тіла, що рухається поступально, однакові і отримуються одна з одної паралельним зміщенням.*

Продиференціювавши вираз (53) за часом, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

але так як $\vec{\rho} = \overrightarrow{\text{const}}$, то $\dot{\vec{\rho}} = 0$ і, отже,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

або

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A,$$

тобто *при поступальному русі твердого тіла швидкості всіх його точок в кожен момент часу рівні між собою.*

Диференціюючи одержане співвідношення за часом, отримаємо

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

або

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A,$$

тобто *прискорення всіх точок тіла в кожен момент часу рівні між собою.* Теорему доведено.

Отже, для визначення поступального руху твердого тіла немає необхідності розглядати рух усіх точок тіла, а досить розглянути рух однієї точки тіла, координати якої повинні бути задані як функції часу. Це означає, що *в загальному випадку поступальний рух має 3 ступені вільності.*

4.3 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

При русі твердого тіла з двома нерухомими точками A і B (рис. 12) всі точки на прямій AB залишаються нерухомими. Це випливає з умови незмінності відстаней між точками твердого тіла. Пряма AB називається *віссю обертання*, а рух тіла називається *обертальним.* Неважко бачити, що всі точки тіла описують дуги кіл з центрами в основах перпендикулярів, опущених з цих точок на вісь обертання.

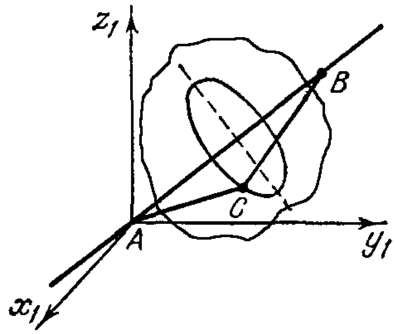


Рис. 12

Введемо систему координат $Ax_1y_1z_1$ з початком в точці A (рис. 12). Оскільки положення точок A і B нам відомо, то положення тіла буде повністю визначено, якщо ми будемо знати в будь-який момент часу положення якої-небудь точки C тіла (що не лежить на осі обертання). З трьох координат цієї точки незалежною буде тільки одна, так як відстані AC і BC сталі і координати точки пов'язані двома рівняннями:

$$\begin{aligned}(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2,\\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2.\end{aligned} \tag{54}$$

Звідси випливає, що положення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається одним параметром, тобто *обертальний рух твердого тіла має один ступінь вільності.*

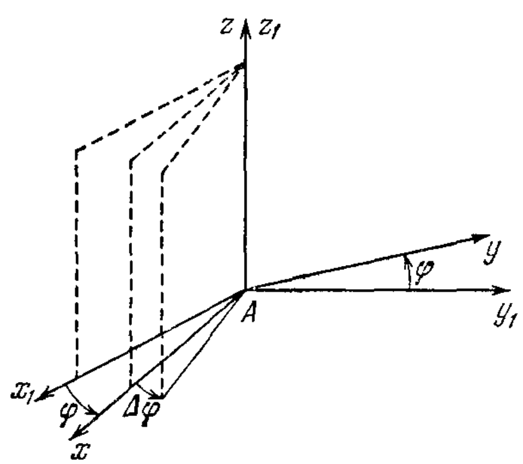


Рис. 13

Направимо вісь Az_1 нерухомої системи координат $Ax_1y_1z_1$ по осі обертання тіла. Введемо рухому систему координат $Axyz$, жорстко зв'язану з тілом, вісь Az якої так само направимо по осі обертання (рис. 13). Положення тіла буде повністю визначено, якщо задано кут $\varphi = \varphi(t)$ між нерухомою площиною x_1Az_1 і рухомою площиною (жорстко зв'язаною з тілом) xAz (рис. 13). Цей кут називається *кутом повороту тіла.*

Для однозначного визначення положення тіла необхідно знати не тільки величину, а й напрям відліку кута φ. Домовимося вважати додатнім напрямком відліку напрямок проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі Oz_1.

Нехай в момент часу t кут між нерухомою напівплощиною x_1Az_1 і рухомою напівплощиною xAz дорівнює $\varphi(t)$, а в момент часу $t+\Delta t$ дорівнює $\varphi(t+\Delta t)$. Це означає, що за проміжок часу Δt рухома площина, а отже, і тіло повернулись на кут

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t).$$

Границя відношення приросту кута повороту $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt, за який тіло повернулося на цей кут, при $\Delta t \to 0$ називається *кутовою швидкістю тіла* в даний момент часу

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{55}$$

Введена таким чином кутова швидкість ω_z може бути як додатною, так і від'ємною залежно від закону зміни кута φ. Абсолютне значення кутової швидкості будемо позначати через $\omega = |\dot{\varphi}|$.

Оскільки кут повороту вимірюється в радіанах, а час – в секундах, то одиницею вимірювання кутової швидкості буде $с^{-1}$.

Нехай тепер у момент часу t кутова швидкість обертання дорівнює $\omega_z(t)$, а в момент $t+\Delta t$ дорівнює $\omega_z(t+\Delta t)$; тоді за проміжок часу Δt приріст кутової швидкості дорівнюватиме

$$\Delta\omega_z = \omega_z(t+\Delta t) - \omega_z(t).$$

Границя відношення приросту кутової швидкості $\Delta\omega_z$ до проміжку часу Δt, за який ця зміна відбулася, при $\Delta t \to 0$ називається *кутовим прискоренням тіла* в даний момент часу

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \tag{56}$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення – $с^{-2}$.

Вельми корисним для подальшого вивчення кінематики твердого тіла є введення в розгляд *вектора кутової швидкості* і *вектора кутового прискорення.*

Вектором кутової швидкості твердого тіла, що здійснює обертання навколо нерухомої осі, ми будемо називати вектор, модуль якого дорівнює абсолютному значенню похідної кута повороту тіла за часом, спрямований уздовж осі обертання в той бік сторону, звідки обертання тіла видно як таке, що відбувається проти годинникової стрілки.

З огляду на раніше введене означення напрямку додатного відліку кута φ, вектор кутової швидкості можна визначити за формулою

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} = \omega_z\vec{k}, \tag{57}$$

де $\vec{k}$ – одиничний вектор осі Oz.

Вектором кутового прискорення будемо називати вектор, рівний похідній за часом від вектора кутової швидкості, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\vec{k} = \varepsilon_z\vec{k}, \quad \varepsilon_z = \ddot{\varphi}. \tag{58}$$

Перейдемо до знаходження швидкості і прискорення будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Нехай одиничні вектори координатних осей x, y, z, відповідно будуть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 14). Радіус-вектор довільної точки M можна представити у вигляді

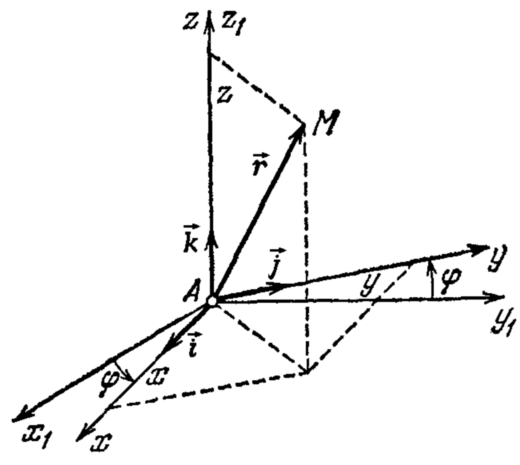


Рис. 14

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{59}$$

де $x, y, z = \text{const}$.

Швидкість точки M дорівнюватиме

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{60}$$

Так як вектор $\vec{k}$ нерухомий, то $\dot{\vec{k}} = 0$; що ж стосується похідних векторів $\vec{i}$ і $\vec{j}$, то ми вже обчислювали їх, розглядаючи рух точки в полярній системі координат. Якщо позначити $\vec{r}^0 = \vec{i}$ і $\vec{p}^0 = \vec{j}$, то формули для їх похідних набудуть вигляду

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi}\vec{j}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{i}.$$

Підставляючи в формулу (60) ці похідні і враховуючи, що $\dot{\varphi} = \omega_z$, отримаємо

$$\vec{v} = x\omega_z\vec{j} - y\omega_z\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{61}$$

Отже, *швидкість будь-якої точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки*:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{62}$$

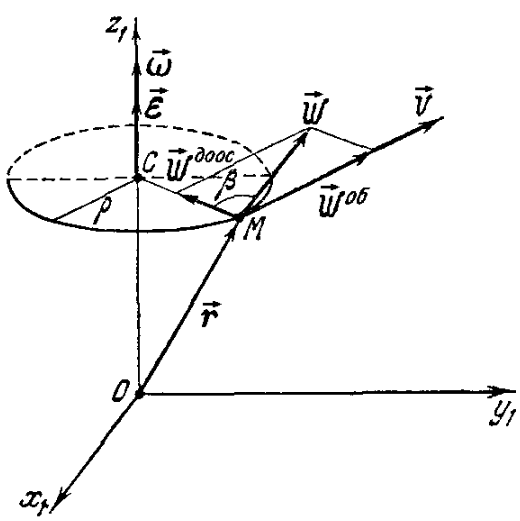


Рис. 15

З формули (62) випливає, що

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega\rho,$$

тобто *модуль швидкості будь-якої точки твердого тіла дорівнює добутку модуля кутової швидкості тіла на відстань від точки до осі обертання. Напрямлений же вектор швидкості по дотичній до кола, по якому переміщається точка M, в бік її руху.*

Взявши похідну за часом від обох частин рівності (62), отримаємо

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Але $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ – швидкість точки M. Тоді

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ напрямлений по дотичній до траєкторії точки (до кола радіуса ρ), тобто паралельно швидкості (так як вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлений по осі обертання (рис. 15)). Ця складова прискорення є дотичним прискоренням точки M тіла. Надалі будемо називати цю складову *обертальним прискоренням*, тобто

$$\vec{w}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Числове значення обертального прискорення дорівнює

$$w^{об} = \varepsilon r \sin(\vec{r}, \vec{\varepsilon}) = \varepsilon \rho.$$

Вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ напрямлений в площині кола радіуса $\vec{\rho}$ від точки M до точки C, тобто напрямлений до осі обертання по нормалі до траєкторії і є нормальним прискоренням точки M.

Вектор

$$\vec{w}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v},$$

напрямлений до осі обертання, будемо називати *доосьовим прискоренням*.

Оскільки вектор $\vec{v}$ перпендикулярний вектору $\vec{\omega}$, то числове значення доосьового прискорення дорівнює

$$w^{доос} = \omega v = \omega^2 \rho.$$

Модуль повного прискорення точки M буде

$$w = \sqrt{(w^{доос})^2 + (w^{об})^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

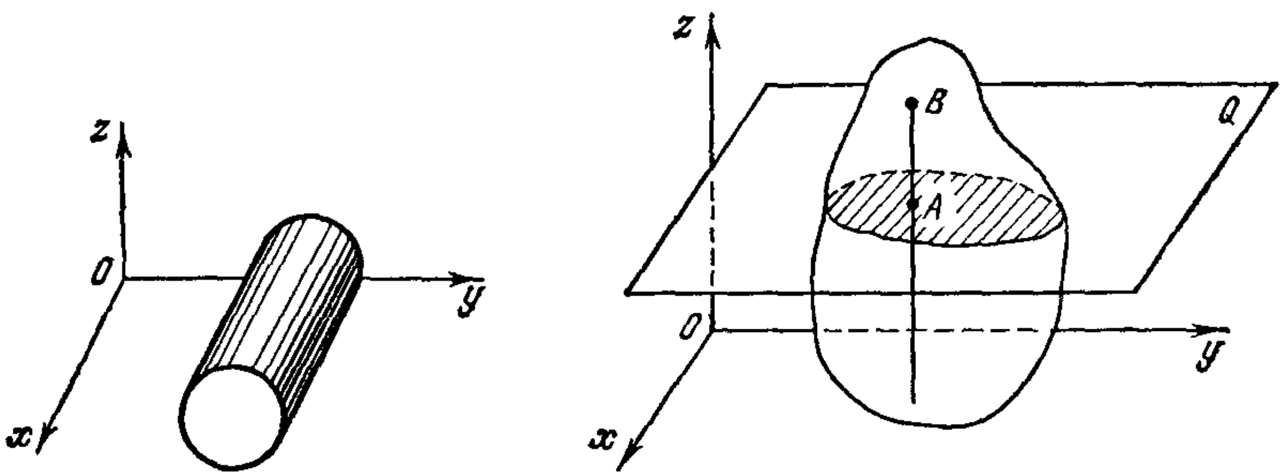
5 Лекція 5. Плоскопаралельний рух твердого тіла

5.1 Загальні властивості та задання руху

Рух твердого тіла називається плоскопаралельним (плоским), якщо всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Прикладом плоского руху тіла є кочення циліндра по горизонтальній площині, при якому його основа залишається весь час паралельною площині Oyz (рис. 16, a).

Розглянемо довільний плоский рух твердого тіла. Нехай всі точки тіла переміщуються у площинах, паралельних площині Oxy (рис. 16, *б*). З означення плоского руху випливає, що будь-яка пряма AB, проведена в тілі перпендикулярно площині Oxy, буде переміщуватися поступально, тобто траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої будуть однакові.



а) *б)*

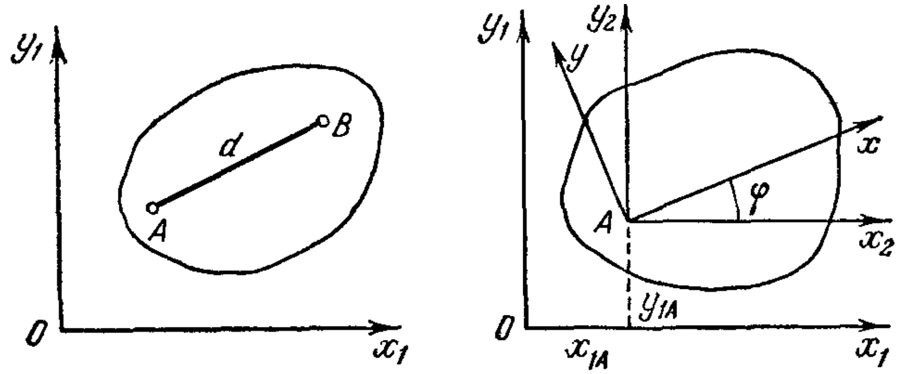
Рис. 16

Таким чином, для визначення руху тіла необхідно знати рух тільки однієї точки на кожній прямій, проведеній перпендикулярно площині Oxy. Якщо взяти точки в одній площині, паралельній площині Oxy, то можна стверджувати, що плоский рух твердого тіла повністю визначається рухом плоскої фігури (перерізу тіла), отриманої перетином тіла будь-якою площиною Q, паралельною площині Oxy (див. рис. 16, *б*).

Нехай $A(x_{1A}, y_{1A})$ і $B(x_{1B}, y_{1B})$ – дві точки плоскої фігури, що знаходяться в площині Ox_1y_1 (рис. 17, a). Оскільки відстань d між цими точками залишається незмінною

$$(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 = d^2,$$

то із чотирьох координат незалежними залишаються тільки три. Приєднання третьої точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не збільшує числа незалежних координат, бо дві нові координати x_{1C} і y_{1C} повинні задовольняти дві рівності, що виражають незмінність відстаней AC і BC до раніше вибраних точок A і B. Отже, для опису плоского руху тіла потрібно знати три незалежні координати (*ступені вільності твердого тіла*) як функції часу.



а) б)

Рис. 17

Пов'яжемо жорстко з плоскою фігурою систему координат Axy. Тоді положення системи Axy, а разом з нею і положення плоскої фігури відносно системи координат Ox_1y_1 буде повністю визначатися координатами x_{1A} і y_{1A} точки A, яка називається *полюсом*, і кутом φ між осями Ax_2 і Ax – див. рис. 17, *б* (осі Ax_2 і Ay_2 відповідно паралельні осям Ox_1 і Oy_1 та переміщуються при русі фігури поступально). Отже, три функції часу

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{63}$$

визначають положення плоскої фігури в будь-який момент часу. Рівності (63) називаються *рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла.*

5.2 Швидкості точок твердого тіла при плоскопаралельному русі

Визначимо швидкість будь-якої точки твердого тіла в плоскопаралельному русі.

Нехай система координат Ox_1y_1 є нерухомою, а система координат Ax_2y_2, що має початок в довільно вибраній точці A плоскої фігури, рухається поступально (див. рис. 18). Систему координат Axy жорстко пов'яжемо з плоскою фігурою.

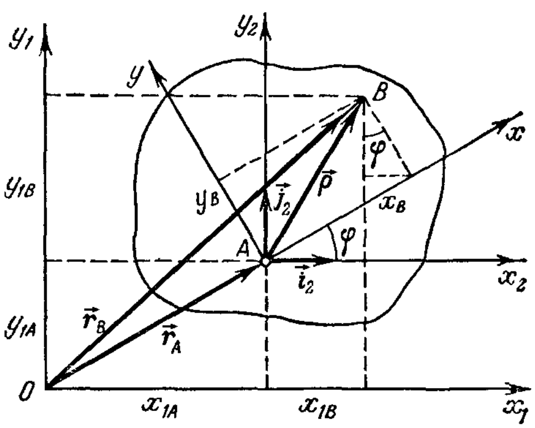


Рис. 18

Радіус-вектор $\vec{r}_B$, який визначає положення точки B відносно нерухомої системи координат Ox_1y_1 (рис. 18), можна задати за допомогою двох векторів: $\vec{r}_A$, що визначає положення точки A в системі відліку Ox_1y_1, і ρ, що визначає положення точки B в системі відліку Ax_2y_2,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{64}$$

За означенням, швидкість точки B дорівнює

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{65}$$

Похідна $d\vec{r}_A/dt$ в рівнянні (65) визначає швидкість точки A (полюса) $\vec{v}_A$, а похідна $d\vec{\rho}/dt$ є швидкістю точки B відносно рухомої системи координат Ax_2y_2. Позначимо цю швидкість наступним чином

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Рух тіла відносно системи координат Ax_2y_2 являє собою обертання тіла навколо осі Az_2, напрямленій перпендикулярно до площини рисунка (рис. 18) на читача. Таким чином, швидкість $\vec{v}_{BA}$ є швидкістю точки B при обертанні тіла навколо осі Az_2:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\omega}_A$ – кутова швидкість обертання фігури навколо точки A (навколо осі Az_2).

Формула (65) набуває тепер вигляду

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \tag{66}$$

тобто *швидкість будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A.*

Теорема 1. *(про незалежність кутової швидкості від вибору полюса). Кутова швидкість обертання фігури не залежить від вибору полюса.*

Д о в е д е н н я

Нехай A і B – дві довільні точки плоскої фігури, причому полюсу A відповідає кутова швидкість $\vec{\omega}_A$, а полюсу B – кутова швидкість $\vec{\omega}_B$. Знайдемо швидкість точки B, прийнявши за полюс точку A

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}.$$

Візьмемо тепер в якості полюса точку B і знайдемо швидкість точки A

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (-\vec{\rho}).$$

Додаючи ці дві рівності, отримуємо

$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{\rho} = 0.$$

Оскільки вектор $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B)$ є перпендикулярним до площини плоскої фігури, то остання рівність має місце тільки при $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. Таким чином, зберігати індекс полюса в позначенні вектора кутової швидкості недоцільно, тобто $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$. Теорему доведено.

Формула (66) набуває тепер наступного вигляду:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \tag{67}$$

Оскільки $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, а вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини рисунка, то модуль швидкості точки B відносно полюса A дорівнює

$$v_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Відмітимо також, що вектор $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярний до $\overrightarrow{AB}$. Напрямок обертання плоскої фігури навколо полюса визначається за знаком проекції кутової швидкості на вісь Az_2. Так як $\omega_z = \dot{\varphi}$, то при $\omega_z > 0$ обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, а при $\omega_z < 0$ – за годинниковою стрілкою.

5.3 Миттєвий центр швидкостей. Центроїди

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна визначити також за допомогою *миттєвого центра швидкостей.*

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка площини плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо теорему про існування миттєвого центра швидкостей.

Теорема 2. *Якщо кутова швидкість плоскої фігури відмінна від нуля, то миттєвий центр швидкостей існує.*

Д о в е д е н н я

Нехай швидкість $\vec{v}_A$ довільної точки плоскої фігури відмінна від нуля (в протилежному випадку точка A була б миттєвим центром швидкостей).

За знаком проекції кутової швидкості $\omega_z = \dot{\varphi}$ визначаємо напрямок обертання плоскої фігури навколо полюса A і в цьому напрямку відкладаємо від точки A відрізок $AP = v_A/\omega$ перпендикулярно швидкості $\vec{v}_A$.

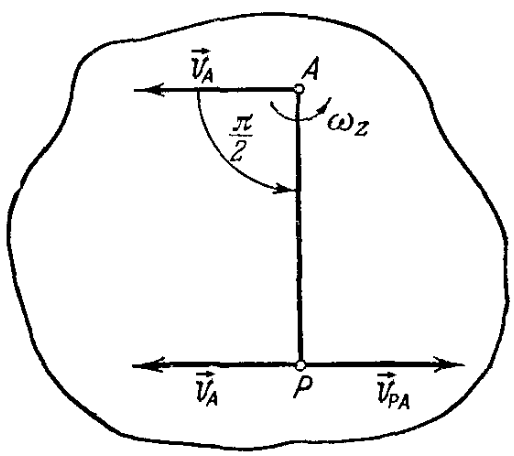


Рис. 19

На рис. 19 вважається, що $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$, і тому відрізок AP повернуто відносно $\vec{v}_A$ проти ходу годинникової стрілки.

Згідно (67) маємо

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Оскільки швидкість $\vec{v}_{PA}$ перпендикулярна до AP, то вектор $\vec{v}_{PA}$ є колінеарним до $\vec{v}_A$. Крім того, у відповідності з правилом побудови відрізка AP вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_{PA}$ мають протилежні напрямки. Модуль швидкості $\vec{v}_{PA}$ рівний

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \frac{v_A}{\omega}\omega = v_A.$$

Два рівні за величиною і протилежно напрямлені вектори в сумі дають нуль. Таким чином,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0,$$

тобто швидкість точки P дорівнює нулю і, отже, P – миттєвий центр швидкостей. Теорему доведено.

Виберемо тепер за полюс миттєвий центр швидкостей P. Тоді швидкість довільної точки A плоскої фігури шукатиметься за формулою

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}.$$

Звідси випливає, що швидкості точок тіла при його плоскому русі розподіляються так само, як і при обертальному русі. Роль нерухомої осі відіграє миттєва вісь, що проходить через МЦШ перпендикулярно площині руху. Таким чином, швидкості всіх точок фігури перпендикулярні відрізкам, що сполучають ці точки з МЦШ ($\vec{v}_A \perp AP$), а модулі швидкостей пропорційні відстаням до МЦШ ($v_A = \omega \cdot PA$).

Теорема 3. *Знаючи положення миттєвого центра швидкостей та швидкість якоїнебудь її точки, можна знайти швидкості всіх точок плоскої фігури.*

Доведення

Справді, нехай відомо, наприклад, швидкість $\vec{v}_A$ точки A; тоді із рівності $v_A = \omega \cdot PA$ знайдемо кутову швидкість $\omega = v_A/PA$ і швидкість будь-якої точки B буде

$$v_B = \omega \cdot PB = v_A \frac{PB}{PA}.$$

Теорему доведено.

З'єднавши кінець вектора $\vec{v}_B$ з точкою P, отримаємо *епюру розподілу швидкостей* вздовж відрізка PB (див. рис. 20).

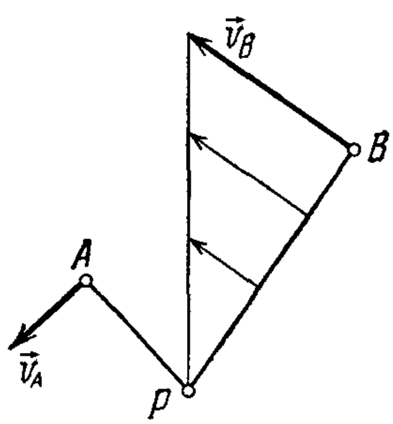


Рис. 20

Використовуючи основні властивості МЦШ, можна визначити його положення і в інших випадках. На рис. 21, *а* показано, як знаходиться ця точка, коли відомо напрямки швидкостей двох точок. На рис. 21, *б* і *в* показано, як знаходиться МЦШ, якщо швидкості точок A і B паралельні між собою і $AB \perp \vec{v}_A$. У випадку, коли швидкості точок A і B паралельні між собою, але $\vec{v}_A$ не перпендикулярний до AB (рис. 21, *г*), прямі, перпендикулярні $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$, перетинаються на нескінченності і миттєвого центра швидкостей не існує. При коченні без ковзання одного тіла по поверхні іншого нерухомого тіла (рис. 21, *д*) МЦШ співпадає з точкою дотику тіл, оскільки за відсутності ковзання швидкість точки дотику рівна нулю.

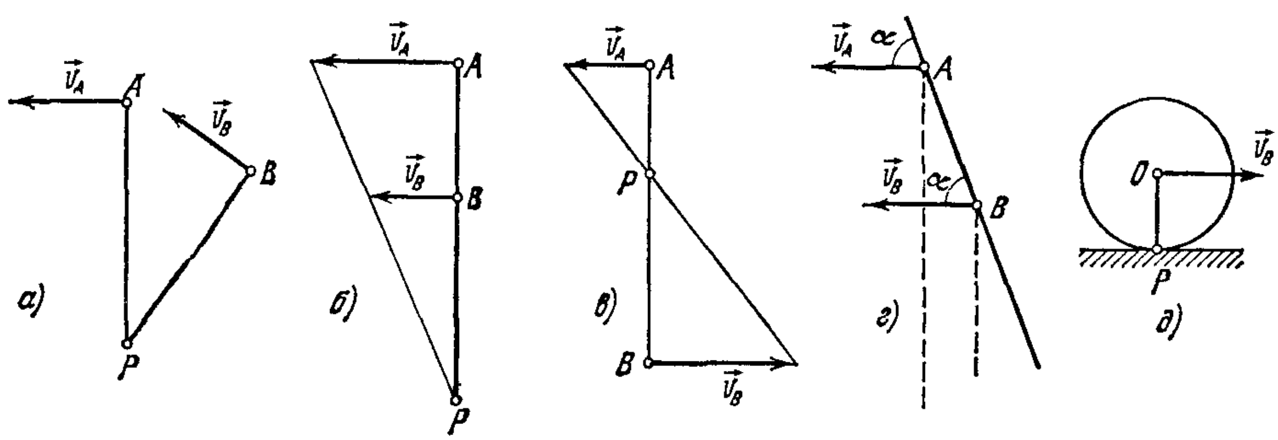


Рис. 21

Як буде показано нижче (на прикладі виконання типового завдання до лабораторної роботи), використання миттєвого центра швидкостей часто суттєво спрощує розв'язання задачі.

На відміну від чисто обертального руху, при плоскому русі миттєвий центр швидкостей змінює, взагалі кажучи, своє положення на площині. Якщо наклеїти на фігуру, що здійснює плоский рух, аркуш паперу і в кожний момент часу проколювати голкою миттєвий центр швидкостей, то отримаємо дві серії відміток: одна на нерухомій площині, інша на аркуші, зв'язаному з фігурою. Кожна з цих серій утворить в просторі неперервну криву.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей на нерухомій площині називається *нерухомою центроїдою*, а на площині, жорстко зв'язаною з фігурою – *рухомою центроїдою*.

Наприклад, при коченні циліндра по горизонтальній площині (рис. 21, *д*) нерухомою центроїдою буде горизонтальна пряма, а рухомою – коло.

В кожний момент часу рухома і нерухома центроїди мають спільну точку дотику – миттєвий центр швидкостей P, тобто точку, швидкість якої дорівнює нулю. Тому плоский рух можна уявити як кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій.

5.4 Прискорення точок при плоскому русі. Миттєвий центр прискорень

Для визначення прискорення точки плоскої фігури продиференціюємо рівність (67) за часом:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

В цьому співвідношенні $d\vec{v}_B/dt = \vec{w}_B$, $d\vec{v}_A/dt = \vec{w}_A$ – відповідно прискорення точок B і A, $d\vec{\rho}/dt = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{BA}$, $d\vec{\omega}/dt = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення. Вектор $\vec{\varepsilon}$, як і вектор $\vec{\omega}$, напрямлений перпендикулярно до площини фігури і визначається формулою

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\vec{k}\right) = \ddot{\varphi}\vec{k}.$$

Таким чином, прискорення точок A і B пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \tag{68}$$

Два останні доданки в рівності (68) визначають прискорення точки B при закріпленій точці A ($\vec{w}_A = 0$). Тому їх сума

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA} = \vec{w}_{BA}$$

дає прискорення точки B у обертальному русі відносно системи координат Ax_2y_2, яке має дві складові – доосьове (доцентрове) і обертальне прискорення, тобто

$$\vec{w}_{BA}^{\,доос} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}, \quad \vec{w}_{BA}^{\,об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}.$$

Модулі цих складових будуть

$$w_{BA}^{доос} = \omega^2 \rho = \omega^2 AB, \quad w_{BA}^{об} = \varepsilon\rho = \varepsilon \cdot AB. \tag{69}$$

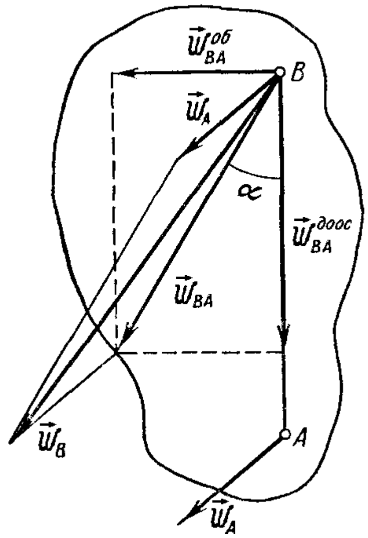


Рис. 22

На рис. 22 геометрично додаються три вектори, і визначено прискорення точки B за допомогою формули

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{доос} + \vec{w}_{BA}^{об}. \tag{70}$$

Таким чином, *прискорення будь-якої точки плоскої фігури є геометричною сумою прискорення полюса та доосьового і обертального прискорень в обертальному русі фігури відносно цього полюса.*

Із (69) знайдемо кут, складений вектором $\vec{w}_{BA}$ з напрямком на полюс (рис. 22),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_{BA}^{об}}{w_{BA}^{доос}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Звідси видно, що цей кут, по-перше, не залежить від вибору полюса і, по-друге, в кожен момент часу для всіх точок однаковий.

Модуль прискорення точки при її обертанні навколо полюса також знаходиться із рівності (69)

$$w_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{71}$$

Він залежить від відстані точки до полюса.

Введемо поняття *миттєвого центра прискорень*.

Миттєвим центром прискорень (МЦП) називається точка площини плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Для побудови миттєвого центра прискорень вважатимемо, що нам відомо прискорення однієї з точок $\vec{w}_A$, кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, причому вважається, що $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ не рівні нулю одночасно. Із точки A відкладемо під кутом $\alpha = \operatorname{arctg}(\varepsilon/\omega^2)$ до прискорення $\vec{w}_A$ відрізок AQ

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{72}$$

При цьому, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, то кут α відкладається проти ходу годинникової стрілки (рис. 23), а при протилежному знакові $\ddot{\varphi}$ – за годинниковою стрілкою.

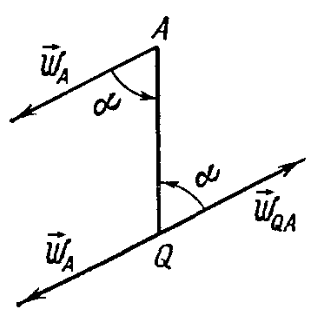


Рис. 23

Вибравши за полюс точку A, отримаємо

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA}.$$

Як уже відмічалося вище, кут між прискоренням точки відносно полюса $\vec{w}_{QA}$ і напрямком на полюс не залежить від вибору полюса. Отже, якщо $\vec{w}_{QA}$ складає з напрямком QA кут α, то такий же кут буде між $\vec{w}_A$ і AQ. Тому вектори $\vec{w}_{QA}$ і $\vec{w}_A$ паралельні (рис. 23). Згідно прийнятого нами правила відліку кута α прискорення $\vec{w}_{QA}$ і $\vec{w}_A$ будуть завжди протилежно напрямлені. Згадуючи (71) і підставляючи (72), одержимо

$$w_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

Звідси випливає:

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_{QA} = 0.$$

Таким чином ми довели, що точка Q – миттєвий центр прискорень.

Прискорення будь-якої точки в даний момент часу тепер можна визначити так само, як при обертанні навколо нерухомої осі:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_Q + \vec{w}_{AQ} = \vec{w}_{AQ} = \vec{w}_{AQ}^{доос} + \vec{w}_{AQ}^{об}$$

(оскільки $\vec{w}_Q = 0$).

Слід відмітити, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей, взагалі кажучи, різні точки. В цьому легко переконатися, розглянувши простий приклад. Нехай диск котиться по горизонтальній площині без ковзання (рис. 21, ∂), і швидкість його центра O стала. Як ми знаємо, МЦШ знаходиться в точці дотику P. Оскільки вектор швидкості точки O сталий, то прискорення центра диска рівне нулю. Таким чином, миттєвий центр прискорень співпадає з центром диска, а миттєвий центр швидкостей – з точкою дотику.

6 Лекція 6. Сферичний рух твердого тіла. Рух вільного твердого тіла

6.1 Задання руху. Кути Ейлера

Рух тіла, що має одну нерухому точку, називають сферичним рухом або обертанням тіла навколо нерухомої точки.

При сферичному русі тверде тіло має три ступені вільності. Три параметри, які визначають положення такого тіла відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 24), можуть бути вибрані різними способами. В теоретичній механіці положення тіла з однією нерухомою точкою, як правило, визначають за допомогою *кутів Ейлера*, які вводяться наступним чином.

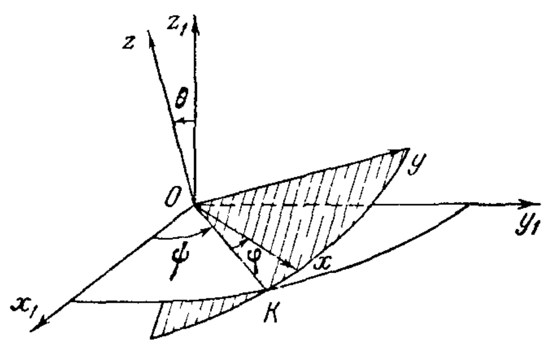


Рис. 24

Пов'яжемо жорстко з тілом рухому систему координат $Oxyz$, вибравши початок координат в нерухомій точці O.

Координатна площина xOy перетинається з нерухомою площиною x_1Oy_1 вздовж прямої OK, яка називається *лінією вузлів*. Кут між нерухомою віссю Ox_1 та лінією вузлів називається *кутом прецесії* і позначається ψ. Кут між лінією вузлів і рухомою віссю Ox називається *кутом власного обертання* і позначається φ. Кут між осями Oz_1 і Oz називається *кутом нутації* і позначається θ. Всі кути відраховуються відповідно від осей Ox_1, OK і Oz_1 проти руху годинникової стрілки, як показано на рис. 24.

Таким чином, рівності

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t)$$

задають *рівняння руху тіла при обертанні навколо нерухомої точки.*

Кути, які визначають положення тіла, можна ввести й іншими способами. Наприклад, положення корабля відносно його центра ваги C визначається *корабельними кутами* або *кутами Ейлера-Крилова* (див., наприклад, [1, 2]).

6.2 Швидкості точок твердого тіла при сферичному русі. Миттєва вісь обертання

Нехай тверде тіло має одну нерухому точку O. Пов'яжемо жорстко з тілом систему координат $Oxyz$ (рис. 25). Система координат $Oxyz$ однозначно визначає його положення відносно нерухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$. Положення довільної точки M твердого тіла визначається радіус-вектором $\vec{r}$ (рис. 25).

Якщо x, y і z – координати точки M в рухомій системі координат, а $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ – одиничні вектори осей цієї системи координат, то радіус-вектор можна подати у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{73}$$

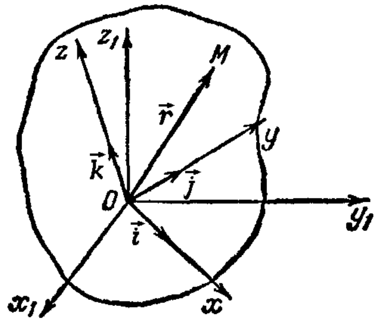


Рис. 25

Координати x, y і z точки M в рухомій системі відліку є сталими величинами, а орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ будуть функціями часу, оскільки система координат $Oxyz$ рухається разом із твердим тілом.

Швидкість точки M визначається за формулою $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, тому диференціюючи (73) за t, отримаємо

$$\vec{v} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{74}$$

Помноживши обидві частини рівності (74) скалярно на $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$, одержимо

$$\begin{aligned} v_x = \vec{v}\cdot\vec{i} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i},\\ v_y = \vec{v}\cdot\vec{j} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j},\\ v_z = \vec{v}\cdot\vec{k} = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k}. \end{aligned} \tag{75}$$

Оскільки вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні, то

$$\vec{i}^2 = 1,\ \ \vec{j}^2 = 1,\ \ \vec{k}^2 = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0,\ \ \vec{j}\cdot\vec{k} = 0,\ \ \vec{k}\cdot\vec{i} = 0. \tag{76}$$

Диференціюючи ці рівності за часом, знайдемо дві групи формул:

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{i} = 0,\ \ \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{j} = 0,\ \ \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{k} = 0, \tag{77}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{i},\quad \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{j},\quad \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} = -\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{k}. \tag{78}$$

Вирази (75) при цьому набудуть вигляду

$$v_x = z\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i} - y\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j},\quad v_y = x\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j} - z\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k},\quad v_z = y\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k} - x\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i}. \tag{79}$$

Формули (79) містять три скалярні функції часу, для яких введемо позначення:

$$\omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt}\cdot\vec{k},\quad \omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{i},\quad \omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}. \tag{80}$$

Перепишемо тепер формули (75) у вигляді

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,\ \ v_y = \omega_z x - \omega_x z,\ \ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{81}$$

Так як

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

то, у відповідності з виразом (81), маємо

$$\vec{v} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}.$$

Якщо тепер ввести вектор $\vec{\omega}$ з проекціями $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$,

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k},$$

то швидкість точки можна представити у вигляді векторного добутку

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Отже, швидкість точки тіла, що здійснює сферичний рух, визначається формулою

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{82}$$

Геометричне місце точок, швидкість яких дорівнює нулю, визначається з рівняння

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0, \tag{83}$$

яке являє собою умову колінеарності векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$. Це векторне рівняння в системі координат $Oxyz$ можна записати у вигляді

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{84}$$

Рівняння (84) визначають пряму лінію, напрямні косинуси якої пропорційні проекціям ω_x, ω_y, ω_z вектора $\vec{\omega}$. В загальному випадку вектор $\vec{\omega}$ і його проекції є функціями часу, тому положення прямої (84) змінюється як відносно тіла, так і відносно нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

Пряма (84), в кожній точці якої швидкості точок тіла в даний момент часу рівні нулю, називається *миттєвою віссю обертання* або *миттєвою віссю швидкостей*.

Введений нами вектор $\vec{\omega}$ завжди напрямлений по миттєвій осі обертання.

Формула (82) співпадає за формою з виразом для швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Отже, *швидкості точок твердого тіла при сферичному русі розподіляються так, наче тіло обертається навколо осі, що співпадає в даний момент часу з миттєвою віссю обертання*. Зокрема, модуль швидкості точки M в даний момент визначається рівністю

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega\rho,$$

де ρ – відстань від точки M до миттєвої осі обертання. Швидкість точки M напрямлена перпендикулярно до площини, що проходить через її радіус-вектор $\vec{r}$ і миттєву вісь обертання (рис. 26).

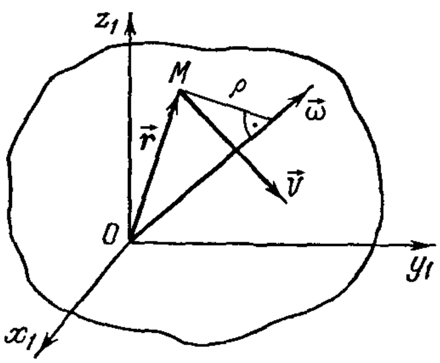


Рис. 26

За аналогією з обертанням тіла навколо нерухомої осі назвемо в розглядуваному нами випадку сферичного руху тіла вектор $\vec{\omega}$ *вектором кутової швидкості.*

Якщо відомі напрямки швидкостей двох точок тіла, то миттєву вісь обертання можна знайти графічно. Як випливає із картини розподілу швидкостей точок тіла в даний момент часу, миттєва вісь обертання лежить в площині, перпендикулярній напрямку швидкості точки тіла, і проходить через нерухому точку тіла. Отже, якщо через точки тіла, напрямки швидкостей яких відомо, провести площини, перпендикулярні цим швидкостям, то лінія перетину цих площин і буде миттєвою віссю обертання.

Миттєву вісь обертання можна визначити і у випадку, коли відомо одну точку тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднуючи цю точку з нерухомою точкою тіла, знайдемо миттєву вісь обертання.

Положення точки M тіла в нерухомій системі відліку визначається координатами x_1, y_1 і z_1, а вектор $\vec{\omega}$ має проекції $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$. Тоді, у відповідності з (82), проекції швидкості точки M на нерухомі осі координат будуть

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \tag{85}$$

Рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі відліку має вигляд

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \tag{86}$$

Геометричне місце миттєвих осей обертання, побудованих в нерухомій системі координат, називається *нерухомим аксоїдом*, а в рухомій системі координат – *рухомим аксоїдом.*

6.3 Прискорення точок тіла при сферичному русі

Введемо спочатку поняття кутового прискорення.

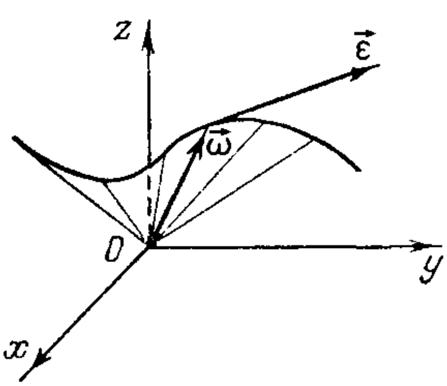


Рис. 27

Кутовим прискоренням називається похідна кутової швидкості за часом, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{87}$$

Із означення видно, що, оскільки початок вектора $\vec{\omega}$ завжди нерухомий (точка O), то вектор кутового прискорення можна розглядати як швидкість кінця вектора кутової швидкості (рис. 27). Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ напрямлене завжди по дотичній до годографа вектора кутової швидкості (рис. 27), тому його напрямок може бути будь-яким в залежності від закону зміни вектора $\vec{\omega}$. Відмітимо також, що годограф вектора кутової швидкості – крива, що лежить на нерухомому аксоїді.

Перейдемо до визначення прискорення довільної точки тіла. Виходячи із означення прискорення $\vec{w} = d\vec{v}/dt$ і використовуючи рівність (82), отримаємо

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Але

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{а} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon},$$

отже,

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{88}$$

Таким чином, прискорення $\vec{w}$ можна подати у вигляді суми двох прискорень:
обертального

$$\vec{w}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

і *доосьового*

$$\vec{w}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Модуль обертальної складової прискорення рівний

$$w^{об} = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon h$$

де h – відстань від точки M до вектора $\vec{\varepsilon}$. Напрямлене це прискорення перпендикулярно до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{r}$ в той бік, звідки найкоротший перехід від вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора $\vec{r}$ видно проти ходу годинникової стрілки. Відмітимо, що внаслідок розбіжності в напрямках кутової швидкості і кутового прискорення обертальна складова прискорення може бути напрямлена по відношенню до напрямку швидкості під будь-яким кутом, залишаючись перпендикулярною до вектора $\vec{r}$. В цьому суттєва відмінність між обертанням тіла навколо нерухомої осі і сферичним рухом тіла.

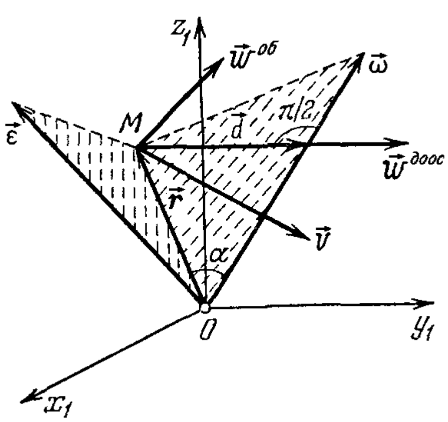


Рис. 28

Доосьове прискорення напрямлене по перпендикуляру до площини векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{v}$, тобто по напрямку вектора $\vec{d}$ (рис. 28), який має початок в точці M і кінець в основі перпендикуляра, опущеного з точки M на миттєву вісь обертання. Модуль доосьового прискорення дорівнює

$$w^{доос} = \omega v = \omega^2 d,$$

оскільки

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega d.$$

Отже, можна записати

$$\vec{w}^{доос} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega^2 \vec{d}.$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки твердого тіла при сферичному русі дорівнює сумі обертальної і доосьової складових прискорення

$$\vec{w} = \vec{w}^{об} + \vec{w}^{доос}. \tag{89}$$

Слід також відмітити, що, на відміну від обертального руху, де вектори $\vec{w}^{об}$ та $\vec{w}^{доос}$ завжди перпендикулярні, в сферичному русі цієї властивості, взагалі кажучи, немає.

6.4 Рух вільного твердого тіла

Тверде тіло називається вільним, якщо воно може переміщуватися в просторі у будь-якому напрямку.

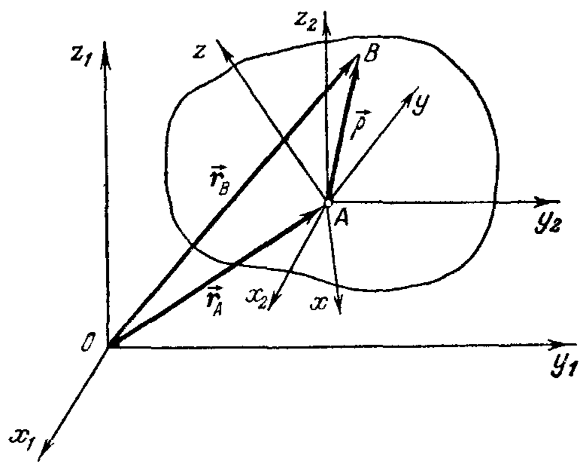


Рис. 29

Розглянемо рух вільного твердого тіла. Введемо, крім нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ ще рухому систему координат $Ax_2y_2z_2$, що переміщується поступально відносно осей $Ox_1y_1z_1$ і пов'язану з тілом тільки в одній точці – точці A, а також рухому систему координат $Axyz$, жорстко пов'язану з тілом (рис. 29). У рухомій системі координат $Ax_2y_2z_2$ тіло має одну закріплену в ній точку – точку A, отже, тіло в цій системі координат бере участь в розглянутому нами вище сферичному русі. Для того, щоб задати положення тіла в рухомій системі координат $Ax_2y_2z_2$, можна ввести три кути Ейлера φ, ψ, θ, а для визначення положення відносно нерухомої системи координат потрібно, крім того, задати положення точки A, для чого буде потрібно знати ще три величини: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}. Таким чином, положення вільного твердого тіла визначається шістьма незалежними параметрами: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, φ, ψ, θ, а рівняння

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad z_{1A} = z_{1A}(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t)$$

є *рівняннями руху вільного твердого тіла.*

Перейдемо до визначення швидкостей точок вільного тіла. Швидкість довільної точки B дорівнює похідній її радіуса-вектора $\vec{r}_B$ за часом. Користуючись рис. 29, знайдемо

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}.$$

Отже,

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{90}$$

Зауважимо, що $d\vec{r}_A/dt = \vec{v}_A$ – швидкість точки A; крім того, вектор $d\vec{\rho}/dt$ є швидкістю точки B відносно рухомої системи координат $Ax_2y_2z_2$, в якій тіло має одну закріплену точку. Отже, згідно з формулою (82)

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Таким чином, формулу (90) можна переписати у вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{91}$$

Тут $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання тіла відносно системи координат $Ax_2y_2z_2$. (Так само як і для плоского руху, можна показати, що кутова швидкість $\vec{\omega}$ не залежить від вибору полюса.) Формулу (91) можна прочитати таким чином: *швидкість будь-якої точки вільного твердого тіла геометрично складається зі швидкості довільно обраного полюса і швидкості цієї точки в сферичному русі тіла відносно полюса.*

Визначимо прискорення точок вільного твердого тіла. Для цього продиференціюємо за часом рівність (91):

$$\vec{w}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{92}$$

Помічаючи, що $d\vec{v}_A/dt = \vec{w}_A$, $d\vec{\omega}/dt = \vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення тіла в рухомій системі координат $Ax_2y_2z_2$, а $d\vec{\rho}/dt = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, отримаємо

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}).$$

Таким чином, *прискорення точки вільного твердого тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки в сферичному русі тіла відносно полюса.*

7 Лекція 7. Абсолютний рух точки

7.1 Основні означення. Абсолютна та відносна похідні вектор-функції

На початку вивчення кінематики точки ми досліджували основні характеристики її руху відносно заданої системи відліку. Однак в деяких випадках доцільно вивчати рух точки одночасно відносно двох систем координат, одна з яких здійснює заданий рух відносно іншої (основної), яку умовно приймають за нерухому.

Абсолютним (складним) рухом точки називається її рух відносно нерухомої системи координат.

Відносним рухом точки називається її рух відносно рухомої системи координат. Траєкторія, швидкість і прискорення точки, розглядувані відносно нерухомої і рухомої систем координат називаються відповідно абсолютними і відносними.

Переносним рухом називається рух рухомої системи відліку відносно нерухомої. Відповідно швидкості й прискорення точки, незмінно зв'язаної з рухомою системою координат, в якій у даний момент часу знаходиться рухома точка, називаються переносними.

Величини, що характеризують абсолютний рух точки, прийнято позначати індексом „a" або залишати без індексу (ми обиратимемо другий варіант), відносний рух – індексом „r", а переносний – індексом „e".

Встановлення зв'язку між абсолютним, відносним і переносним рухами дозволить розв'язувати різноманітні задачі з визначення кінематичних характеристик абсолютного руху.

В цьому розділі ми зустрінемося з необхідністю диференціювання вектора, визначеного в системі координат, яка може рухатися довільним чином. В зв'язку з цим ми введемо поняття *абсолютної* і *відносної* похідних вектор-функції.

Нехай дано основну систему координат і рухому систему відліку, що здійснює довільний рух. Нехай деякий вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ визначений в рухомій системі координат, тобто проекції цього вектора a_x, a_y, a_z на осі рухомої системи – задані функції часу. Якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори осей рухомої системи координат, то вектор $\vec{a}$ може бути представлений у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{93}$$

Встановимо тепер правило знаходження похідної (абсолютної похідної) цього вектора в нерухомій системі відліку. Диференціюючи обидві частини рівності (93) за часом, матимемо на увазі, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ внаслідок руху рухомої системи змінюють свій напрямок, тобто є функціями часу.

Таким чином, абсолютна похідна вектора $\vec{a}$ за часом буде рівна

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{94}$$

Сума перших трьох доданків являє собою похідну вектора $\vec{a}$ в рухомій системі координат. Справді, якщо б ми поставили задачу вивчити зміну вектора $\vec{a}$ тільки по відношенню до рухомої системи координат, то ми враховували би при цьому лише зміну проекції вектора на осі цієї системи координат. Рух же самої системи нас би не цікавив.

Назвемо суму перших трьох доданків в (94) *відносною* або *локальною похідною* і позначимо її через $\breve{d}\vec{a}/dt$, тобто

$$\frac{\breve{d}\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}. \tag{95}$$

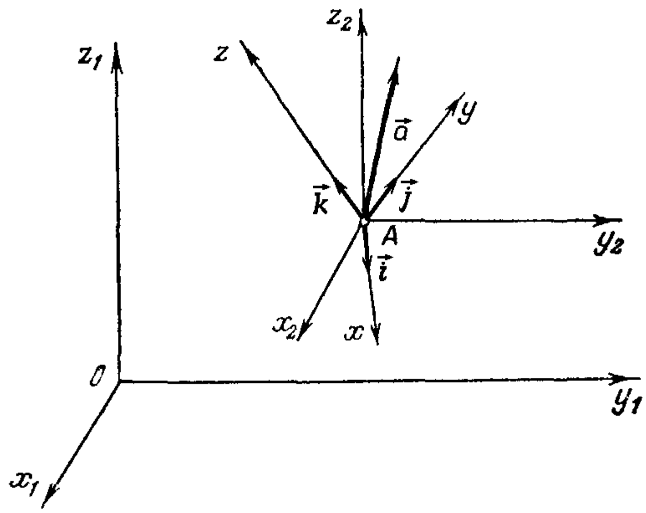


Рис. 30

Введемо нерухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, рухому систему координат $Ax_2y_2z_2$, що переміщується поступально відносно осей $Ox_1y_1z_1$ і пов'язану з тілом тільки в одній точці – точці A, і рухому систему координат $Axyz$ (див. рис. 30). Як видно з рисунку, одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ здійснюють обертальний рух навколо точки A відносно системи $Ax_2y_2z_2$, тобто змінюються з часом подібно до радіус-вектора $\vec{\rho}$ точки M твердого тіла (який теж змінює напрямок і не змінює модуль), коли ми розглядали рух вільного твердого тіла. Заміннюючи в формулі для похідної цього вектора

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

вектор $\vec{\rho}$ на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ почергово, отримаємо

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

Тому сума останніх трьох доданків в (94) може бути подана у вигляді

$$a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt} = a_x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + a_y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + a_z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \vec{\omega} \times (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{a}, \tag{96}$$

де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість рухомої системи координат.

Отже, остаточно

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}. \tag{97}$$

Таким чином, *абсолютна похідна вектора дорівнює сумі його відносної похідної і векторного добутку кутової швидкості рухомої системи на цей вектор.*

Дане твердження інколи ще називають *теоремою про абсолютну і локальну похідні.*

7.2 Теорема додавання швидкостей

Якщо радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ визначає положення точки M відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$, радіус-вектор $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ визначає положення початку системи координат $Axyz$ в системі $Ox_1y_1z_1$, а радіус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ визначає положення точки M в системі відліку $Axyz$, то у відповідності з рис. 31 маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{98}$$

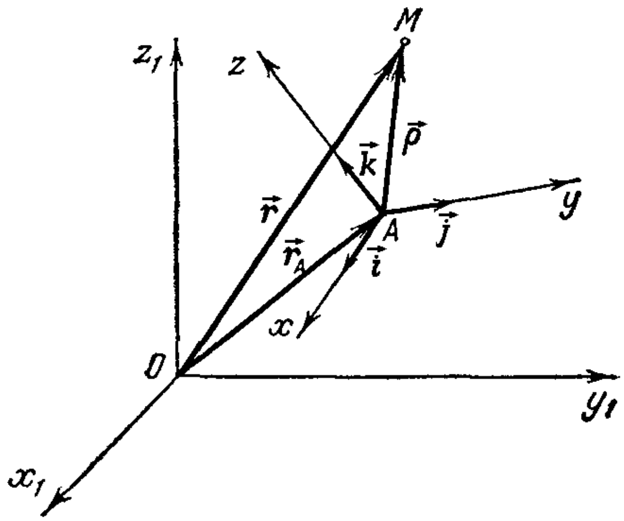


Рис. 31

Нехай координати точки в рухомій системі координат будуть x, y і z; тоді

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори осей рухомої системи координат.

За означенням абсолютна похідна радіус-вектора за часом буде абсолютною швидкістю точки. Отже, диференціюючи рівність (98) за часом, знайдемо абсолютну швидкість точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{99}$$

Оскільки вектор $\vec{\rho}$ визначений в рухомій системі координат, то для знаходження його абсолютної похідної скористаємось формулою (97):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}, \tag{100}$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість рухомої системи координат, а

$$\frac{\breve{d}\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

є відносною похідною $\vec{\rho}$ за часом. Згідно означення це буде *відносна швидкість точки*, тобто

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{101}$$

Підставляючи вирази (100) і (101) в (99), отримаємо

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} + \vec{v}_r, \tag{102}$$

де $\vec{v}_A = d\vec{r}_A/dt$ – швидкість початку рухомої системи координат по відношенню до основної.

Для визначення *переносної швидкості точки* закріпимо її в рухомій системі координат, тобто покладемо в формулі (102) $\vec{v}_r = 0$, тоді одержимо

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}. \tag{103}$$

Таким чином, маємо

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \tag{104}$$

тобто *абсолютна швидкість точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей.* Дане твердження називають *теоремою додавання швидкостей.*

7.3 Теорема додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Для того, щоб знайти абсолютне прискорення точки, тобто її прискорення по відношенню до основної системи координат, продиференціюємо формулу (102) за часом:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \tag{105}$$

Абсолютну похідну вектора відносної швидкості $\vec{v}_r$ знайдемо за формулою (97):

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{\breve{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \tag{106}$$

В цьому співвідношенні $\breve{d}\vec{v}_r/dt$ є відносна похідна вектора $\vec{v}_r$ за часом і, отже, являє собою *відносне прискорення* $\vec{w}_r$, тобто прискорення точки відносно рухомої системи координат

$$\vec{w}_r = \frac{\breve{d}\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \tag{107}$$

Використовуючи рівності (100), (101), (106) і (107), перетворимо формулу (105) до вигляду

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times [\vec{v}_r + (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})] + \vec{w}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = \\ &= \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) + \vec{w}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \end{aligned} \tag{108}$$

де $\vec{w}_A = \dot{\vec{v}}_A$ – прискорення початку рухомої системи координат, а $\vec{\varepsilon}_e = \dot{\vec{\omega}}_e$ – її кутове прискорення.

Для того, щоб знайти переносне прискорення $\vec{w}_e$ (прискорення тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент співпадає рухома точка), закріпимо точку в рухомій системі координат, тобто покладемо $\vec{v}_r = 0$, $\vec{w}_r = 0$.

В цьому випадку згідно формули (108) матимемо

$$\vec{w}_e = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}), \tag{109}$$

тобто переносне прискорення являє собою прискорення точки вільного твердого тіла, з яким жорстко зв'язана рухома система координат. Таким чином, маємо

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \tag{110}$$

Прискорення, яке визначається членом $2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, називається *додатковим*, *поворотним* або *коріолісовим* прискоренням і позначається $\vec{w}_c$, тобто

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \tag{111}$$

Отже, маємо

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \tag{112}$$

Дана формула виражає зміст теореми Коріоліса: *абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного, відносного і коріолісового прискорень.*

При використанні формули (112) слід мати на увазі, що переносне прискорення потрібно визначати за правилами прискорення точок твердого тіла. При знаходженні відносного прискорення рухому систему координат слід вважати нерухомою.

Зупинімося дещо детальніше на коріолісовому прискоренні $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$. Модуль цього прискорення, очевидно, рівний

$$w_c = 2\,|\vec{\omega}_e|\,|\vec{v}_r|\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \tag{113}$$

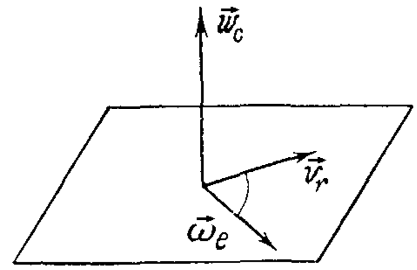


Рис. 32

Напрямок коріолісового прискорення визначається напрямком векторного добутку векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, тобто коріолісове прискорення буде напрямлене перпендикулярно площині, що проходить через вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, в той бік, звідки найкоротший перехід від $\vec{\omega}_e$ до $\vec{v}_r$ видно як рух проти ходу годинникової стрілки (рис. 32). Якщо вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$ не лежать в одній площині, зручно буває подумки перенести вектор $\vec{\omega}_e$ паралельно самому собі в початок вектора швидкості $\vec{v}_r$ і застосувати вказане вище правило.

На основі формули (113) можна сказати, що коріолісове прискорення рівне нулю в наступних випадках:

1) $\vec{\omega}_e = 0$, це буде при поступальному переміщенні рухомої системи координат;

2) кутова швидкість $\vec{\omega}_e$ рухомої системи паралельна відносній швидкості $\vec{v}_r$;

3) в момент часу, коли відносна швидкість $\vec{v}_r$ точки дорівнює нулю.

Література

[1] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Д. Курс теоретической механики: в 2 Т. – М.: Наука, 1998. – 736 с.

[2] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972, Т. 1. – 362 с., Т. 2. – 412 с.

[3] Кільчевський М.О. Курс теоретичної механіки, Т. 1. – К.: Вища школа, 1972. – 376 с.; Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

[4] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механіки, Т. 1. – М.: Наука, 1982. – 352 с.; Т. 2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

[5] Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

[6] Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина І. Кінематика. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2006. – 64 с.