УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113

В. М. Петечук[1], Ю. В. Петечук[2]

[1] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, Ужгород,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5663-8789

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II, Берегово,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3670-9671

ГОМОМОРФІЗМИ З УМОВОЮ (*), ЯКЩО 2 – ОБОРОТНИЙ ЕЛЕМЕНТ

Вивчення гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями розпочалося майже 100 років тому роботами Шраєра і Ван-дер-Вардена і в подальшому розвивалися в працях Дьєдоне, Хуа Ло-гена, Райнера, О'Міри, Хана, Ю.І. Мерзлякова, Уотерхауса, О.В. Міхальова, Ю.І. Зельманова, І.З. Голубчика, В.М. Петечука та інших авторів.

В основі вивчення знаходяться групові властивості повної лінійної групи $GL\,(n, R)$ – множини всіх оборотних матриць над асоціативним кільцем R з 1.

При $n \geq 3$ у всіх відомих випадках, незважаючи на відмінність методів, які застосовувалися, автоморфізми повної лінійної групи виявлялись добутком стандартних автоморфізмів. Саме оборотність елемента 2 давала можливість розглядати все більш широкі класи кілець над якими можливий стандартний опис гомоморфізмів матричних груп.

Якщо 2 – необоротний елемент, то при $n \geq 3$ В.М. Петечук зробив опис автоморфізмів групи $GL\,(n, R)$ у випадку, коли R – комутативне локальне кільце. Виявилося, що при $n \geq 4$ всі автоморфізми таких груп є добутком стандартних автоморфізмів, а при $n = 3$ їх можна виразити через стандартні і деякий нестандартний автоморфізми. Спираючись на цей результат, В.М. Петечук [2] отримав опис ізоморфізмів групи $GL\,(n, R)$, $n \geq 3$, якщо R – довільне комутативне кільце.

Зокрема, він здійснив опис гомоморфізмів $\Lambda : PE\,(n, R) \to PGL\,(m, K)$, $m \geq 3$, $n \geq 3$ таких, що $\Lambda PE\,(n, R) = PH$ і $H \supseteq E\,(m, K)$ над довільними комутативними кільцями R і K.

І.З. Голубчик і О.В. Міхальов [3], використовуючи системи ідемпотентів, і незалежно Ю.І. Зельманов [4], використовуючи методи йорданових алгебр, отримали опис ізоморфізмів групи $E\,(n, R)$, $n \geq 3$, $2 \in R^*$ на групу $E\,(m, K)$, $2 \in K^*$ над довільними асоціативними кільцями R і K з 1. В.М. Петечук [5] зробив опис гомоморфізмів групи $PE\,(n, R)$, $n \geq 3$ в групу $GL\,(m, K)$, $m \geq 2$, $2 \in K^*$ у випадку, коли нерухомі підмодулі деяких елементів четвертого порядку збігаються з нерухомими підмодулями їх квадратів. З нього випливають результати І.З. Голубчика, О.В. Міхальова і Ю.І. Зельманова.

Розвиваючи техніку, пов'язану з ідемпотентами, І.З. Голубчик [6] здійснив опис ізоморфізмів груп $GL\,(n, R)$ і $GL\,(m, K)$ при $n, m \geq 4$ над асоціативними кільцями R і K. Виявилося, що вони допускають стандартний опис на групі $E\,(n, R)$.

Авторами В.М. Петечук, Ю.В. Петечук [7, 8] описані гомоморфізми з умовою (*) з чого зокрема випливає і опис ізоморфізмів повних лінійних груп над асоціативними кільцями. У даній роботі удосконалюються і розширюються методи опису гомоморфізмів з умовою (*), якщо елемент 2 є оборотним в кільці K і $n \geq 3$. Основним результатом роботи є наступна теорема. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$,

$E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, W – лівий К-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.

Ключові слова: асоціативні кільця, 2 – оборотний елемент, гомоморфізми лінійних груп, гомоморфізми з умовою (*), інволюції, елементарні трансвекції, група елементарних трансвекцій, формальні матриці, стандартні гомоморфізми.

1. Вступ. В роботі авторів [1] показано зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями на мові лишкових і нерухомих модулів. Якщо формальними матрицями зображаються образи елементів матричних груп відносно їх гомоморфізмів в групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями, то це дає можливість в такий спосіб описувати гомоморфізми. Рівень опису залежить від форми опису гомоморфізмів і умов, які на них накладаються та множини елементів, образи яких відносно гомоморфізмів вдається таким чином задати.

Проблема опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями $\Lambda : G \to GL(W)$, де $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, R – асоціативне кільце з 1, $n \geq 2$, W – лівий (не обов'язково вільний) модуль над асоціативним кільцем K з 1 в загальному випадку не розв'язана. Локалізацією по степенях 2 і 3 кільця K вона зводиться до опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями, в яких елементи 2 або 3 в кільці K є оборотними.

Однак, не всякі гомоморфізми матричних груп можуть бути в такий спосіб описані. Зокрема, якщо розглядаються гомоморфізми з деякими умовами, то для застосування вищеописаного підходу необхідно, щоб умови на гомоморфізми зберігалися при локалізаціях по степенях 2 і 3.

Найбільш системно теорія гомоморфізмів лінійних груп над асоціативними кільцями викладена в [9].

Основним результатом даної статті є така теорема:

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.*

2. Загальні поняття і означення. Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотних елементів кільця R, R_n – кільце матриць $n \times n$ над R, $n \geq 2$, $GL(n,R) = R_n^*$ – повна лінійна (матрична) група оборотних $n \times n$ матриць над кільцем R.

Означення 1. *Відображення δ кільця R в асоціативне кільце R_1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо*

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\delta(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R, а відображення ν кільця R в асоціативне кільце R_1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \nu(r_1 r_2) = \nu(r_2)\nu(r_1)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R.

Очевидно, що якщо δ і ν – кільцеві гомоморфізм і антигомоморфізм відповідно, то $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$ в кільці $\delta(R)$ і $\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$ в кільці $\nu(R)$.

Означення 2. *Нехай R^0 означає кільце R у якому задана операція множення за правилом $x \circ y = yx$, де x, y – довільні елементи кільця R. Кільце R^0 називається опозитом кільця R.*

Відображення $\nu_0 : R \to R^0$, задане за правилом $v_0(r)=r$, $r\epsilon R$, є кільцевим антигомоморфізмом R в R^0.

Звуження кільцевого гомоморфізму на мультиплікативну групу кільця породжує груповий гомоморфізм, а кільцевий антигомоморфізм породжує груповий антигомоморфізм мультиплікативної групи кільця.

Груповий антигомоморфізм породжує груповий гомоморфізм, якщо кожному елементу групи поставити у відповідність елемент, який обернений до його антигомоморфного образу.

Кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує кільцевий гомоморфізм $\overline{\delta} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, де $r_{ij} \in R$, $1 \leq i, j \leq n$.

Кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ індукує кільцевий антигомоморфізм $\overline{\nu} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\nu}(r_{ij}) = (\nu\, r_{ji}) = \text{т}(\nu\, r_{ij})$, де т – означає класичне транспонування.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує груповий гомоморфізм $\overline{\delta}:GL(n,R) \to GL(n,R_1)$ за правилом $\overline{\delta}g = \left(\overline{\delta}g\right)$, $g \in GL(n,R)$, а кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ груповий гомоморфізм $\overline{\nu}:GL(n,R) \to GL(n,R_1)$ за правилом $\overline{\nu}g = (\overline{\nu}g)^{-1}$, $g \in GL(n,R)$.

Означення 3. *Нехай 1 – одиниця, e – ідемпотент кільця R_1 і e_1 – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця R_1. Відображення Λ_e групи $GL(n,R)$ визначається за правилом*

$$\Lambda_e(x) = \overline{\delta}xe + \overline{v}x^{-1}(1-e) + e_1, x \in GL(n,R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n,R)$ у групу $diag(GL(n,R_1),1)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кілець δR, νR.

Означення 4. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K-модуль, L та P – ліві K-модулі, $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ – ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.*

Відображення Λ_0 групи $GL(n,R)$ визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right]g, x \in GL(n,R),$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n,R)$ у групу $g^{-1}diag(GL(n,EndL),1)\,g \subseteq GL(W)$, якщо e комутує з елементами кілець δR і νR.

Якщо в Λ_e кільце R_1 є кільцем $EndL$, то $\Lambda_0(x) = g^{-1}\Lambda_e(x)\,g$, де $x \in GL(n,R)$.

Означення 5. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ групи G, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$.*

Означення 6. *У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2, а елемент $[g_1, ..., g_t] = [[g_1, ..., g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів $g_1, ..., g_t$ групи G, де $t > 2$.*

Позначимо через e_{ij} матрицю кільця R_n, у якої на місці (i, j) стоїть одиниця, а на решті місць нулі. Очевидно, що $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$, де δ_{jk} – символ Кронекера. Одиничну матрицю кільця R_n будемо позначати 1 або E.

Означення 7. *Елементи $t_{ij}(r) = 1 + r e_{ij}$, де $r \in R$, $1 \le i \ne j \le n$, e_{ij} – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями, а діагональні елементи $d_i = 1 - 2e_{ii}$, $1 \le i \le n$, елементарними інволюціями, трансвекції $t_{ij}(1)$ будемо називати одиничними елементарними трансвекціями. Групу, яка породжена всіма елементарними трансвекціями $t_{ij}(r)$, $r \in R$ будемо називати групою елементарних трансвекцій і позначати $E(n, R)$, $t_{ij} = t_{ij}(-1)\, t_{ji}(1)\, t_{ij}(-1) = t_{ji}(1)\, t_{ij}(-1)\, t_{ji}(1)$.*

Мають місце рівності $t_{ij} t_{ji} = t_{ji} t_{ij} = 1$, $t_{ij}^2 = t_{ji}^2 = d_i d_j$, $d_k^2 = 1$, $d_k e_{ij} d_k^{-1} = -e_{ij}$, якщо $i \ne j$, $k \in \{i, j\}$. В інших випадках d_k комутує з e_{ij}. Тому $[d_k, t_{ij}(r)] = t_{ij}(-2r)$, якщо $k \in \{i, j\}$, $r \in R$. В решті випадків d_k комутує з $t_{ij}(r)$.

Виконуються наступні матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де $1 \le k \ne i, i \ne j, l \ne j \le n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R. Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, де $1 \le i, j, k \le n$ – попарно різні довільні числа, $r \in R$.

Лема 1. *Якщо G – група така, що $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, де R – асоціативне кільце з 1, $n \ge 3$, а $\Lambda : G \to GL(W)$ – довільний гомоморфізм, то з рівності $\Lambda t_{ij} = 1$ або $\Lambda t_{ij} t_{ij}(-1) = 1$ для деяких, а значить для всіх $1 \le i \ne j \le n$, то Λ – одиничний гомоморфізм групи $E(n, R)$.*

Доведення. Дане твердження випливає з формул

$$[t_{ij}, t_{jk}(1), t_{ij}(1)] = t_{ik}(-1), [t_{ij} t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ij}(1)] = t_{ik}(-1),$$

$$[t_{ik}(1), t_{kj}(r)] = t_{ij}(r),$$

де $1 \le i, j, k \le n$ – попарно різні числа, $r \in R$.

Лема 2. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, e – діагональний елемент кільця R_n, $n \ge 2$ з нулями і одиницями на діагоналі, d – довільний діагональний елемент групи $GL(n, R)$ з ± 1 на діагоналі, x – елемент групи $GL(n, R)$, який комутує з $2e$. Тоді комутатор $[x, d]$ комутує з e.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що, з точністю до спряження, $e = diag(1, ..., 1, 0, ..., 0)$. Оскільки x комутує з $2e$, то $2x$ і $2x^{-1}$ комутують з e. За умовою $d = E + 2d'$, де d' – діагональна матриця. Тому $[x, d] = (E + 2xd'x^{-1})\, d$ блочно-діагональна матриця, яка комутує з e.

Зокрема, якщо x комутує з інволюцією t_{ii+1}^2, $1 \le i \le n-1$, то x комутує з елементом $2e = E - t_{ii+1}^2$, де $e = e_{ii} + e_{i+1i+1}$. Тому комутатор $[x, d]$ комутує з e і, як наслідок, $[x, d] \in diag(R_{i-1}, R_2, R_{n-i-1})$.

Означення 8. *Елемент m деякого кільця називається нільпотентним, якщо існує натуральне число k таке, що $m^k = 0$. Найменше з таких k називається ступенем нільпотентності елемента m. Сума одиничного і нільпотентного елементів називається уніпотентним елементом відповідного ступеня.*

Означення 9. *Нехай G – група така, що $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$, R – асоціативне кільце з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) модуль над асоціативним кільцем K з 1, $\Lambda : G \to GL(W)$ – груповий гомоморфізм. Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2, які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 m$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A$, B/inG випливає, що $A^{s_2}B = BA^{s_2}$.*

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент m, то передбачається, що він існує. Зрозуміло, що гомоморфізми з умовою (*) є неодиничними.

Ізоморфізми задовольняють умову (*), якщо покласти $s_1 = s_2 = 1$ і скористатися тим, що $1 + m$ є оборотним елементом.

Умова (*) забезпечує існування прообразів деяких уніпотентних елементів і комутування їхніх степенів з прообразами матриць, образи яких комутують з цими уніпотентними елементами. Використання співвідношень між елементами скінченного порядку і елементарними трансвекціями дає можливість доводити, що гомоморфізми з умовою (*) допускають стандартний опис на групі елементарних трансвекцій.

Відмітимо, що якщо Λ гомоморфізм з умовою (*) і $\Lambda A = 1 + s_1 m$ комутує із скінченною кількістю елементів ΛB_i, $B_i \in G$, $1 \leq i \leq t$, то існує натуральне число s_2, яке оборотне в K таке, що A^{s_2} комутує з елементами $B_1, \ldots, B_t$ одночасно.

Загальний підхід до опису гомоморфізмів з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями з 1 базується на тому, що автоморфізми модулів можна зображати формальними матрицями і виконувати дії над ними, як із звичайними матрицями, враховуючи, що елементи цих матриць на нерухомих підмодулях задаються одиницями, а нульові елементи на відповідних місцях зображаються нулями.

Нехай R *і* K – асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль. Опис гомоморфізмів $\Lambda : G \to GL(W)$ відбувається за таким алгоритмом:

1) визначається розклад модуля W у пряму суму n ізоморфних між собою підмодулів, які ізоморфні модулю L і деякого підмодуля, який ізоморфний модулю P;

2) будується модуль $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ і відповідний ізоморфізм $g : W \to W_g$;

3) розглядаються відображення:
$\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ за правилом $\Lambda_g(x) = gxg^{-1}$, $x \in GL(W)$;
$\Lambda_0 : GL(n,R) \to GL(W)$ за правилом $\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right] g$;
$\Lambda_e : GL(n,R) \to GL(W_g)$, $\Lambda_e = \Lambda_g \Lambda_0$ за правилом $\Lambda_e x = \overline{\delta}(x)e + \overline{v}(x)^{-1}(1-e) + e_1$, де $x \in GL(n,R)$, $\overline{\delta}-$ кільцевий гомоморфізм і $\overline{v}-$ кільцевий антигомоморфізм

кільця R_n , індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим анти гомоморфізмом $v : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$;
$\Lambda_1 : GL(n,R) \to GL(W_g)$, $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$ за правилом $\Lambda_1(x) = g\Lambda(x)g^{-1}$, $x \in GL(n,R)$;

4) доводиться, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то гомоморфізм Λ_1 відображає групу $E(n,R)$ в підгрупу $diag(GL(n,EndL),1)$ групи $GL(W_g)$, e – центральний ідемпотент кільця $EndL$ і $\Lambda_1 = \Lambda_e$ на довільних елементарних трансвекціях. Тому гомоморфізм $\Lambda = \Lambda_g^{-1}\Lambda_e = \Lambda_0$ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$;

5) визначаються властивості відображення $\gamma : G \to GL(W)$, яке задане за правилом $\Lambda(x) = \gamma(x)\Lambda_0(x), x \in G$.

3. Дія гомоморфізмів на інволюціях. В роботі [1] авторами доведена

Лема 3. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $2 \in K^*$, W – лівий K-модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL(W)$ такі, що $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba, ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a \neq 1$. Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1), \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_g d = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1),$$

де $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL$, $\gamma, \gamma_1 \in EndP$.

В якості елементів a, b, c, d, які визначені у лемі 3, можна вибрати образи інволюцій і елементів четвертого порядку відносно гомоморфізма Λ .

Лема 4. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)-$ довільний неодиничний гомоморфізм групи $E(n,R)$. Тоді в групі $GL(W)$ в якості елементів a,b,c,d, які визначені у лемі 3, за умови $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$ можна вибрати*

$$a = \Lambda diag(-1,-1,1,\ldots,1),\ b = \Lambda diag(1,-1,-1,1,\ldots,1),$$

$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1\right),\ d = \Lambda diag(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1)$$

При цьому $c^2 = a$, $d^2 = b$.

Якщо $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ для деяких, а значить і для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, то в якості елементів a,b,c,d можуть бути вибрані елементи

$$a = \Lambda t_{12}(1), b = \Lambda t_{13}(1), c = \Lambda t_{32}(-1), d = \Lambda t_{23}(-1)$$

При цьому $c^2 = 1, d^2 = 1$.

Виявляється, що якщо $\Lambda : G \to GL(W)-$ гомоморфізм з умовою (*), то останній випадок леми 4 $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ неможливий. Більше того, має місце більш загальне твердження.

Лема 5. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)\,, n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*), W_0 – лівий K-підмодуль модуля W, який інваріантний відносно елементів $\Lambda t_{ij}(1)$, і $\Lambda t_{ij}^2|_{W_0} = 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$. Тоді $\Lambda t_{ij}(1)|_{W_0} = 1$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq 3$.*

Доведення. Проведемо від супротивного. Нехай $\Lambda t_{ij}(1)|_{W_0} \neq 1$. Оскільки $\Lambda t_{ij}^2|_{W_0} = 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$, то згідно з лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L, P і ізоморфізм $g : W_0 \to L \oplus L \oplus L \oplus P$ такі, що
$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag(-1,-1,1,1)$, $\Lambda_1 t_{13}(1) = diag(1,-1,-1,1)$, де $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$.

За умовою (*) існують натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ і матриця $A \in G$ така, що має місце рівність $\Lambda_1 A = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1\right)$, і A^{s_2} комутує з $t_{12}(1)$. Тому $[A^{s_2}, t_{13}(1), t_{13}(1)] = 1$ і, як наслідок,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = 1$$

Рівність $4s_1s_2 = 0$ суперечить оборотності елементів $2, s_1, s_2$ у кільці K.

4. Дія гомоморфізмів з умовою (*) на інволюціях. Опис гомоморфізмів з умовою (*) починається з визначення їхньої дії на інволюціях. Покажемо, що образи елементарних інволюцій відносно гомоморфізмів з умовою (*) мають вигляд формальних діагональних матриць.

Лема 6. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)\,, n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм і гомоморфізм $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$ такі, що $\Lambda_1 t_{ii+1}^2, \quad 1 \leq i < n-$ формальні діагональні матриці.*

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$ ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм Λ_1 такі, що $a = \Lambda t_{12}^2, b = \Lambda t_{23}^2, c = \Lambda t_{12},\ d = \Lambda t_{23}$,

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1)\,,\ \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1)\,,$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_g d = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1),$$

де $\beta^2 = \beta_1^2 = 1,\ \gamma^2 = \gamma_1^2 = 1$. І, як наслідок,

$$\Lambda_1 t_{12}^2 = diag(-1,-1,1,1)\,,\ \Lambda_1 t_{23}^2 = diag(1,-1,-1,1)\,,$$

$$\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_1 t_{23} = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1).$$

Таким чином, для $i = 1, 2$ лема доведена.

Доведемо, що вона має місце для $3 \leq i < n$. Очевидно, що елементи t_{11+1}^2, де $1 \leq i < n$, комутують між собою.

Нехай $n = 4$. Тоді існує елемент t_{34}^2. Враховуючи, що t_{34}^2 комутує з t_{12}, t_{23}^2 і $(t_{34}^2 t_{23})^2 = 1$, отримуємо, що $\Lambda_1 t_{34}^2 = diag(\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3, x_3)\,,$ де $\alpha_3 \in EndL, x_3 \in EndP$, що доводить лему при $n = 4$.

При $n \geq 5$ існують елементи $t^2_{45}, \ldots, t^2_{n-1n}$, які комутують із t_{12} і t_{23}. Тому

$$\Lambda_1 t^2_{ii+1} = diag(\alpha_i, \alpha_i, \alpha_i, x_i),$$

де $\alpha_i \in EndL$, $x_i \in EndP$, $4 \leq i < n$.

Мають місце рівності $\alpha_i^2 = 1, x_i^2 = 1, \alpha_i\beta = \beta\alpha_i, \gamma x_i = x_i\gamma, \alpha_i\beta_1 = \beta_1\alpha_i, \gamma_1 x_i = x_i\gamma_1$, де $n \geq 4,\ 3 \leq i < n$.

Таким чином, визначена дія гомоморфізму Λ_1 на елементах $t^2_{12}, \ldots, t^2_{n-1n}$, де $n \geq 4$. Їхні образи відносно гомоморфізму Λ_1 виявилися формальними діагональними матрицями.

Доведемо існування у прообразі відносно гомоморфізму з умовою (*) деяких блочно-діагональних матриць, які відображаються у формальні елементарні трансвекції.

Лема 7. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E\,(n,R) \subseteq G \subseteq GL\,(n,R)\,, n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL\,(W)$ задовольняє умову (*). Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм $\Lambda_1 = \Lambda_g\Lambda$ такі, що в групі G існують матриці A_1, A_2, які містяться в $diag(R, R_2, R_{n-3})$ і*

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

де α – оборотний елемент кільця $EndL$.

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм Λ_1. Доведемо існування матриць A_1 і A_2.

Нехай $n \geq 3$ і $n \neq 4$. Відповідно до умови (*) у групі G існують елементи A_1, A_2 і натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ такі, що

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\quad \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

де $A_1^{s_2}, A_2^{s_2}$ комутують із елементом t^2_{23}. Якщо $n \geq 5$, то елементи $A_1^{s_2}$ і $A_2^{s_2}$ комутують також з елементами $t^2_{45}, \ldots, t^2_{n-1n}$. Згідно з лемою 2 мають місце включення $[A_i^{s_2}, t^2_{12}] \in diag(R, R_2, R_{n-3})$, $i = 1, 2$. При цьому

$$\Delta_1\left[A_i^{s_2}, t^2_{12}\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & -2s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right), \Delta_1\left[A_i^{s_2}, t^2_{12}\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2s_1 & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

Без обмеження загальності (замінивши $[A_i^{s_2}, t^2_{12}]$ на A_i), отримуємо твердження леми при $n \geq 5$ і $n \neq 4$.

Доведемо, що твердження леми виконуються і при $n = 4$. Нехай $n = 4$. Згідно з умовою (*) існують натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ і матриця $A \in G$ така, що $\Lambda_1 A = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1\right)$ і A^{s_2} комутує з t^2_{12}. Відповідно до леми 2 $[A^{s_2}, t^2_{23}] \in diag(R_2,\ R_2)$ і елементи $t_{34}\,(1)\,, t_{43}\,(1)$, а також t_{12} комутують з $[A^{s_2}, t^2_{23}, t_{12}]$.

Оскільки $\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right)$, $\Lambda_1 t^2_{12} = diag(-1, -1, 1, 1)$, то мають місце рівності

$$\Lambda_1\left[A^{s_2}, t^2_{23}\right] = diag(\begin{pmatrix} 1 & 2s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1),$$

$$\Lambda_1\left[A^{s_2}, t_{23}^2, t_{12}\right] = diag(\left[\begin{pmatrix} 1 & 2s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], 1, 1).$$

Тому $\Lambda_1 t_{34}(1) = diag(x_1, y_1)$, $\Lambda_1 t_{43}(1) = diag(x_2, y_2)$, де x_i, $i = 1, 2$ містяться в $End(L \oplus L)$ і комутують із матрицями

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 2s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо, що $x_i = diag(\alpha_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$. Без обмеження загальності (замінивши елемент $[A^{s_2}, t_{23}^2, t_{12}]$ на A), можна вважати, що A^{s_2} комутує з $t_{34}(1)$ і $t_{43}(1)$. Тому

$$A^{s_2} \in diag(R_2,\ R, R) \quad i \quad \left[A^{s_2}, t_{23}^2\right] \in diag(R_2,\ 1, 1).$$

Нехай $A_1 = t_{12}t_{23}\left[A^{s_2}, t_{23}^2\right] t_{23}^{-1} t_{12}^{-1}$ і $A_2 = t_{23}A_1t_{23}^{-1}$. Неважко бачити, що A_1, A_2 належать $diag(1, R_2,\ 1)$. Тим самим доведено, що

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

де A_1, A_2 містяться в $diag(1, R_2,\ 1)$, α – оборотний елемент кільця $EndL$.

5. Дія гомоморфізмів з умовою (*) на елементарних трансвекціях. Визначимо дію гомоморфізма Λ на елементарних трансвекціях $t_{ij}(r) \in G$, $1 \leq i \neq j \leq 3, r \in R$.

Лема 8. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ збігається з Λ_0 на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq 3$.*

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$.

З'ясуємо дію гомоморфізма Λ_1 на елементарних трансвекціях.

Елементи $t_{pq}(r)$, де $1 \leq p \neq q \leq 2$, $r \in R$ комутують з t_{12}^2. Тому $\Lambda_1 t_{pq}(r) = diag(a, b)$, де $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, елементи a_1, a_2, a_3, a_4, b_4 містяться в $EndL$, $b_2 \in Hom(L, P)$, $b_3 \in Hom(P, L)$, $b_4 \in EndP$. Зрозуміло, що елементи a і b залежать від $r \in R$.

З рівності $\left[t_{23}^2 t_{pq}(r)\right]^2 = 1$ випливає, що $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}^2 = 1$ і $\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}^2 = 1$.

Тому мають місце рівності $a_1^2 - a_2a_3 = a_4^2 - a_3a_2 = 1$, $a_1a_2 = a_2a_4$, $a_3a_1 = a_4a_3$, $b_1^2 - b_2b_3 = 1$, $b_4^2 - b_3b_2 = 1$, $b_1b_2 = b_2b_4, b_3b_1 = b_4b_3$.

Нехай A_1, A_2 – матриці, визначені в лемі 7. Оскільки

$$\left[A_i^{s_2}, t_{12}^2, t_{12}(r)\right] \in diag\left(\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),$$

$$\left[A_i^{s_2}, t_{12}^2, t_{21}(r)\right] \in diag\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),$$

то має місце рівність $\left([A_i^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]\, t_{23}^2\right)^2 = 1,\ i = 1, 2$ і елементи $[A_1^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]$, $[A_2^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]$ комутують між собою. Згідно з лемою 7

$$\Lambda_1 \left[A_1^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & -s_1\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

$$\Lambda_1 \left[A_2^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s_1\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

Введемо позначення

$$T_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} b^{-1}, \quad T_2 = -\begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^{-1}.$$

У цих позначеннях елементи

$$\Lambda_1 \left[A_1^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)\right] = \begin{pmatrix} E & T_1 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \Lambda_1 \left[A_2^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)\right] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_2 & E \end{pmatrix}$$

комутують між собою.

Тому T_1 і T_2 комутують із елементом $diag(1, -1)$ і $T_1T_2 = 0$, $T_2T_1 = 0$. Із отриманих співвідношень випливає, що $a_2ab_2 = 0, b_3aa_3 = 0, a_4ab_1 = \alpha = b_1aa_4, a_2a_3 = a_3a_2 = 0, b_2b_3 = b_3b_2 = 0$ Зіставляючи їх з раніше отриманими рівностями знаходимо, що $a_1^2 = a_4^2 = 1, b_1^2 = 1, b_4^2 = 1, b_1 = b_4$ і $\alpha b_1 = b_1\alpha$. Застосовуючи вищевикладені міркування до елемента $t_{qp}(r) = t_{12}t_{pq}(-r)t_{12}^{-1}$ отримуємо, що

$$\Lambda_1 t_{qp}(r) = diag\left(\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & -\alpha b_2\beta \\ -\beta b_3\alpha & \beta b_4\beta \end{pmatrix}\right).$$

Як і у випадку з елементом $\Lambda_1 t_{pq}(r)$ отримуємо, що $a_3\alpha b_2 = 0, b_3\alpha a_2 = 0, b_1 = a_1 = a_4$ комутує з a_2 і a_3.

Розглянемо випадок $r = 1, p = 1, q = 2$. З рівності $t_{12}(1)\, t_{21}(-1) = t_{12}t_{12}(-1)$ випливають співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \alpha b_2\beta \\ \beta b_3\alpha & \beta b_1\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ -b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тому $1 - a_2^2 = -a_3$, $1 - a_3^2 = -a_2$. Домножимо ці рівності на b_2 і b_3. Отримаємо, що $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $1 = b_1^2 = \alpha b_1$, $b_1 = \alpha$ і $\alpha a_2 = a_2\alpha$, $\alpha a_3 = a_3\alpha$, $b_4^2 = 1$, $(b_1\beta)^2 = 1$.

Аналогічно, домноживши вищерозглянуті рівності на a_2 і a_3, отримуємо, що $a_2^2 = a_2$, $a_3^2 = -a_3$, $1 = a_2 - a_3$.
Позначимо $e = a_2$. Тоді $e^2 = e$, $e\alpha = \alpha e$, $a_3 = e - 1$. Тим самим доведено, що

$$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & e \\ e - 1 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, b_4\right),$$

$$\Lambda_1 t_{13}(1) = \Lambda_1 a_{23} t_{12}(1)\, a_{23}^{-1} = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 & e \\ 0 & \alpha & 0 \\ e - 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \delta b_4 \delta\right),$$

$$\Lambda_1 t_{23}(1) = diag\left(\alpha, \begin{pmatrix} \alpha & e \\ e-1 & \alpha \end{pmatrix}, \beta\delta b_4 \delta\beta\right).$$

З комутаторної рівності $t_{13}(1) = [t_{12}(1), t_{23}(1)]$ очевидним чином випливає, що $\alpha = 1$, а із леми 5, що $b_4 = 1$ і $\beta = 1$. Тому гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{12}(1)$, $t_{13}(1)$, $t_{23}(1)$.

Враховуючи рівності $t_{12}t_{12}(1)\,t_{12}^{-1} = t_{21}(-1), t_{23}t_{21}(1)\,t_{23}^{-1} = t_{31}(1)$, отримуємо, що гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$ для всіх $1 \le i \ne j \le 3$. Тому Λ збігається з Λ_0 на одиничних елементарних трансвекція $t_{ij}(1)$ для всіх $1 \le i \ne j \le 3$.

Теорема 2. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \ge 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.*

Доведення. Індукцією по n покажемо, що Λ_1 збігається з Λ_e на всіх одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \le i \ne j \le n,\ n \ge 3$.

У лемі 8 доведено, що Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \le i \ne j \le 3$.

Нехай $n \ge 4$. Припустимо, що Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \le i \ne j \le n$.

Оскільки елементарна трансвекція $t_{n-1n}(1)$ комутує з елементарними трансвекціями $t_{12}(1), t_{21}(1), \ldots, t_{n-3n-2}(1), t_{n-2n-3}(1)$ і має місце комутаторна формула $[t_{n-1n}(1), t_{n-2n-1}(1), t_{n-1n-2}(1)] = t_{n-1n}(1)$, то мають місце включення

$$\Lambda_1 t_{n-1\ n}(1) \in diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, *\right), \Lambda_1 t_{nn-1}(1) \in diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, *\right).$$

Використовуючи пірсовий розклад елемента $\Lambda_1 t_{n-1n}^2$ можна вважати, що

$$\Lambda_1 t_{n-1n}^2 = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, -1, -1, 1\right), \Lambda_1 t_{n-1n} = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, 1\right),$$

Із рівностей $t_{n-1n}^2 = -E$ і $(t_{n-2n-1}^2 t_{n-1n})^2 = E$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому $x_1 = 0, x_4 = 0, x_2x_3 = -1, x_3x_2 = -1$. Це означає, що з точністю до спряження, можна вважати, що $x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Тим самим доведено, що Λ_1 збігається з Λ_e на t_{ii+1} для всіх $1 \le i < n$.

Оскільки одиничні елементарні трансвекції спряжені між собою за допомогою добутків елементів t_{ii+1}, $1 \le i < n$, то Λ_1 збігається з Λ_e на всіх одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \le i < n$.

В такому разі, як буде доведено далі, гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на всій групі $E(n,R)$. Це буде означати, що Λ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. Задача опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній K-теорії та теорії кілець і модулів, теорії зображень груп. Вона належить до відомої проблеми вивчення матричних груп, яка є важливою складовою загальної теорії груп. Незважаючи на досягнення в описі гомоморфізмів матричних груп над кільцями, залишається чимало актуальних задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача знаходження умов на гомоморфізми матричних груп при яких останні допускають стандартний опис над асоціативними кільцями з 1.

Список використаної літератури

1. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1(36). С. 16 – 29.
2. Петечук В.М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Матем. сб.* 1982. №.4. С. 539–547.
3. Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3 (38). С. 73 – 85.
4. Зельманов Е.И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т.4. С.49–67.
5. Петечук В.М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94.
6. Golubchik I.Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.
7. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2 С. 152–171.
8. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). С. 99–114.
9. Hahn A.J., O'Meara O.T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 1989. 578 p.

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Homomorphisms with condition (*) if 2 is a reversible element.

The study of homomorphisms of matrix groups over associative rings began almost 100 years ago with the work of Schreier and Van der Warden and later developed in the works of Dieudonne J., Hua L. K., Reiner I., O'Meara O.T., Hahn A.J., Merzlyakov Yu.I., Waterhouse W.C., Mikhalev O.V., Zelmanov E.I., Golubchik I.Z., Petechuk V.M. and other authors.

The study is based on the group properties of a complete linear group $GL(n, R)$ the set of all reversible matrices over the associative ring R with 1.

Thus, in all known cases $n \geq 3$, despite the difference in the methods used, the automorphisms of the complete linear group were the product of standard automorphisms. It is the reversibility of element 2 that made it possible to consider ever wider classes of rings over which a standard description of homomorphisms of matrix groups is possible.

If 2 is an irreversible element, then when $n \geq 3$ Petechuk V.M. described the automorphisms of the group $GL(n, R)$ in the case when R is a commutative local ring. It turned out that for $n \geq 4$ all automorphisms of such groups are the product of standard automorphisms, and for $n = 3$ them can be expressed through standard and some non-standard automorphisms. Based on this result, Petechuk V.M. [2] obtained a description of the isomorphisms of the group $GL(n, R)$, $n \geq 3$ if R is an arbitrary commutative ring.

In particular, he described homomorphisms $\Lambda : PE(n, R) \to PGL(m, K)$, $m \geq 3$, $n \geq 3$ such $\Lambda PE(n, R) = PH$ and $H \supseteq E(m, K)$ as over arbitrary commutative rings R and K.

From Golubchik I.Z. and Mikhalev O.V. [3], using systems of idempotent, and independently Zelmanov E.I. [4], using the methods of Jordan algebras, obtained a description of the isomorphisms of the group $E(n, R)$, $n \geq 3$, $2 \in R^*$ on the group $E(m, K)$, $2 \in K^*$ over arbitrary associative rings R and K with 1. Petechuk V.M. [5] described the homomorphisms of a group $PE(n, R)$, $n \geq 3$, into a group $GL(m, K)$, $m \geq 2$, $2 \in K^*$ in the case when the fixed submodules of some elements of the fourth order coincide with the fixed submodules of their squares From it follow the results of Golubchik I.Z., Mikhalev O.B. and Zelmanov E.I.

Developing techniques related to idempotents, Golubchik I.Z. [6] described the isomorphisms of the groups $GL\,(n, R)$ and $GL\,(m, K)$ for $n, m \geq 4$ over the associative rings R and K. It turned out that they allow a standard description on the group $E\,(n, R)$.

The authors Petechuk V.M., Yu.V. Petechuk [7, 8] described homomorphisms with condition (*), from which in particular follows the description of isomorphisms of complete linear groups over associative rings. In this paper, methods for describing homomorphisms with the condition (*) are improved and expanded if element 2 is reversible in the ring K and $n \geq 3$. The main result of the work is the following theorem. Let R and K be associative rings with 1, $2 \in K^*$, $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 3$, W be the left K-module, homomorphism $\Lambda : G \to GL\,(W)$ satisfies the condition (*). Then Λ has a standard description on the group $E\,(n, R)$.

Keywords: associative rings, 2 is a reversible element, homomorphisms of linear groups, homomorphisms with condition (*), involutions, elementary transvections, group of elementary transvections, formal matrices, standard homomorphisms.

References

1. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(36)*, 16 – 29 [in Russian].
2. Petechuk, V.M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Math. Noties, №.4*, P. 539–547.
3. Golubchik, I.Z., & Mikhalev, A.V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow Univ. Math. Bull. 38 (3)*, 73 – 85.
4. Zelmanov, E.I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Math. J., 4 (26)*, 49 – 67.
5. Petechuk, V.M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. Math.Noties, 2 (45), P. 83–94.
6. Golubchik, I.Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL_n\,(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics, 131(1)*, P. 123–136.
7. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2 (25)*, 152 – 171 [in Russian].
8. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1 (26)*, 99 – 114 [in Russian].
9. Hahn, A.J., & O'Meara, O.T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 578 p.

Одержано 22.09.2020