УДК 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).150-156

М. І. Глебена[1], Г. Г. Цегелик[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1100-515X

[2] Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук
Hryhoriy.Tsehelyk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5826-0628

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДВОХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

При розв'язуванні прикладних задач, моделюванні складних фізичних процесів, а також при дослідженні математичних моделей оптимальної організації і пошуку інформації у файлах баз даних виникає потреба у розв'язанні систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для розв'язання таких задач не існує, тому великий інтерес становить розробка та дослідження нових, ефективних чисельних методів, за допомогою яких можна було б розв'язувати системи нелінійних рівнянь.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. У роботі [1] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Встановлено необхідні та достатні умови існування міноранти Ньютона. Вивчено властивості міноранти Ньютона та її діаграми, введено основні характеристики міноранти Ньютона та її діаграми, побудовано алгоритми для їхнього відшукання.

У роботі пропонується новий чисельний метод, нульового порядку, який ґрунтується на використанні апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій. Побудований метод використовує властивості числових нахилів міноранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних заданих таблично.

Ключові слова: міноранта Ньютона, система нелінійних рівнянь, метод нульового порядку.

1. Вступ. У роботі [1] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Встановлено необхідні та достатні умови існування міноранти Ньютона. Вивчено властивості міноранти Ньютона та її діаграми, введено основні характеристики міноранти Ньютона та її діаграми, побудовано алгоритми для їхнього відшукання. У [2,3] розроблено алгоритм для оптимізації логарифмічно опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних, в основі яких лежить використання апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. У [4,5] отримано оцінки точності наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона.

В даній роботі, використовуючи апарат некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, приводиться новий чисельний метод відшукання розв'язку системи двох нелінійних рівнянь.

Основна перевага цього методу над класичними методами полягає в такому:
1) збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;

2) метод відноситься до методів нульового порядку;
3) простота та наглядність методу.

2. Основний результат.

Постановка задачі

Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Нехай ця система в деякому околі $D = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ має розв'язок $x = \alpha,\ y = \beta$. Оскільки розв'язок системи (1) є розв'язком рівняння

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| = 0$$

або

$$-\ln(1 + |f(x,y)| + |g(x,y)|) = 0, \tag{2}$$

то для відшукання розв'язку системи (1) будемо шукати розв'язок рівняння (2).

Для розв'язання рівняння (2) використаємо властивості апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних.

Апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z = f(x,y)$, яка задана своїми значеннями в точках (x_i, y_j) $(i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m)$:

$$f(x_i, y_j) = z_{ij}\,(i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Нехай $x_0 < x_1 < \ldots < x_n,\ \ y_0 < y_1 < \ldots < y_m$ і

$$|z_{ij}| = a_{ij} \leq M\,(i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m), \tag{4}$$

де $M-$ деяка стала. Будемо вважати, що $a_{00} \cdot a_{0m} \cdot a_{n0} \cdot a_{nm} \neq 0$.

Означення 1. *Точка $P_{ij}(x_i, y_j - \ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i$, $y = y_j$, $z = -\ln a_{ij}$ в просторі xyz називається точкою зображення значення функції $z = f(x,y)$ в точці (x_i, y_j).*

Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z = f(x,y)$ в точках (x_i, y_j) $(i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m)$ в просторі xyz побудовані. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y) \in R$, де $R = \{x_0 \leq x \leq x_n,\ y_0 \leq y \leq y_m\}$, визначимо точку $B(x, y, \chi(x,y))$, де

$$\chi(x,y) = \sup_{(x,y,z) \in C(S)} z\ .$$

Множина точок $B(x, y, \chi(x,y))$, де $(x,y) \in R$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця поверхня є неперервною, вгнутою, і її рівняння має вигляд: $z = \chi(x,y)\,,\ (x,y) \in R$.

Означення 2. *Поверхня δ_f, визначена на R, називається діаграмою Ньютона функції $z = f(x,y)$ на R.*

Діаграма Ньютона δ_f функції $z = f(x, y)$ має такі властивості:

1) кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{ij} значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j);
2) кожна точка зображення P_{ij} знаходиться на δ_f або розміщена нижче за неї;
3) кожній точці $(x_i, y_j) \in R$ відповідає $B_{ij}\left(x_i, y_j, \chi_{ij}\right)$ діаграми Ньютона δ_f, де $\chi_{ij} = \chi\left(x_i, y_j\right)$.

Позначимо $m_f\left(x, y\right) = \exp\left(-\chi\left(x, y\right)\right),\ (x, y) \in R$.

Тоді для кожної точки (x_i, y_j) $(i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m)$ виконується нерівність $m_f\left(x_i, y_j\right) \leq \left|f\left(x_i, y_j\right)\right| = |z_{ij}| = a_{ij}$. Справді, з побудови δ_f випливає, що $-\ln a_{ij} \leq \chi\left(x_i, y_j\right)$, або $a_{ij} \geq \exp\left(-\chi\left(x_i, y_j\right)\right) = m_f\left(x_i, y_j\right)$. Крім того, $m_f\left(x_0, y_0\right) = \left|f\left(x_0, y_0\right)\right|$, $m_f\left(x_0, y_m\right) = \left|f\left(x_0, y_m\right)\right|$, $m_f\left(x_n, y_0\right) = \left|f\left(x_n, y_0\right)\right|$, $m_f\left(x_n, y_m\right) = \left|f\left(x_n, y_m\right)\right|$.

Означення 3. *Функція $z = m_f\left(x, y\right)$, визначена на R, називається мінорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R.*

Нехай $m_f\left(x_i, y_j\right) = t_{ij} \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m)$.

Означення 4. *Величини $r_{ij}\left(x\right) = \left(\frac{t_{i-1,j}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}$ $(i = 1, 2, ..., n; j = 0, 1, ..., m;$ $r_{0j} = 0)$ і $r_{ij}\left(y\right) = \left(\frac{t_{i,j-1}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}}$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, n;\ r_{i0} = 0)$ називаються (i, j)-ми числовими нахилами мінoранти Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини $d_{ij}\left(x\right) = \frac{r_{i+1,j}(x)}{r_{ij}(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m;\ d_{0j} = d_{nj} = \infty)$ і $d_{ij}\left(y\right) = \frac{r_{i,j+1}(y)}{r_{ij}(y)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1;$ $i = 0, 1, \ldots, n;\ d_{i0} = d_{im} = \infty)$ називаються (i, j)-ми відхиленнями мінoранти Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy.*

Із вгнутості діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$r_{ij}\left(x\right) \geq r_{i+1,j}\left(x\right)\left(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m\right),$$

$$r_{ij}\left(y\right) \geq r_{i,j+1}\left(y\right)\left(j = 0, 1, \ldots, m-1;\ i = 0, 1, \ldots, n\right),$$

$$d_{ij}\left(x\right) \leq 1\left(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m\right),$$

$$d_{ij}\left(y\right) \leq 1\left(j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = 0, 1, \ldots, n\right).$$

Означення 5. *Якщо точка зображення P_{ij} знаходиться у вершині δ_f, то пара індексів (i, j) називається вершинною парою індексів; якщо ж на δ_f, то – діаграмною парою індексів.*

Аналогічно як для функції однієї змінної [1] справджуються такі твердження.

Твердження 1. *Для того, щоб для функції $z = f\left(x, y\right)$, заданої таблицею значень (3), існувала діаграма Ньютона, визначена на R, необхідно і достатньо, щоб для неї виконувалась умова (4).*

Твердження 2. *Мінoранта Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ функції $z = f\left(x, y\right)$, заданої таблицею значень (3), є неперервною і опуклою функцією на R.*

Твердження 3. *Якщо для функції* $z = f(x,y)$, *заданої таблицею значень* (3), *виконується умова* (4), *то*

$$\min_{i,j} |f(x_i, y_j)| = \min_{(x,y)\in R} m_f(x,y).$$

При цьому, якщо

$$\min_{i,j} |f(x_i, y_j)| = |f(x_k, y_s)|,$$

то

$$\min_{(x,y)\in R} m_f(x,y) = m_f(x_k, y_s) = t_{ks}.$$

Алгоритм відшукання розв'язку системи двох нелінійних рівнянь Використовуючи властивості числових нахилів міноранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних побудуємо алгоритм знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь (1). Оскільки розв'язок системи (1) є розв'язком рівняння $|f(x,y)| + |g(x,y)| = 0$, тому в області D виберемо систему точок $x_k = x_0 + kh$, де $k = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, і $y_l = y_0 + lh$, де $l = 0, 1, \ldots, m$, $y_0 = c$, $h = \frac{d-c}{m}$. Виберемо початкове наближення розв'язку $x = x_0$, $y = y_0$ і від цієї точки будемо рухатись в напрямку спадання значення функції $|f(x,y)| + |g(x,y)|$ доти, доки не знайдем «нульовий мінімум» цієї функції.

Позначимо $a_{kl} = 1 + |f(x,y)| + |g(x,y)|$.

Величини $r_{kl}(x) = \left(\frac{a_{k-1,l}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h}}$, $r_{kl}(y) = \left(\frac{a_{k,l-1}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h}}$ назвемо (k,l)-ми числовими нахилами функції $-\ln(1 + |f(x,y)| + |g(x,y)|)$ відповідно в напрямі осей Ox та Oy. А величину $r_{kl}(x,y) = \left(\frac{a_{k-1,l-1}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h\sqrt{2}}}$ назвемо числовим нахилом цієї функції в напрямі бісектриси кута ABC, де A, B, C точки відповідно з координатами (x_{k-1}, y_l), (x_{k-1}, y_{l-1}), (x_k, y_{l-1}).

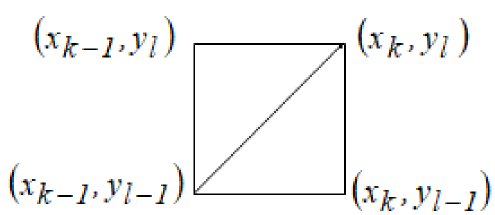

Рис. 1. Схема переходу між точками

Припустимо, що від точки (x_0, y_0) ми прийшли до точки (x_{k-1}, y_{l-1}). Тоді вибираємо напрям подальшого руху. Для цього шукаємо $r_{k,l-1}(x)$, $r_{k-1,l}(y)$, $r_{kl}(x,y)$. Тоді можливі такі випадки:

1) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{k,l-1}(x)$ відбувається перехід до точки (x_k, y_{l-1});
2) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{k-1,l}(y)$ відбувається перехід до точки (x_{k-1}, y_l);
3) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{kl}(x,y)$ відбувається перехід до точки (x_k, y_l).

Процес переходу від точки до точки завершується в точці $x = x_i$, $y = y_j$, якщо для деякого i, j виконується умови:

$$r_{ij}(x) \geq 1, r_{i+1,j}(x) \leq 1, \tag{5}$$

$$r_{ij}(y) \geq 1, r_{i,j+1}(y) \leq 1, \tag{6}$$

$$r_{ij}(x,y) \geq 1, r_{i+1,j+1}(x,y) \leq 1, \tag{7}$$

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| < h. \tag{8}$$

Зауважимо, що у процесі переходу від точки до точки можна зменшувати h для підвищення точності розв'язку.

Приклад 1. Розглянемо систему з двох нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Графік якої зображений на рисунку 2.

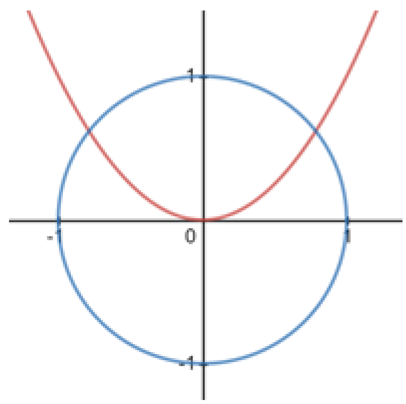

Рис. 2. Графік системи нелінійних рівнянь.

Розв'язок системи (9) є розв'язком рівняння $|y - x^2| + |x^2 + y^2 - 1| = 0$, або розв'язком $-\ln(1 + |y - x^2| + |x^2 + y^2 - 1|) = 0$.

Вищезазначена система (9) має два розв'язки. Знайдемо один із них. У якості області D виберемо $D = \{0,5 \leq x \leq 1,\ 0,5 \leq y \leq 1\}$ і крок $h = 0,01$. За початкову точку візьмемо $(0,5; 0,5)$. У результаті застосування алгоритму отримаємо точку $(0,8; 0,63)$, для цієї точки виконуються умови (5)-(8). Уточнимо точку зменшивши крок. За початкове наближення виберемо точку $(0,75; 0,6)$ і візьмемо крок $h = 0,002$. Одержимо точку $(0,788; 0,62)$ для якої виконуються умови (5)-(8). Для підвищення точності розв'язку застосуємо побудований алгоритм до початкової точки $(0,78; 0,61)$ з кроком $h = 0,00014$. У результаті чого одержимо точку $(0,78658; 0,61784)$, яку приймемо за розв'язок системи (9) з точністю до величини кроку h. Аналогічно поступаємо з відшуканням іншого розв'язку системи нелінійних рівнянь. У результаті застосування одержимо другий розв'язок системи нелінійних рівнянь $(-0,78658; 0,61784)$.

Приклад 2. Розглянемо модель оптимального дворівневого блокового пошуку у впорядкованих файлах у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів [6]. Розглянемо дворівневий блоковий пошук, у випадку використання методу двійкового пошуку у локалізованому блоці. Нехай впорядкований файл містить N записів. Файл розбитий на n блоків, а кожен блок розбивається на m підблоків по $2^l - 1$ записів у кожному, де $m = \frac{N}{n\left(2^l-1\right)}$. Для знаходження n та l, за яких математичне сподівання кількості порівнянь E, необхідних для пошуку запису у файлі досягає мінімуму побудовано систему нелінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(2^l - 1\right) n^2 = N, \\ \left(2^l - 1\right)^2 = \left(1 + \frac{N}{2n}\right) 2^l \ln 2. \end{array} \right. \tag{10}$$

Розв'яжемо систему (10) запропонованим методом при $N = 1000$.

У результаті застосування побудованого у роботі методу одержимо наближений розв'язок задачі $n = 9$, $l = 5$. Тобто кількісь блоків на які повинен бути розбитий файл рівна 9, блоки розбиваються на 4 підблоки по 31 запис у кожному.

3. Висновки. Запропоновано новий чисельний метод відшукання коренів системи двох нелінійних рівнянь. Побудований метод використовує властивості числових нахилів міноранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних заданих таблично.

Розроблений у роботі алгоритм застосовано до розв'язання тестової задачі. У результаті застосування алгоритму одержимо розв'язок з точністю до величини кроку.

Основна перевага цього методу над класичними методами полягає у такому:
1) збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;
2) розв'язок системи двох нелінійних рівнянь знаходимо з точністю до величини кроку h;
3) метод відноситься до методів нульового порядку, тобто у чисельному методі використовуються тільки значення нелінійних функцій;
4) простота та наглядність методу.

Список використаної літератури

1. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мінорант Ньютона та його використання. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2013. Вип. 24 №1.* С. 16-21.
2. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод нульового порядку оптимізації негладких логарифмічно опуклих функцій. *Наук.вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2013. Вип.24. №2.* С.43–47.
3. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельні методи мінорантного типу відшукання абсолютного екстремуму негладких логарифмічно опуклих функцій. Dynamical system modelling and stability investigation (DSMSI – 2013): XVI International Conference, May 29-31, 2013: Abstracts of conference reports. Kyiv, Ukraine 2013. P.353
4. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мінорант Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання для наближення функцій. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформат. 2014. Вип.21.* С.58–66.
5. Цегелик Г.Г., Глебена М.І. Оцінка похибки наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XIX Всеукраїнська наукова конференція, 3–4 жовтня 2013 року: матеріали конф. Львів, 2013. С.130–131.
6. Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Оптимальний дворівневий блоковий пошук у впорядкованих файлах у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XXV Міжнародна наукова конференція, 24–27 вересня 2019 року: матеріали конференції. Львів, 2019. С.45–48.

Hlebena M. I., Tsehelyk H. H. Numerical method of minorant type of finding the solution to a system of two nonlinear equations.

When solving applied problems, modeling complex physical processes, as well as studying mathematical models of optimal organization and searching for information in database files, there is a need to solve systems of nonlinear equations. There are no universal methods for solving such problems, so it is of great interest to develop and study new, effective numerical methods that could be used to solve systems of nonlinear equations.

We are working on the development of such methods. In [1], the apparatus of nonclassical Newton minorants and their diagrams of functions of one real variable, given in tabular form, are constructed. Necessary and sufficient conditions for the existence of the Newton minorant have been established. The properties of the Newton minorant and its diagram are studied, the main characteristics of the Newton minorant and its diagram are introduced, algorithms for their search are constructed.

The paper proposes a new numerical method of zero order, which is based on the use of the apparatus of nonclassical minorants and Newton diagrams of functions. The constructed method uses the properties of the numerical slopes of the Newton minaret and their diagrams of the function of two real variables given in the table.

Keywords: Newton's minorant, system of nonlinear equations, zero-order method, numerical method.

References

1. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Aparat neklasychnykh minorant Niutona ta yoho vykorystannia [Apparatus of non-classical Newton's minorant and its use] *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. Of mathematics and informatics, 24, 1*, 16−21. [in Ukranian]
2. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Chyselnyi metod nulovoho poriadku optymizatsii nehladkykh loharyfmichno opuklykh funktsii [Numerical zero-order method for optimization of non-smooth logarithmically convex functions] *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. Of mathematics and informatics, 24, 2*, pp. 43−47. [in Ukranian]
3. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Chyselni metody minorantnoho typu vidshukannia absoliutnoho ekstremumu nehladkykh loharyfmichno opuklykh funktsii [Numerical method of the minorant type of finding the absolute extremum of non-smooth logarithmically convex functions] Dynamical system modelling and stability investigation (DSMSI – 2013): XVI International Conference, May 29-31, 2013: Abstracts of conference reports.– Kyiv, Ukraine, 2013, P.353, [in Ukranian]
4. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2014). Aparat neklasychnykh minorant Niutona funktsii, zadanykh tablychno, ta yoho vykorystannia dlia nablyzhennia funktsii [Apparatus of non-classical minorants of Newton's functions and its use to approximate functions] *Herald of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science, 21*, pp. 58-66., [in Ukranian]
5. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Otsinka pokhybky nablyzhennia funktsii neklasychnoiu minorantoiu Niutona [Estimation error of function approximation of non-classical Newtons minorant] Problems of Applied Mathematics and Informatics: XIX Ukrainian Scientific Conference, pp.130–131. [in Ukranian]
6. Fundak, L.I., & Tsehelyk, H.H. (2019). Optymalnyi dvorivnevyi blokovyi poshuk u vporiadkovanykh failakh u vypadku rivnomirnoho rozpodilu ymovirnostei zvertannia do zapysiv [Optimal two-level block search in ordered files in the case of even distribution of probabilities of access to records] Problems of Applied Mathematics and Informatics: XXV International Scientific Conference, pp. 45–48. [in Ukranian]

Одержано 02.10.2020