УДК 512.647.2:512.562

В. М. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
А. М. Полищук (Представительство компании “Samsung Electronics Co. Ltd”, Киев)

О ПОДКАТЕГОРИЯХ КОНЕЧНОГО РАНГА КАТЕГОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

In this paper we study subcategories of fixed rank of the category of representations of an unbounded partially ordered set.

У статті вивчаються підкатегорії фіксованого рангу категорії зображень необмеженої частково впорядкованої множини.

В работе [1] П. Габриель ввел представления колчанов и показал, что колчан имеет конечное, с точностью до изоморфизма, число неразложимых (конечномерных) представлений тогда и только тогда, когда его форма Титса является положительно определенной. Задача об описании тех или иных объектов, имеющих конечное число неразложимых представлений (такие объекты называются объектами конечного типа), рассматривались и ранее, и самым лучшим ответом при этом считался естественно ответ явный.

Первыми результатами подобного типа являются те, которые связаны с представлениями конечных групп над полями. В случае, когда характеристика поля не делит порядка группы (классический случай), группа всегда имеет конечный тип. А если характеристика поля p делит порядок группы (модулярный случай), то хорошо известно, что группа имеет конечный тип тогда и только тогда, когда ее силовская p-подгруппа является циклической. Если говорить о представлениях конечных групп над кольцами, то в первую очередь следует сказать о целочисленных представлениях. С. Д. Берман, П. М. Гудивок в [2–4] и, независимо, А. Хеллер, I. Райнер в [5, 6], доказали, что конечная группа имеет конечное число p-адических представлений тогда и только тогда, когда когда ее силовская p-подгруппа является циклической группой порядка $p^h, h \leqslant 2$; для целочисленных представлений конечных групп критерий конечности типа получен в работах [2, 3, 7] и, независимо, в [8] (отметим, что первым результатом для группы непростого порядка является описание целочисленных представлений циклической группы 4-го порядка [9]). Относительно представлений групп над другими кольцами см., в первую очередь, обзор [10] и монографию [11] (см. также [12]). Кроме работ о представлениях групп, имеется много работ о других объектах конечного типа (в первую очередь различных классов конечномерных алгебр и колец).

Возвращаемся теперь к представлениям колчанов. Явный ответ об объектах конечного типа есть и в случае колчанов (колчаны конечного типа — это в точности колчаны Дынкина), однако связь с формами Титса оказалась насколько интересной и важной, что этот результат стал началом целого направления в теории представлений. Отметим, что форма Титса определена в самой общей ситуации в работах [13] и [14] (если иметь ввиду свободный случай, т. е. рассматривать задачи без соотношений); для колчанов с соотношениями квадратичная форма Титса введена в [15]. Для различных классов классификационных задач было получено много результатов, касающихся их связи с квадратичной формой Титса. Читатель, интересующийся этой темой более подробно, отсылается, в частности, – если говорить о более ранних работах, – к работам из сборников [16, 17] и к монографиям [18] и [19] (вместе с библиографиями в них); если же говорить о более поздних работах — см., например, работы [20–28] (приведенные здесь ссылки ни в коем случае не претендуют на полное изложение указанной темы).

При изучении связи между задачами конечного типа и свойствами формы Титса речь идет обычно о ее слабой положительности (т.е. положительности на ненулевых векторах с неотрицательными координатами). Отметим, что указанный выше результат о колчанах конечного типа не является по существу исключением, так как для формы Титса в этом случае условия положительности и слабой положительности эквивалентны. Если говорить о классификационных задачах без соотношений, то следующим после результата П. Габриеля является полученный Ю. А. Дроздом [29] результат о том, что частично упорядовенное (сокращенно ч. у.) множество имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна (напомним, что представления ч. у. множеств определены, на матричном языке, в работе [30]; форма Титса для ч. у. множеств впервые введена в [29]). Положительно определенные формы при этом не играют какой-либо роли. Однако, если изучать естественные подкатегории категории представлений ч. у. множества, то (как заметил первый из авторов) положительно определенные формы Титса могут уже играть важную роль. Настоящая статья является первой работой в этом направлении. Желая исключить из рассмотрения ч. у. множества сравнительно малых размерностей (здесь общие закономерности проявляются, как обычно в подобных случаях, для множеств, порядок которых превосходит некоторое натуральное число N), мы рассматриваем (конечномерные) представления бесконечных ч. у. множеств.

1. Формулировка основних результатов. На протяжении всей статьи мы придерживаемся правой записи (в том числе умножаем морфизмы и т. п. слева направо). Все рассматриваемые в этой статье векторные пространства являются конечномерными.

Напомним [31], что представлением конечного ч. у. множества S над полем k называется набор конечномерных векторных k-пространств $\widetilde{U} = \{U, U_x \,|x \in S\}$, где каждое U_x является подпространством в U и $U_x \subseteq U_y$, если $x < y$. Аналогичным образом можно определить представление бесконечного ч. у. множества S. Представления множества S образуют категорию, если морфизмами из $\widetilde{U}$ в $\widetilde{V}$ считать линейные отображения $\varphi : U \to V$ такие, что $U_x\varphi \subseteq V_x$ для любого $x \in S$. Если $\widetilde{U} = \{U, U_x \,|x \in S\}$ — представление (конечного или бесконечного) ч. у. множества S, то для $x \in S$ положим $U'_x = U_x / \sum_{y<x} U_y$ и $d_x = d_x(\widetilde{U}) = \dim_k U'_x$. Сумму $d = d(\widetilde{U}) = d_0 + \sum_{x \in S} d_x$, где $d_0 = d_0(\widetilde{U}) = \dim_k U$, будем называть размерностью представления U. Представление U назовем конечномерным, если его размерность конечна. Категорию конечномерных представлений множества S обозначим через $\mathcal{R}_k(S)$. Эта категория является категорией Крулля-Шмидта (поскольку это имеет место для конечных множеств). В дальнейшем мы будем рассматривать только конечномерные представления ч. у. множеств.

Пусть K — k-категория и J — полное множество ее неразложимых попарно неизоморфных объектов. Подкатегорию T категории K назовем нормальной, если она является полной и каждый неразложимый объект из T изоморфен некоторому объекту из J. Представлением категории K называется всякий (k-линейный) функтор $F : K \to \operatorname{mod} k$, где $\operatorname{mod} k$ обозначает, как обычно, категорию конечномерных векторных k-пространств. Два представления F и F' называются изоморфными, если

F и F' изоморфны как объкты категории функторов из K в $\operatorname{mod} k$. Размерностю представления F назовем число $d(F) = \sum_{X \in J} \dim_k F(X)$. Представление F назовем конечномерной, если $d(F) < \infty$. В дальнейшем мы будем рассматривать только конечномерные представления категорий. Категорию K назовем категорией конечного типа, если она имеет, с точностью до изоморфизма, конечное число неразложимых представлений (в этом случае, очевидно, J – конечное множество). Далее, K назовем категорией локально конечного типа, если конечный тип имеет всякая ее нормальная подкатегория с конечным, с точностью до изоморфизма, числом неразложимых объектов; в противном случае K называем категорией локально бесконечного типа.

Если S — (конечное или бесконечное) ч. у. множество и R — подкатегория категории $\mathcal{R}_k(S)$ с множеством неразложимых объектов I, то положим $r(R) = \sup_{X \in I} d(X)$. Мы называем $r(R)$ рангом подкатегории R (ранг произвольной подкатегории может быть как конечным, так и бесконечным). Через $\mathcal{R}_{m,k}(S)$, где m — натуральное число, мы обозначаем естественную подкатегорию категории $\mathcal{R}_k(S)$, являющуюся полной и содержащую в качестве объектов те объекты из $\mathcal{R}_k(S)$, которые не содержат неразложимых прямых слагаемых размерности $d > m$; очевидно, что $r(\mathcal{R}_{m,k}(S)) \leqslant m$. Полную подкатегорию этой категории, состоящей из фиксированных представителей всех классов изоморфных неразложимых объектов, обозначаем через $\mathcal{R}^{\circ}_{m,k}(S)$.

Пусть S — бесконечное частично упорядоченное множество и $\mathbb{Z}_0^{S \cup 0}$ — подмножество в декартовом произведении $\mathbb{Z}^{S \cup 0}$, состоящее из всех векторов $z = (z_i)$ с конечным числом ненулевых координат. Соответствующую множеству S квадратичную форму Титса $q_S : \mathbb{Z}_0^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$ определим (по аналогии с конечным случаем [29]) равенством

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Ч. у. множество S называется разложимым, если оно раскладывается в прямую сумму двух непустых подмножеств (т. е. существуют непустые подмножества X и Y с попарно несравнимыми элементами, такие, что $S = X \cup Y$ и $X \cap Y = \varnothing$); в противном случае множество S называется неразложимым. Бесконечное ч. у. множество назовем неограниченным, если оно не имеет ни минимальных, ни максимальных элементов.

Нашей целью является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть S — неограниченное частично упорядоченное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *подкатегория $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ имеет локально конечный тип;*
2) *форма Титса $q_S(t)$ является положительно определенной.*

Теорема 2. *Пусть S — неограниченное частично упорядоченное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *подкатегория $\mathcal{R}_{3,k}(S)$ имеет локально конечный тип;*
2) *S неразложимо и форма Титса $q_S(t)$ является положительно определенной.*

Теорема 3. *Пусть S — неограниченное частично упорядоченное множество и $m > 3$. Тогда подкатегория $\mathcal{R}_{m,k}(S)$ имеет локально конечный тип тогда и только тогда, когда локально конечный тип имеет подкатегория $\mathcal{R}_{3,k}(S)$.*

Заметим, что из теоремм 2 и 3 в действительности следует (см. доказательство теоремы 3), что если при $m > 3$ подкатегория $\mathcal{R}_{m,k}(S)$ имеет локально конечный тип, то $\mathcal{R}_{m,k}(S) = \mathcal{R}_{3,k}(S)$ (или, другими словами, S не имеет представлений размерности $d > 3$).

2. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение о связи нашей задачи с представлениями колчанов.

Пусть S — произвольное (конечное или бесконечное) ч. у. множество. Элементы $a, b \in S$ будем называть соседними, если они сравнимы и в случае, когда $x < y$ (соответственно $x > y$), не существует элемента z такого, что $x < z < y$ (соответственно $x > z > y$). Обозначим через $\Gamma(S)$ коммутативный колчан с множеством вершин $\Gamma_0(S) = S$ и множеством стрелок $\Gamma_1(S) = \{x \to y \,|\, x, y$ — соседние элементы из S и при этом $x > y\}$; условие коммутативности означает, что любые два пути между одними и теми же двумя вершинами равны. Обозначим, далее, через $\widetilde{\Gamma}(S)$ колчан с соотнощениями, являющийся расширением колчана $\Gamma(S)$ с помощью вершины 0 и стрелок $0 \to x$, где x пробегает S; при этом считаем, что произведение стрелок $0 \to a$ и $a \to b$ равно стрелке $0 \to b$ $(a, b \in S)$. В случае, когда S конечно, колчан $\widetilde{\Gamma}(S)$ можно задать более естественным способом, исключив из него стрелки, которые являются произведением других. Тогда $\widetilde{\Gamma}(S)$ — коммутативный колчан с множеством вершин $\widetilde{\Gamma}_0(S) = S \cup 0$ и множеством стрелок $\widetilde{\Gamma}_1(S) = \{x \to y \,|\; x,\, y$ — соседние элементы из S и при этом $x > y\} \cup \{0 \to x \,|\, x$ — максимальный элемент $S\}$.

Напомним, что категория (конечномерных) представлений любого колчана изоморфна категории (конечномерных) представлений его k-категории путей.

Предложение 1. *Категория (конечномерных) представлений категории $\mathcal{R}^{\circ}_{2,k}(S)$ изоморфна категории (конечномерных) представлений колчана $\widetilde{\Gamma}(S)$ (а значит категория представлений категории $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ эквивалентна категории представлений колчана $\widetilde{\Gamma}(S)$).*

Доказательство. Неразложимые представления размерности 1 и 2 ч. у. множества S исчерпываются представлениями $\widetilde{U^0} = \{U^0 = k, U^0_x = 0$ для любого $x \in S\}$ и $\widetilde{U^a} = \{U^a = k, U^a_x = k$ для любого $x \geqslant a, U^a_x = 0$ в противном случае$\}$, где a пробегает S. При этом для множеств морфизмов между этими объектами категории $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ имеем:

a) если $a \geqslant b$, то $\mathrm{Hom}\,(\widetilde{U^a}, \widetilde{U^b}) = E_{ab}k$, где $E_{ab} : U^a \to U^b$ — тождественное линейное отображение (т. е. $\alpha E_{ab} = \alpha$ для любого $\alpha \in k$); в противном случае (если $a < b$ или b несравнимо с a) $\mathrm{Hom}\,(\widetilde{U^a}, \widetilde{U^b}) = 0$;

b) $\mathrm{Hom}\,(\widetilde{U^0}, \widetilde{U^a}) = F_a k$, где $F_a : U^0 \to U^a$ — тождественное линейное отображение;

c) $\mathrm{Hom}\,(\widetilde{U^a}, \widetilde{U^0}) = 0$.

Легко видеть, что произведения морфизмов вида E_{ab} и F_a задаются следующими формулами: $E_{ab}E_{bc} = E_{ac}$ и $F_a E_{ab} = F_b$; во всех остальных случаях произведение равно 0.

Отсюда, очевидно, следует требуемое утверждение.

Теперь уже легко показать, что если форма Титса $q_S(z)$ положительно определена, то $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ — категория локально конечного типа. Действительно, в силу основного результата работы [32] S является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств (почти цепным мы называем ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов, а цепным — всякое линейно упорядоченное множество). И осталось лишь воспользоваться тем, что в силу основных результатов работ (в которых сформулирован критерий конечности типа для коммутативных колчанов) [33] и [34] любой (конечный) коммутативный колчан $\widetilde{\Gamma}(S')$, где S' — конечное подмножество S, имеет в этом случае конечный тип.

Покажем теперь, что если форма Титса $q_S(z)$ не является положительно определенной, то $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ — категория локально бесконечного типа.

Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть S — неограниченное ч. у. множество. Тогда форма Титса $q_S(t)$ не является положительно определенной в том и только в том случае, когда оно содержит подмножество изомрфное или антиизоморфное одному из следующих ч. у. множеств:*

1) $T_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ *(без сравнимых $i \neq j$);*
2) $T'_2 = \{1, 2, 3, 4, 5 \,|\, 1 \prec 4, 2 \prec 4, 3 \prec 4 \prec 5\}$;
3) $T_3 = \{1, 2, 3, 4 \,|\, 1 \prec 3, 1 \prec 4, 2 \prec 3, 2 \prec 4\}$;
4) $T_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$;
5) $T'_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 3 \prec 7\}$;
6) $T'_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;
7) $T'_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9, 1 \prec 4\}$;
8) $T'_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,|\, 1 \prec 4, 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$.

Отметим, что это утверждение, но в случае, когда вместо множества T'_6 рассматривать множество $T_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8, 1 \prec 4\}$, а вместо множеств T'_2, T_5, T'_7 и T'_8 — множества $T_2 = T'_2 \setminus 5$, $T_5 = T'_5 \setminus 8$, $T_7 = T'_7 \setminus 9$ и $T_8 = T'_8 \setminus 9$, следует непосредственно из результатов работы [32] (поскольку при доказательстве теоремы из [32], а точнее той ее части, которая связана с необходимостью, используется неположительная определенность формы Титса только для множеств T_1–T_8). Если более детально проанализировать доказательство указанной теоремы, то легко видеть, что множества T_6, T_7 и T_8 можно заменить на множества (с неположительной определенной формой Титса) $T_6(p) \setminus 1$, $T_7(p)$ и $T_8(p)$ (p — натуральное число), которые получаются соответственно из $T_6 \setminus 1$, T_7 и T_8 заменой элемента 8 на цепь $8 \prec 8{+}1 \ldots 8{+}p$; аналогично множества T_2 и T_5 можно заменить на множества $T_2(p)$ и $T_5(p)$, которые получаются из T_2 и T_5 заменой элементов 4 и 7 соответственно на цепи $4 \prec 4 + 1 \ldots 4 + p$ и $7 \prec 7 + 1 \ldots 7 + p$. В случае нашего утверждения мы берем во всех случаях $p = 1$.

Теперь осталось убедиться лишь в том, что коммутативный колчан $\widetilde{\Gamma}(T)$ имеет бесконечный тип для каждого ч. у. множества множества T, указанного в предложении 2. А это следует (с учетом результатов работы [1)] из того, что

1) для $T = T_1$ колчан $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина (с некоторым направлением ребер) $\widetilde{D}_4$;

2) для $T = T'_2, (T'_2)^*$ подколчан $\Gamma(T)$ колчана $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{D}_4$;

3) для $T = T_3$ подколчан $\Gamma(T)$ колчана $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{A}_3$;

4) для $T = T_4$ колчан $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{E}_6$;

5) для $T = T'_5, (T'_5)^*$ подколчан $\Gamma(T)$ колчана $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{E}_7$;

6) для $T = T'_6$ колчан $\widetilde{\Gamma}(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{E}_8$;

7)–8) для $T = T'_7, T'_8, (T'_7)^*, (T'_8)^*$ колчан $\Gamma(T)$ изоморфен пополненному колчану Дынкина $\widetilde{E}_8$.

3. Доказательство теоремм 2 и 3. Сначала рассмотрим теорему 2.

Покажем, что если S неразложимо и форма Титса $q_S(t)$ является положительно определенной, то подкатегория $\mathcal{R}_{3,k}(S)$ имеет локально конечный тип. В силу основного результата работы [32] неограниченное ч. у. множество с положительно определенной формой Титса является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств. Значит множество S является цепным или почти цепным. Очевидно, достаточно показать, что локально конечный тип имеет подкатегория $\mathcal{R}_{3,k}(S')$, где S' — конечное почти цепное множество. Обозначим через a, b единственную пару несравнимых элементов в S'. Кроме неразложимых представлений размерности 1 и 2, которые исчерпываются представлениями $\widetilde{U^0} = \{U^0 = k, U^0_x = 0$ для любого $x \in S'\}$ и $\widetilde{U^a} = \{U^a = k, U^a_x = k$ для любого $x \geqslant a, U^a_x = 0$ в противном случае$\}$, где a пробегает S' (см. доказательство предложения 1), множество S' имеет еще одно представление размерности 3: $\widetilde{U^{ab}} = \{U^{ab} = k,\ U^{ab}_x = k$ для любого x такого, что $x \geqslant a$ или $x \geqslant b$, $U^{ab}_x = 0$ в противном случае$\}$. При этом

d) $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^0}, \widetilde{U^{ab}}) = F_{ab}k$, где $F_{ab} : U^0 \to U^{ab}$ — тождественное линейное отображение;

e) $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^{ab}}, \widetilde{U^0}) = 0$;

f) если $c \geqslant a$ или $c \geqslant b$, то $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^c}, \widetilde{U^{ab}}) = G_{cab}k$, где $G_{cab} : U^c \to U^{ab}$ — тождественное линейное отображение; в противном случае $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^c}, \widetilde{U^{ab}}) = 0$;

g) если $c < a$ (тогда $c < b$), то $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^{ab}}, \widetilde{U^c}) = H_{abc}k$, где $H_{abc} : U^{ab} \to U^c$ — тождественное линейное отображение; в противном случае $\operatorname{Hom}(\widetilde{U^{ab}}, \widetilde{U^c}) = 0$.

Легко видеть, что $F_c G_{cab} = F_{ab}$, $E_{ab} G_{bcd} = G_{acd}$, $H_{abc} E_{cd} = H_{abd}$ и $G_{cab} H_{abd} = E_{cd}$.

Отсюда следует, что категория $\mathcal{R}^{\circ}_{3,k}(S')$ изоморфна категории $\mathcal{R}^{\circ}_{2,k}(S'_{ab})$, где $S'_{ab} = S' \cup \{(a,b)\}$ и при этом $(a,b) < a$, $(a,b) < b$ и $c < (a,b)$ для любого $c < a$ (тогда $c < b$). И поскольку S'_{ab} — почти цепь, то в силу теоремы 1 категория $\mathcal{R}^{\circ}_{3,k}(S')$, а значит и категория $\mathcal{R}_{3,k}(S')$, имеет локально конечный тип.

Покажем, что если подкатегория $\mathcal{R}_{3,k}(S)$ имеет локально конечный тип, то S неразложимо и форма Титса $q_S(t)$ является положительно определенной. Поскольку категория $\mathcal{R}_{2,k}(S)$ имеет в этом случае локально конечный тип (как полная нормальная подкатегория категории $\mathcal{R}_{3,k}(S)$ локально конечного типа), то в силу теоремы 1 форма Титса $q_S(t)$ является положительно определенной. Тогда (о чем уже говорилось выше) S является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств. Нам нужно доказать, что S неразложимо. Предположим противное. Тогда в S существует подмножество вида $S' = \{a, b, c, d \,|\, a < b, c < d\}$. Легко видеть, что полная подкатегория категории $\mathcal{R}^{\circ}_{3,k}(S')$, состоящая из представлений $\widetilde{U^b}$, $\widetilde{U^d}$, $\widetilde{U^{ad}}$ и $\widetilde{U^{bc}}$, изоморфна категории представлений пополненного колчана Дынкина $\widetilde{A}_3$ (с некоторым направлением ребер), и следовательно $\mathcal{R}^{\circ}_{3,k}(S')$, а значит и $\mathcal{R}_{3,k}(S)$, имеет локально бесконечный тип. Пришли к противоречию и значит ч. у. множество S неразложимо.

Переходим к доказательству теоремы 3.

Если $\mathcal{R}_{m,k}(S)$ имеет локально конечный тип, то локально конечный тип имеет, очевидно, и $\mathcal{R}_{3,k}(S)$. Обратно, если $\mathcal{R}_{3,k}(S)$ имеет локально конечный тип, то (см. доказательство теоремы 2) множество S является цепным или почти цепным. Тогда S не имеет неразложимых представлений размерности $d > 3$ и значит $\mathcal{R}_{m,k}(S) = \mathcal{R}_{3,k}(S)$.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103,309.
2. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1962. – **145**, вып. 6. – С. 1199-1201.
3. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // Докл. и сообщ. Ужгородского ун-та. – 1962. – №5. – С. 74-76.

4. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. – 1964. – **28**, №4. – С. 875-910.
5. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integrals, I //Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73-92.
6. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integrals, II // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318-328.
7. *Берман С. Д.* Представления конечных групп над произвольным полем и кольцом целых чисел // Изв. АН СССР. – 1966. – **30**, №1. – С. 69-132.
8. *Jones A.* Groups with a finite number of indecomposable integral representations of cyclic groups in rings //Mich. Math. J. – 1963. – №3. – P. 257-261.
9. *Ройтер А. В.* О представлениях циклической группы 4-го порядка целочисленными матрицами // Вестник Ленинград. ун-та. – 1960. – **19**. – С. 58-78.
10. *Гудивок П. М.* Про розвиток теорії зображень скінченних груп в Ужгородському університеті // Наук вісник Ужгород ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вып. 7. – С. 4–15.
11. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2003. – 118 с.
12. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп (учебное пособие). Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 1978. – 81 с.
13. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.
14. *Дрозд Ю.А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
15. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. – Carleton Univ., Ottawa, Ontario, 1974. – Paper №5.
16. Матричные задачи (Сборник научных трудов). – К.: Ин-т математики АН УССР,1977. – 166 с.
17. Представления и квадратичные формы (Сборник научных трудов). – К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. – 152 с.
18. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms. Lecture notes in math. – **1099**. – 1984. – 376 p.
19. *Simson D.* Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Category. – Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 499 p.
20. *Bongartz K.* Algebras and quadratic forms // J. London Math. Soc. (2). – 1983. – **28**, №3. – P. 461–469.
21. *Kraft H., Reidtmann Ch.* Geometry of representations of quivers // London Math. Soc. Lecture Note Ser. – 1986. – **116**. – P. 109–145.
22. *Marmaridis N.* One point extensions of trees and quadratics forms // Fund. Math. – 1990. – **134**, №1. – P. 15–35.
23. *Kasjan S., Simson D.* Tame prinjective type and Tits form of two-peak posets. I // J. Pure Appl. Algebra. – 1996. – **106**, №3. – P. 307–330.
24. *Kasjan S., Simson D.* Tame prinjective type and Tits form of two-peak posets. II // J. Algebra. – 1997. – **187**, №1. – P. 71–96.
25. *Drozd Yu. A.* Representations of bisected posets and reflection functors // Algebras and modules, II (Geiranger, 1996), CMS Conf. Proc., 1998. – **24**. – P. 153–165.
26. *de la Peña J. A., Skowroński A.* The Tits and Euler forms of a tame algebra // Math. Ann. – 1999. – **315**, №1. – P. 37–59.
27. *Dräxler P., de la Peña J. A.* Tree algebras with non-negative Tits form // Comm. Algebra. – 2000. – **8**. – P. 3993–4012.
28. *Deng B.* Quasi-hereditary algebras and quadratic forms // J. Algebra. – 2001. – **239**, №2. – P. 438–459.
29. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
30. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
31. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. – Springer-Verlag, 1992. – 177 p.

32. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О квадратичной форме Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вып. 7. – С. 28–31.
33. *Завадский А. Г., Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – 52 с. – Препринт 76-3.
34. *Loupias M.* Indecomposable representations of finite ordered sets // Lecture notes in math. – **488**. – 1975. – P. 201–209.

Получено 23.09.2003