УДК 519. 21

Т. В. Боярищева (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РОЗПОДІЛІВ СУМ ДО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ

The paper contains some estimates of the rate of convergence to the normal law.

У роботі знайдені оцінки швидкості збіжності розподілів сум до нормального закону.

У даній роботі міститься оцінка близькості функцій розподілу сум випадкових величин до нормального закону розподілу. Загальна постановка цієї задачі здійснена в [1]. Ефективним для даного дослідження є використання псевдомоментів. У [2] для розв'язання схожої задачі використовувались псевдомоменти аналогічної будови, однак оцінка, одержана при цьому, не досить добре відображає близькість функцій розподілу. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [3] і [4].

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин з $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = \sigma_i^2 < \infty$, функціями розподілу $F_i(x)$ і характеристичними функціями $f_i(t)$. Позначимо через $\Phi_n(x)$ функцію розподілу випадкової величини $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n}$, де $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$, $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону. Нехай $\sigma = \min(1,\ \sigma_1,\ \ldots\ \sigma_n)$. Для довільного дійсного $y > 0$ введемо псевдомоменти

$$\mu_i^{(1)}(y) = \int\limits_{|x|\le y} \max(1,\ x^2)\,|H_i(x)|\,dx,$$

$$\mu_i^{(2)}(y) = \int\limits_{|x|> y} \max(1,\ |x|)\,|H_i(x)|\,dx,$$

де $H_i(x) = F_i(x) - \Phi(\frac{x}{\sigma_i})$; $\mu^{(1)}(y) = \max\limits_{1\le i\le n} \mu_i^{(1)}(y)$; $\mu^{(2)}(y) = \max\limits_{1\le i\le n} \mu_i^{(2)}(y)$;
$\mu(y) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\mu^{(1)}(y)}{\sigma\sqrt{n}} + \mu^{(2)}(y)\right)$.

Теорема. *Для будь-якого натурального n виконується нерівність*

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le C \min_y \max\left(\mu(y),\ \frac{\mu^{\frac{n}{n+1}}(y)}{\sqrt{n}}\right).$$

Для доведення теореми необхідні такі леми.

Лема 1. *Для будь-якого t справджується нерівність*

$$\omega_i(t) = \left|f_i(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le$$
$$\le \min\left\{|t|\left(\mu_i^{(1)}(y) + \mu_i^{(2)}(y)\right), t^2\left(\mu_i^{(1)}(y) + \mu_i^{(2)}(y)\right), \frac{t^3}{2}\mu_i^{(1)}(y) + 2t^2\mu_i^{(2)}(y)\right\}. \quad (1)$$

Доведення.

$$\omega_i(t) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH_i(x)\right| \le |t| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} H_i(x)\right| dx \le$$

$$\leq \ |t| \left(\int\limits_{|x|\leq y} |H_i(x)|\, dx + \int\limits_{|x|>y} |H_i(x)|\, dx \right) \leq |t| \left(\mu_i^{(1)}(y) + \mu_i^{(2)}(y) \right).$$

$$\omega_i(t) = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dH_i(x) \right| \leq$$

$$\leq \ |t| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx \right| |H_i(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \ |t| \left(\int\limits_{|x|\leq y} \frac{(itx)^2}{2} |H_i(x)|\, dx + \int\limits_{|x|>y} 2|tx|\, |H_i(x)|\, dx \right) \leq$$

$$\leq \ \frac{|t|^3}{2} \mu_i^{(1)}(y) + 2t^2 \mu_i^{(2)}(y).$$

$$\omega_i(t) = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx \right) dH_i(x) \right| \leq$$

$$\leq \ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{itx} - 1 \right| |H_i(x) dx| \leq$$

$$\leq \ |t| \left(\int\limits_{|x|\leq y} |x|\, |H_i(x)|\, dx + \int\limits_{|x|>y} |x|\, |H_i(x)|\, dx \right) \leq$$

$$\leq \ t^2 \left(\mu_i^{(1)}(y) + \mu_i^{(2)}(y) \right).$$

Лему доведено.

Нехай $\Theta = \frac{1}{\sigma^2} \max\left\{ \mu^{(1)}(y),\ \mu^{(2)}(y) \right\}$.

Лема 2. *Нехай c — деяка стала, така, що $0 < c < \frac{1}{64}$, $\mu^{(2)}(y) \leq c\sigma^2$. Тоді при $\Theta \leq c$, $|t| \leq T_1 = \frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln\Theta}$*

$$|f_i(t)| \leq e^{-t^2\sigma^2 c_1}, \tag{2}$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - 2\sqrt{c} > 0$.

Якщо $|t| > T_1$, то виконується нерівність

$$|f_i(t)| \leq \Theta|t| \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{3\ln 2}} \right). \tag{3}$$

При $\Theta > c$, $|t| \leq T_2 = \frac{c}{\Theta}$,

$$|f_i(t)| \leq e^{-t^2\sigma^2 c_2}, \tag{4}$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{e}}{2} > 0$.

Доведення. Нехай $\Theta \le c$, $|t| \le T_1$. Використовуючи оцінку (1), отримаємо

$$\begin{aligned}
&|f_i(t)| \le \omega_i(t) + e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} \le e^{\frac{-t^2\sigma^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma^2}{4}} \omega_i(t)\right) \le \\
\le\ & e^{\frac{-t^2\sigma^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{\sigma^2}{4}T_1^2} \omega_i(t)\right) \le e^{\frac{-t^2\sigma^2}{4}} \left(1 + 2\sqrt{\Theta}\sigma^2 t^2\right) \le \\
\le\ & e^{\frac{-t^2\sigma^2}{4}} \left(1 + 2\sqrt{c} t^2\sigma^2\right) \le e^{\frac{-t^2\sigma^2}{4}} e^{2\sqrt{c}t^2\sigma^2} = \\
=\ & e^{-t^2\sigma^2\left(\frac{1}{4} - 2\sqrt{c}\right)} = e^{-t^2\sigma^2 c_1}.
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок $\Theta \le c$, $|t| > T$.

$$\begin{aligned}
&|f_i(t)| \le \omega_i(t) + e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} \le \Theta + 2|t|\sigma^2\Theta \le \\
\le\ & \Theta\left(1 + 2|t|\right) \le \Theta|t| \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{3\ln 2}}\right).
\end{aligned}$$

При $\Theta > c$, $|t| \le T_2$

$$\begin{aligned}
&|f_i(t)| \le e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\right) \le \\
\le\ & e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{c}{\Theta}\right)^2} \left(\frac{|t|^3}{2}\mu^{(1)}(y) + 2t^2\mu^{(2)}(y)\right)\right) \le \\
\le\ & e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} \left(1 + \sqrt{e} t^2 \left(\frac{1}{2}\frac{c}{\Theta}\sigma^2\Theta + 2\sigma^2 c\right)\right) \le \\
\le\ & e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}} e^{t^2\sigma^2\left(c\sqrt{e}\left(\frac{1}{2}+2\right)\right)} = e^{-t^2\sigma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{5c\sqrt{e}}{2}\right)} = e^{-t^2\sigma c_2} = e^{-t^2\sigma^2 c_2}.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Доведення теореми. Нехай $\mu^{(2)} \le c\sigma^2$, бо інакше доведення теореми очевидне. З [5] (ст. 299) відомо, що

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi} \int_0^X |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi X} \sup G'(x). \tag{5}$$

Тобто треба оцінити інтеграл

$$\int_0^X \left| \prod_{i=1}^n f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t}.$$

Нехай

$$|t| \le T_m,$$

$$m = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Theta \le c, \\ 2, & \text{якщо } \Theta > c. \end{cases}$$

Користуючись оцінками (1),(2),(4), отримаємо

$$\left| \prod_{i=1}^n f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}} \right| \le \sum_{i=1}^n \left| f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2\sigma_i^2}{2B_n{}^2}} \right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{i-1} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \prod_{k=i+1}^{n} e^{\frac{-t^2\sigma_k^2}{2B_n{}^2}} \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|t|^3}{2B_n^3}\mu_i^{(1)}(y) + \frac{2t^2}{B_n^2}\mu_i^{(2)}(y)\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{i-1} e^{-t^2\sigma^2 c_m} \prod_{k=i+1}^{n} e^{\frac{-t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}} \le n\left(\frac{|t|^3}{2B_n^3}\mu^{(1)}(y) + \frac{2t^2\mu^{(2)}(y)}{B_n^2}\right) e^{\frac{-t^2\sigma^2 c_m(n-1)}{B_n^2}}. \qquad (6)$$

Оцінимо ρ_n

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^X \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X}.$$

При $\Theta > c$ покладемо $X = T_2 B_n$. При $n \ge 2$ з оцінки (6) слідує, що

$$\int_0^X \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} = \int_0^{T_2 B_n} \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} =$$

$$\int_0^{T_2} \left(\frac{|t|^3}{2}\mu^{(1)}(y) + 2t^2\mu^{(2)}(y)\right) n e^{-t^2\sigma^2 c_m(n-1)} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{n\mu^{(1)}(y)}{2}\int_0^{T_2} t^2 e^{-t^2\sigma^2 c_m(n-1)} dt + 2n\mu^{(2)}(y)\int_0^{T_2} |t| e^{-t^2\sigma^2 c_m(n-1)} dt \le$$

$$\le \frac{\mu^{(1)}(y) c_3}{2\sqrt{n}\sigma^3} + \frac{2\mu^{(2)}(y) c_3}{\sigma^2} c_4 = c_5\mu(y). \qquad (7)$$

Якщо $n = 1$, то при $\Theta > c$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{T_2\sigma_1} \left| f_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_0^{T_2} \left(\frac{t^2}{2}\mu^{(1)}(y) + 2t\mu^{(2)}(y)\right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{T_2^3}{\sigma}\mu^{(1)}(y) + T_2^2\mu^{(2)}(y)\right) \le c_6\left(\frac{\mu^{(1)}(y)}{\sigma} + \mu^{(2)}(y)\right)\frac{1}{\sigma^2} = c_6\mu(y). \qquad (8)$$

Тобто з(7) і (8) випливає, що для довільного $n \in N$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{T_2\sigma_1} \left| f_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} \le c_7\mu(y). \qquad (9)$$

Якщо $\Theta \le c$, то $X = TB_n$, де $T = \frac{c}{\Theta^{\frac{n}{n+1}}}$. Нехай $T' = \min(T_1,\ T)$. Тоді

$$\int_0^X \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} = \int_0^{T'B_n} \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} +$$

$$+ \int_{T'B_n}^{TB_n} \left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2.$$

Покладемо $T' = T_1$, бо інакше $I_2 = 0$. Оцінка інтеграла I_1 проводиться аналогічно до попереднього випадку.

$$I_1 \le c_8\mu(y),\ n \le 2. \qquad (10)$$

$$I_2 = \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \left| \prod_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{t}{B_n} \right) - e^{\frac{-t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \prod_{i=1}^{n} \left| f_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_1 B_n}^{T B_n} e^{\frac{-t^2}{2}} \frac{dt}{t} = I_2' + I_2''.$$

Для оцінки інтеграла I_2'' використовуємо нерівність

$$\int_{a}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} t^{\alpha} dt \leq a^{\alpha-1} e^{\frac{-a^2}{2}}, \ (a > 0, \ \alpha \leq 1).$$

$$I_2'' = \int_{T_1 B_n}^{T_2 B_n} e^{\frac{-t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \int_{T_1 B_n}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq (T_1 B_n)\, e^{\frac{-T_1 B_n}{2}} = \frac{\Theta^{\frac{B_n^2}{\sigma^2}}}{T_1^2 B_n^2} \leq \frac{\Theta^n \sigma^2}{B_n^2(-2\ln\Theta)} \leq \frac{\Theta^n}{n(-2\ln c)} \leq \frac{\Theta^n}{\sqrt{n}} c_9, \tag{11}$$

при $n \geq 1$

$$I_2' = \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \prod_{i=1}^{n} \left| f_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \right| \frac{dt}{t} \leq \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \left(\Theta |t| \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{3\ln 2}} \right) \right)^n \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \left(\left(2 + \frac{1}{2\sqrt{3\ln 2}} \right) \Theta \frac{|t|}{B_n} \right)^n \frac{dt}{t} = \left(\left(2 + \frac{1}{2\sqrt{3\ln 2}} \right) \Theta \right)^n \int_{T_1}^{T} t^{n-1} dt \leq$$

$$\leq \frac{(4\Theta)^n}{n} T^n = \frac{(4c)^n}{n} \Theta^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{\Theta^{\frac{n}{n+1}}}{n} c_{10}. \tag{12}$$

Залишається оцінити останній доданок в (5). Якщо $X = T_2 B_n$, то

$$\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X} \leq \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\frac{c}{\Theta} B_n} \leq \frac{\Theta}{\sqrt{n}\sigma} c_{11}. \tag{13}$$

Якщо $X = T B_n$, то

$$\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X} \leq \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\frac{c}{\Theta^{\frac{n}{n+1}}} B_n} \leq \frac{\Theta^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}\sigma} c_{12}. \tag{14}$$

Таким чином, з оцінок (9)–(14) одержуємо доведення теореми.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. *Нагаев С. В.* Оценка приближения устойчивыми законами // Теория вероятн. и мат статист. – 1997. – №56. –С. 145–160.
3. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П.В.* Оцінка збіжності у центральній граничній теоремі для різно розподілених випадкових величин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
4. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П.В.* Оцінки близькості розподілів випадкових величин // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2002. – №5. – С. 27–32.
5. *Лоев М.* Теория вероятностей.– М.: Издат. иностр. лит., 1962. – 720с.

Одержано 4.10.2003