УДК 512.86

П. М. Гудивок, В. П. Рудько, Н. В. Юрченко (Ужгородский нац. ун-т)

ПРО МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ ПІДГРУПИ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД ПОЛЕМ

The minimal irreducible solvable subgroups of the groups $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ and $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\varepsilon))$ ($\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$ and p is a privne) have been studied in the paper. All minimal irreducible p-subgroups of the groups $\mathrm{GL}(p^r,\mathbb{Q}(\varepsilon))$, $\mathrm{GL}(p^r(p-1),\mathbb{Q})$ ($r \le 2$) and some classes of minimal irredusible solvable subgroups of the group $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ are described.

Вивчаються мінімальні незвідні роз'язні підгрупи груп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ і $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}(\varepsilon))$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$, p — просте число). Описуються мінімальні незвідні p-підгрупи груп $\mathrm{GL}(p^r,\mathbb{Q}(\varepsilon))$ ($r \le 2$) і $\mathrm{GL}(p^s(p-1),\mathbb{Q})$ ($s \le 2$).

В. П. Платонов [1] показав, що всяка мінімальна незвідна підгрупа повної лінійної групи $\mathrm{GL}(n,S)$ (S — довільне поле) скінченна. Д. О. Супруненко [2] і В. П. Юферев [3] описали з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $\mathrm{GL}(p,S)$ (p — просте число). Аналогічна задача розв'язана в [4] і [5] для груп $\mathrm{GL}(p^2,\mathbb{Q})$ і $\mathrm{GL}(pq,\mathbb{Q})$, де q — просте число ($p > q$) і q не ділить $p-1$. В [6] досліджуються властивості мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $\mathrm{GL}(p^2,S)$, де S — алгебраїчно замкнуте поле. В [7] описані мінімальні незвідні нільпотентні підгрупи групи $\mathrm{GL}(p^2,S)$.

В даній роботі вивчаються мінімальні незвідні розв'язні підгрупи груп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ і $\mathrm{GL}(n,F)$, де $F = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$). Дається класифікація неспряжених мінімальних незвідних p-підгруп груп $\mathrm{GL}(p,F)$ і $\mathrm{GL}((p-1)p,\mathbb{Q})$, а також мінімальних незвідних нільпотентних підгруп групи $\mathrm{GL}(2p_1^{r_1}\cdots p_{s-1}^{r_{s-1}}p_s,\mathbb{Q})$, де $p_1,\ldots,p_s$ — різні непарні прості числа, $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ ($r_j \ge 1$, $j = 1,\ldots,s$). Описуються з точністю до ізоморфізму мінімальні незвідні p-підгрупи груп $\mathrm{GL}(p^2,F)$ і $\mathrm{GL}(p^2(p-1),\mathbb{Q})$. В кінці роботи знаходяться деякі класи мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $\mathrm{GL}(pq,\mathbb{Q})$, де p і q — різні прості числа і q ділить $p-1$.

1. Про мінімальні незвідні нільпотентні підгрупи групи GL(n,$\mathbb{Q}$). Нехай p — просте число. Із результатів Р. Т. Вольвачова [8] випливає, що в групі $\mathrm{GL}(n,Q)$ існують незвідні p-підгрупи тоді і тільки тоді, коли $n = (p-1)p^r$. Всі силовські p-підгрупи групи $\mathrm{GL}((p-1)p^r,\mathbb{Q})$ попарно спряжені в цій групі, є незвідні і ізоморфні сплетінню циклічної групи порядку p і силовської p-підгрупи симетричної групи S_{p^r} степеня p^r. Нехай ε — первісний корінь степеня p із одиниці, $F = Q(\varepsilon)$ і $\tilde{F}$ — ізоморфне полю F, поле матриць порядку $p-1$ над полем Q. Якщо H — підгрупа групи $\mathrm{GL}(n,F)$, то через $\tilde{H}$ будемо позначати підгрупу групи $\mathrm{GL}((p-1)n,\mathbb{Q})$, що одержується із групи H заміною елементів поля F на відповідні елементи поля $\tilde{F}$. Якщо G — незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}((p-1)p^r,\mathbb{Q})$, то G спряжена в цій групі з підгрупою $\tilde{H}$, де H деяка незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(p^r,F)$.

Лема 1.1. (Д. О. Супруненко [9]). *Нехай n — непарне число більше 1. В групі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ немає скінченних незвідних нільпотентних підгруп.*

Лема 1.2 (Хупперт [10]). *Скінченна p-група має точне незвідне матричне зображення над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли центр цієї групи є циклічна група.*

Теорема 1.1. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$. Група G має точне незвідне матричне $\mathbb{Q}$-зображення тоді і тільки тоді, коли центр $\mathrm{Z}(G)$ цієї групи є циклічна група.*

Доведення. Необхідність вірна для будь-якої скінченної групи G. Достатність слідує із леми 1.2 і наступної властивості: будь-яке незвідне $\mathbb{C}$-зображення групи G є компонентою деякого незвідного $\mathbb{Q}$-зображення цієї групи. Теорема доведена.

Введемо в розгляд дві підгрупи групи $\mathrm{GL}(p, F)$:

$$H_1 = \langle\tilde{\zeta}\rangle, \; H_2 = \langle diag[1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}], \tilde{\sigma}\rangle,$$

де $\tilde{\zeta}$ — супровідна матриця многочлена $x^p - \varepsilon$, $\tilde{\sigma}$ — матриця цикла $\sigma = (1, 2, \ldots, p)$. Група H_1 — циклічна порядку p^2, H_2 — неабелева порядку p^3 група експоненти p при $p \neq 2$.

Теорема 1.2. *Будь-яка мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(p, F)$ спряжена з групою H_1 або з групою H_2. Будь-яка мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}((p-1)p, \; \mathbb{Q})$ спряжена з однією із груп $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$.*

Доведення. Нехай G— мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(p, F)$. Якщо в групі G існує елемент порядку p^2, то цей елемент породжує підгрупу, спряжену з групою H_1, і тоді $G = H_1$. Нехай в G немає елементів порядку p^2. Тоді G– неабелева група експоненти p і $p \neq 2$. Нехай $A \subset B$ — такі сусідні два члени композиційного ряду групи G, що A— абелева група, а B — неабелева група. Тоді A— група типу $(p, \ldots, p)$, а $B = A\langle b\rangle$ — напівпрямий добуток групи A і циклічної групи $\langle b\rangle$ порядку p. Елемент b діє в A (як в лінійному просторі над полем із p елементів) з допомогою прямої суми кліток Жордана. Одна із цих кліток має розміри більші ніж 1. Це означає існування в A таких елементів a_0, a_1, що $ba_0 = a_0 b, a_1 b = ba_0 a_1$. Група $H = \langle a_1, b\rangle$ з точністю до спряженості має одне точне незвідне F-зображення Δ:

$$a_1 \to diag[1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}], b \to \tilde{\sigma}.$$

Отже, група G містить незвідну підгрупу, спряжену з групою H_2. Тоді група G спряжена з H_2. Теорема доведена.

Лема 1.3. *Нехай не просте натуральне число n таке, що якщо q— найбільше просте число, що ділить n, то n не ділиться на q^2. Якщо в групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ існують незвідні p-підгрупи, то $n = p - 1$ або $p = q$ і $n = (p-1)p$.*

Доведення. Якщо в групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ існують незвідні p-підгрупи, то із [8] випливає, що $n = (p-1)p^r$. Якщо $r \neq 0$, то $p = q$ і $r = 1$. Лема доведена.

Теорема 1.3. *Нехай $n = 2^s p_1^{r_1} \cdots p_{t-1}^{r_{t-1}} p_t$ ($s \geq 1, r_i \geq 1, p_1, \ldots, p_t$ — різні непарні прості числа, $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$). В групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ існує мінімальна незвідна p-підгрупа H ($p \neq 2$) тоді і тільки тоді, коли $n = \varphi(p^r)$ ($r \leq 2$, φ — функція Ейлера). Якщо $r = 1$, то в $\mathrm{GL}(p-1), \mathbb{Q})$ міститься з точністю до спряженості єдина мінімальна незвідна підгрупа H порядку p. При $n = \varphi(p^2)$ ($p \neq 2$) в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ з точністю до спряженості містяться дві мінімальні незвідні p-підгрупи: циклічна група порядку p^2 і неабелева група H порядку p^3 з $expH = p$.*

Доведення слідує із теореми 1.2 і леми 1.3.

Лема 1.4 [11]. *Нехай H — скінченна нільпотентна підгрупа непарного порядку в групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ ($n > 1$). Група H буде незвідна тоді і тільки тоді, коли вона спряжена в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ з підгрупою $G = G_1 \otimes \cdots \otimes G_k$, де G_j — незвідна p_j-підгрупа в групі $\mathrm{GL}(n_j, \mathbb{Q})$, $G_1 \otimes G_2 = \{A_1 \otimes A_2 | A_i \in G_i\}$, $A_1 \otimes A_2$ — кронекерів добуток матриць A_1 і A_2 ($n = n_1 \ldots n_k, p_j$ — просте число, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$).*

Теорема 1.4. *Нехай $G = G_1 \otimes \cdots \otimes G_k$, де G_j — незвідна p_j-підгрупа в групі $\mathrm{GL}(n_j, \mathbb{Q})$ ($n = n_1 \ldots n_k$, p_j — непарне просте число, $p_j \neq p_i$ при $j \neq i$). Група G*

буде мінімальною незвідною нільпотентною підгрупою групи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *тоді і тільки тоді, коли група* G_j *буде мінімальною незвідною підгрупою в групі* $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{Q})$ $(j = 1,\ldots,k)$.

Доведення. Нехай E_t — одинична матриця порядку t і

$$\begin{aligned}&\bar{G}_1 = G_1 \otimes E_1 \otimes \cdots \otimes E_k,\\ &\bar{G}_j = E_{d_j} \otimes G_j \otimes E_{t_j} \quad (d_j = n_1 \cdots n_{j-1},\, t_j = n_{j+1} \cdots n_k).\end{aligned}$$

Тоді група G буде прямим добутком: $G = \bar{G}_1 \times \cdots \times \bar{G}_k$.

Використавши цей розклад, неважко довести необхідність умов теореми. Достатність доведемо від супротивного. Нехай H — незвідна підгрупа групи G. Так як $\bar{G}_j$ — силовська p_j-підгрупа групи G, то

$$H = \bar{H}_1 \times \cdots \times \bar{H}_k \quad (\bar{H}_1 \subseteq \bar{G}_1, \ldots, \bar{H}_k \subseteq \bar{G}_k).$$

Якщо $H \neq G$, то для деякого j група G_j буде містити власну незвідну підгрупу H_j, що неможливо. Теорема доведена.

Лема 1.5. *Нехай парне натуральне число* n $(n > 2)$ *не ділиться на* 4 *і в групі* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *існує скінченна незвідна нільпотентна підгрупа* G. *Тоді* G *буде* p*-групою* $(p > 2)$ *або прямим добутком* p*-групи на групу порядку* 2 *і, при цьому,* $n = (p-1)p^r$ $(r \geq 0)$.

Доведення. Група G є прямим добутком своїх силовських p_j-підгруп:

$$G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_s,$$

де G_0 — 2-група, G_1 — p_1-група, G_s — p_s-група ($p_1, \ldots, p_s$ — різні непарні прості числа). Припустимо спочатку, що група G з точністю до спряженості є тензорним добутком $G = H_0 \otimes H_1 \otimes \cdots \otimes H_s$, де H_0 — незвідна 2-підгрупа групи $\mathrm{GL}(n_0,\mathbb{Q})$, H_j — незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{Q})$ $(j = 1,\ldots,s)$. Тоді всі n_j — парні $(j \geq 1)$ і $n = n_0 n_1 \ldots n_s$. Звідси слідує, що $|H_0| \leq 2$ і $s = 1$, тобто G — p-група або добуток p-групи на групу порядку 2. Розглянемо тепер випадок, коли група G не буде тензорним добутком і покажемо, що цей випадок неможливий. Із леми 1.4 випливає, що група G парного порядку. Із теорії зображень скінченних груп відомо, що існують такі незвідні Q-зображення $\Gamma(\Gamma(G) = G)$, Γ_1 і Γ_2 груп G, G_0 і G_0^1 (G_0^1 — пряме доповнення G_0 в G) відповідно, що сума зображень $\Gamma + \Gamma$ буде зовнішнім тензорним добутком зображень Γ_1 і Γ_2. При цьому $2^t m = 2n$, де 2^t — степінь Γ_1 і $t \geq 2$, m — степінь Γ_2 і m — парне число. Це неможливо. Лема доведена.

Зауваження 1.1. Нехай в умові теореми 1.3 показник $s = 1$ (тобто n — парне число, що не ділиться на 4). Тоді ця теорема разом з лемою 1.5 дає описання з точністю до спряженості всіх мінімальних незвідних нільпотентних підгруп групи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$. Такими підгрупами можуть бути лише p-групи порядку p^r $(r \leq 3)$.

Наслідок 1.1. *Нехай парне натуральне число* n *вільне від квадратів. В групі* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ *існують скінченні незвідні нільпотентні підгрупи тоді і тільки тоді, коли* $n = (p-1)p^r$, *де* p — *просте число і* $r = 0$ *або* $r = 1$.

Теорема 1.5. *Нехай* $H_j(G_j)$ — *скінченна незвідна підгрупа групи* $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{Q})$ $(n_j > 1)$, $\Pi(H_j) = \Pi(G_j)$ ($\Pi(H_j)$ — *множина всіх простих чисел, що ділять порядок* $|H_j|$ *групи* H_j; $j = 1,2$), $(|H_1|, |H_2|) = 1$ *і* $(|G_1|,|G_2|) = 1$. *Підгрупи* $H = H_1 \otimes H_2$ *і* $G = G_1 \otimes G_2$ *групи* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ $(n = n_1 n_2)$ *спряжені тоді і тільки тоді, коли спряжені підгрупи* H_j *і* G_j *в групі* $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{Q})$ $(j = 1,2)$.

Доведення. Із спряженості груп H_j і G_j слідує спряженість груп H і G. Нехай T така матриця із групи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$, що $T^{-1}HT = G$. Представимо групи H і G у виді прямих добутків: $H = \bar{H}_1 \times \bar{H}_2$, $G = \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$ (див. доведення т. 1.4). Тоді

$$T^{-1}\bar{H}_jT \subseteq \bar{G}_j,\ T^{-1}HT = T^{-1}\bar{H}_1T \cdot T^{-1}\bar{H}_2T = \bar{G}_1\bar{G}_2.$$

Звідси слідує, що $T^{-1}\bar{H}_jT = \bar{G}_j$ $(j = 1, 2)$. Звідки, використавши незвідність групи H_j, неважко показати, що вона спряжена з групою G_j $(j = 1, 2)$. Теорема доведена.

Зауваження 1.2. Теореми 1.4–1.5 зводять описання з точністю до спряженості мінімальних незвідних нільпотентних підгруп непарного порядку в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ до відповідного описання мінімальних незвідних матричних p-груп над полем Q.

2. Індуковані зображення і незвідні матричні групи. Нехай P — поле із p елементів, H — скінченна група, L — лінійний простір над полем P, який є PH-модулем. Декартовий добуток $G = (L \times H)$ буде групою з груповою операцією

$$(x_1, h_1)(x_2, h_2) = (x_1 + h_1x_2, h_1h_2) \quad (x_j \in L;\ h_j \in H). \tag{1}$$

Підгрупа $(L, 1)$ (1 — одиниця групи H) — нормальна в групі G і факторгрупа $G/(L, 1)$ ізоморфна як підгрупі $(0, H)$ так і групі H. Ототожнимо підгрупу $(L, 1)$ з ізоморфною їй адитивною групою L_+ простору L.

Лінійний простір $L^* = Hom_P(L, P)$ є правим PH-модулем:

$$\varphi h(x) = \varphi(hx) \quad (\varphi \in L^*, h \in H, x \in L). \tag{2}$$

Нехай $F = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, де ε — первісний корінь степеня p із одиниці. Для функціонала $\varphi \in L^*$ визначимо лінійний характер $\hat{\varphi} : L_+ \to F$ групи L_+ над полем F, поклавши:

$$\hat{\varphi}(x) = \varepsilon^{\varphi(x)} \quad (x \in L). \tag{3}$$

Нехай $N = \{h \in H : \phi h = \phi\}$ — стабілізатор функціонала φ в групі H і $n = (H : N)$. Продовжимо характер $\hat{\varphi}$ на підгрупу $A = (L \times N) \subset G$, вважаючи, що він дорівнює одиниці на елементах групи $(0, N)$. Покажемо, що таке означення продовження є коректне. Дійсно, нехай $g_j = (x_j, 1)(0, h_j)$ $(x_j \in L, h_j \in N)$. Тоді, врахувавши (1) і рівність $\phi h = \phi$ $(h \in N)$, одержимо

$$\hat{\varphi}(g_1g_2) = \varepsilon^{\varphi(x_1 + h_1x_2)} = \varepsilon^{\varphi(x_1) + (\varphi h_1)(x_2)} = \varepsilon^{\varphi(x_1)}\varepsilon^{\varphi(x_2)} = \hat{\varphi}(g_1)\hat{\varphi}(g_2),$$

що завершує перевірку.

Нехай $\Gamma_\varphi = \hat{\varphi}^G$ — F-зображення групи G, яке індукується лінійним характером $\hat{\varphi}$ підгрупи A. Введемо ще в розгляд зображення ρ групи H підстановками номерів 1,2,...,n лівих суміжних класів групи H по підгрупі N, представниками яких нехай будуть елементи $g_1, \ldots, g_n$ групи H. Якщо $h \in H$, то підстановка $\rho(h)$ символ k переводить в символ j тоді і тільки тоді, коли $g_j^{-1}hg_k \in N$ $(k, j \in \{1, \ldots, n\})$.

Лема 2.1. *Нехай* $x \in L$. *Тоді* $\Gamma_\varphi((x, 1)) = diag[\varepsilon^{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}]$, *де* $\alpha_k = (\varphi g_k^{-1})(x) = \varphi(g_k^{-1}x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Нехай $h \in H$. *Тоді* $\Gamma_\varphi((0, h)) = \tilde{\rho}(h)$ — *матриця підстановки* $\rho(h)$.

Доведення. Позначимо $x' = (x, 1)$, $h' = (0, h)$. Тоді $g'_1, \ldots, g'_n$ —представники лівих суміжних класів групи G по підгрупі A. Нехай $M = FAe$ — одновимірний над полем F модуль, в якому група A діє по правилу:

$$(x'h')e = \hat{\varphi}(x'h')e = \varepsilon^{\varphi(x)}e \ \ (x \in L, h \in N).$$

Елементи $g'_1 \otimes e, \ldots, g'_n \otimes e$ утворюють F-базис індукованого FG-модуля M^G. Тоді

$$x'(g'_k \otimes e) = x'g'_k \otimes e = g'_k \otimes (g_k^{-1}x)'e = \varepsilon^{\alpha}(g'_k \otimes e) \;\; (\alpha = \varphi(g_k^{-1}x)\,);$$

$$h'(g'_k \otimes e) = (h_k^g)' \otimes e = g'_j \otimes \hat{\varphi}((g_j^{-1}hg_k)')e = g'_j \otimes e \;\; (j = \rho(h)(k)),$$

що доводить лему.

Лема 2.2. *Обмеження $\Gamma_\varphi|_L$ зображення Γ_φ групи G на підгрупу $(L, 1)$ буде сумою n різних лінійних над полем F характерів цієї підгрупи:*

$$\Gamma_\varphi|_L = \hat{\varphi}_1 + \cdots + \hat{\varphi}_n, де \varphi_1 = \varphi g_1^{-1}, \ldots, \varphi_n = \varphi g_n^{-1}.$$

Доведення. Із означення групи N витікає, що характери $\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n$ різні, а із леми 2.1 слідує, що їх сума співпадає з $\Gamma_\varphi|_L$. Це доводить лему.

Лема 2.3. *Група $\Gamma_\varphi(G)$ буде абсолютно незвідною підгрупою групи* $\mathrm{GL}(n, F)$. *Має місце ізоморфізм $\Gamma_\varphi(G) \cong G$ груп тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови*:

1) *ядро функціонала φ не містить ненульових PH-підмодулів*;

2) *підстановочне зображення ρ групи H є точним.*

Доведення. Незвідність зображення Γ_φ слідує із леми 2.2 і критерія Шоди незвідності індукованого зображення. Інше витікає із леми 2.1. Лема доведена.

Лема 2.4. *Нехай $\Gamma_\varphi(G) \cong G$. Нехай H_1 — така підгрупа групи H і N_1 — така підгрупа в групі $H_1 \cap N$, що $(H : N) = (H_1 : N_1)$. Припустимо, що в PH-модулі L існує PH_1-підмодуль L_1 такий, що, якщо $\phi_1 = \phi|L_1$ — обмеження функціонала ϕ на L_1 і $a_1, \ldots, a_n$ — система представників лівих суміжних класів групи H_1 по підгрупі N_1, то функціонали $\phi_1 a_1, \ldots, \phi_1 a_n$ попарно різні. Нехай $G_1 = (L_1 \times H_1)$. Тоді група $\Gamma_\varphi(G_1) = \Gamma\phi_1(G_1)$ буде незвідною підгрупою в групі $\Gamma_\varphi(G)$, ізоморфною групі G_1.*

Доведення. До груп G і G_1 застосуємо лему 2.1. Неважко бачити, що в цій лемі можна взяти $g_j = a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тоді $\Gamma_\varphi|G_1 = \Gamma\phi_1$. Звідси слідує доведення леми.

Теорема 2.1. *Нехай $\Gamma_\varphi(G) \cong G$. Якщо група $\Gamma_\varphi(G)$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи* $\mathrm{GL}(n, F)$*, тоді виконуються наступні умови*:

1) *група $\rho(H)$ є мінімальною транзитивною підгрупою симетричної групи S_n*;

2) *для будь-якого власного PH-підмодуля L_1 в L індекс $(H : N_1)$ стабілізатора N_1 функціонала $\phi_1 = \phi|L_1$ в H є менший ніж $n = (H : N)$.*

Якщо p не ділить порядок $|H|$ групи H і виконуються умови $1) - 2)$, то група $\Gamma_\varphi(G)$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(n, F)$.

Доведення. Нехай $\Gamma_\varphi(G)$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(n, F)$ і H_1 така підгрупа в H, що $\rho(H_1)$ — транзитивна підгрупа в $\rho(H)$. Візьмемо в лемі 2.4 за L_1 увесь модуль L. Тоді будуть виконуватись всі умови цієї леми, згідно з якою група $\Gamma_\varphi((L \times H_1))$ буде незвідною. Тоді $\Gamma_\varphi((L \times H_1)) = \Gamma_\varphi(G)$, звідки $H = H_1$, тобто $\rho(H)$ — мінімальна транзитивна підгрупа в групі S_n. Нехай умова 2) не виконується для PH-підмодуля L_1 в L і $G_1 = (L_1 \times H)$. Тоді $\Gamma_{\varphi_1}(G_1)$ буде незвідною підгрупою в групі $\Gamma_\varphi(G)$, тобто $\Gamma_{\varphi_1}(G_1) = \Gamma_\varphi(G)$ і, отже, $L_1 = L$.

Нехай p не ділить порядок $|H|$ групи H і виконуються умови 1)–2). Тоді будь-яка підгрупа в групі $G = (L \times H)$ буде мати вид $G_1 = (L_1 \times H_1)$, де H_1 — підгрупа в H, а L_1 — PH_1-підмодуль в L. Використовуючи умови 1)–2) і властивість транзитивності індукованих зображень, неважко показати, що група $\Gamma_\varphi(G)$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(n, F)$. Теорема доведена.

Теорема 2.2. *Нехай скінченна група H має точне зображення ρ підстановками на n символах таке, що $\rho(H)$ є мінімальна транзитивна підгрупа симетричної групи S_n. Тоді в групі $\mathrm{GL}(n, F)$ існує мінімальна незвідна підгрупа, яка буде ізоморфна розширенню елементарної абелевої p-групи порядку p^k $(k \leq n)$ з допомогою групи H.*

Доведення. Нехай $L = PH$ — групова алгебра групи H над полем P і $\varphi \in L^*$ такий функціонал, що $\phi(e) = 1$, $\phi(g) = 0$ ($g \neq e$, $g \in H$, e — одиниця групи H. Далі, нехай $N = \{h \in H : \rho(h)(1) = 1\}$ — підгрупа тих елементів із H, відповідні підстановки яких стабілізують символ 1. Тоді зображення ρ — це зображення групи H підстановками на множині всіх лівих суміжних класах групи H по підгрупі N і нехай $g_1, \ldots, g_n$ — представники цих класів. Нехай

$$v = \sum_{h \in N} h, \quad L_1 = PHv, \ \ \varphi_1 = \varphi | L_1.$$

Тоді N буде стабілізатором функціонала ϕ_1 в групі H і F-зображення $\Gamma\phi_1$ групи $G_1 = (L_1 \times H)$ буде точним, а група $\Gamma_{\varphi_1}(G_1)$ буде незвідною підгрупою в $\mathrm{GL}(n, F)$. Нехай G_2– така підгрупа в G_1, що $\Gamma_{\varphi_1}(G_2)$ буде мінімальною незвідною групою. Тоді $G_2 \subseteq (L_1, H_1)$, де H_1 — підгрупа в H. Нехай $G_3 = (L, H_1)$. Якщо $H_1 \neq H$, то $\rho(H_1)$ не транзитивна підгрупа в $\rho(H)$. Нехай $g_1, \ldots, g_s$ — представники суміжних класів, які переставляються групою H_1 транзитивно. Тоді $s < n$ і $\sum\limits_{j=1}^{s} F(g_j \otimes e)$ — власний FG_3-підмодуль в індукованому модулі M^G (див. лему 2.1, $G = G_1$). Значить, G_3— звідна група, що суперечить вибору G_2. Отже, $H_1 = H$. Тоді

$$H \cong G_3/(L_1, 1) \cong G_2/(G_2 \cap (L_1, 1)),$$

тобто, з точністю до ізоморфізму, групи G_2 і $\Gamma_{\varphi_1}(G_2)$ будуть розширеннями елементарної абелевої p-групи (підгрупи в L_1) з допомогою групи H. Теорема доведена.

Наслідок 2.1. *Нехай H — скінченна група порядку n. В групі $\mathrm{GL}(n, F)$ існує мінімальна незвідна підгрупа, яка ізоморфна розширенню елементарної абелевої p-групи з допомогою групи H.*

Наслідок 2.2. *Нехай H — група порядку p^k. В групі $\mathrm{GL}((p-1)p^k, \mathbb{Q})$ існує мінімальна незвідна p-підгрупа, яка ізоморфна розширенню елементарної абелевої p-групи з допомогою групи H.*

Наслідок 2.3. *Нехай H — група порядку n. В групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ існує мінімальна незвідна підгрупа, яка ізоморфна розширенню елементарної абелевої 2-групи з допомогою групи H.*

Доведення. Нехай $L = PH$ — групова алгебра групи H над полем P і $\varphi \in L^*$ такий функціонал, що $\phi(e) = 1$, $\phi(g) = 0$ ($g \neq e$, $g \in H$, e — одиниця групи H. Тоді стабілізатор функціонала ϕ в групі H буде одиничний, зображення ρ буде точним, $\rho(H) \cong H$ і $\rho(H)$ — мінімальна транзитивна підгрупа в групі S_n. Залишилось застосувати теорему 2.1. Наслідок 2.2 — це теорема 2.1 при $F = \mathbb{Q}$. Щоб одержати наслідок 2.1 потрібно в теоремі 2.1 замінити поле F на ізоморфне йому поле, що складається із матриць порядку $p-1$ над полем $\mathbb{Q}$.

3. Про незвідні p-підгрупи групи $\mathrm{GL}(n,F)$.

Лема 3.1. *Нехай G — мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(n, F)$. Тоді $n = p^r (r \geq 0)$. Якщо $n = 1$, то $G = \langle \varepsilon \rangle$. Нехай $n > 1$ і H — нормальна індекса p*

підгрупа групи $G : G = \langle H, c\rangle$ ($c^p \in H$). Тоді H — звідна і цілком звідна підгрупа в $\mathrm{GL}(n, F)$. Існує незвідне F-зображення Δ групи H таке, що група G буде спряжена в $\mathrm{GL}(n, F)$ з групою матриць, в якій елементи із H заміняться матрицями

$$diag[\Delta_1(h), \dots, \Delta_p(h)] \ (h \in H), \tag{4}$$

де $\Delta_j(h) = \Delta(c^{-(j-1)}hc^{j-1})$ ($j = 1, \dots, p$), а елемент c перейде в матрицю

$$diag[\alpha, E, \dots, E] \ (\tilde{\sigma} \otimes E), \tag{5}$$

де E — одиниця групи $\mathrm{GL}(np^{-1}, F)$, $\tilde{\sigma}$ — матриця циклу $\sigma = (1, 2, ..., p)$, $\alpha \in \Delta(H)$, при чому $diag[\alpha, \dots, \alpha] = d(h)$ для деякого $h \in H$.

Доведення. Будь-яка p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(n, F)$ є скінченною групою. Нехай L — незвідний FG-модуль, для якого група G є групою матриць лінійних операторів. Із теорії зображень скінченних груп слідує, що $n = dim_F L$ є дільником числа $(\mathbb{Q}(\zeta){:}F)|G|$, де ζ — первісний корінь степеня $|G|$ із одиниці. Так як $F = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, то $(\mathbb{Q}(\zeta) : F)$ є степенем числа p. Тоді n є також степенем числа p. Нехай $n > 1$. Згідно теореми Кліфорда, група H є звідна і цілком звідна. Нехай V — ненульовий FH-підмодуль в L і s — найменше натуральне число таке, що сума $M = \sum_{j=0}^{s-1} c^j V$ буде прямою сумою FH-підмодулів і при цьому $c^s V \subset M$. Тоді M буде FG-підмодулем в L і, отже, $M = L$ і $n = s \cdot (dim V)$. Звідси слідує, що $s = p$ і $L = V \oplus cV \oplus \dots \oplus c^{p-1}V$ — пряма сума FH-модулів. Нехай Δ — F-зображення групи H, що реалізується в FH-модулі V. Тоді Δ_j (де $\Delta_j(h) = \Delta(c^{-(j-1)}hc^{j-1})$) буде F-зображенням групи H, що реалізується в FH-модулі $c^{j-1}V$ ($j = 1, \dots, p$). Це доводить лему.

Лема 3.2. *Нехай $G = \langle H, c\rangle$ ($c^p \in H$) — p-підгрупа в $\mathrm{GL}(n, F)$, що породжується нормальною підгрупою H і елементом c. Припустимо, що існує таке незвідне F-зображення Δ групи H, що матриці із групи H мають вид* (4)*, а матриця c вид* (5)*. Якщо F-зображення $\Delta = \Delta_1$ і Δ_2 ($\Delta_2(h) = \Delta(c^{-1}hc)$ ($h \in H$)) нееквівалентні, то група G буде незвідною.*

Доведення. Нехай Δ^G — індуковане зображення. Тоді $G = \Delta^G(G)$ і обмеження зображення Δ^G на підгрупу H буде сумою попарно нееквілентних незвідних F-зображень цієї підгрупи. Звідси слідує незвідність F-зображення Δ^G групи G.

Теорема 3.1. *Нехай H — мінімальна незвідна p-підгрупа в $\mathrm{GL}(n, F)$ і G — підгрупа в $\mathrm{GL}(np, F)$, яка породжується матрицями*:

$$d(x) = diag[x, \dots, x] \ (x \in H), a = diag[E, \varepsilon E, \dots, \varepsilon^{p-1}E], \ b = \tilde{\sigma} \otimes E$$

(E — одиниця групи $\mathrm{GL}(n, F)$, $\tilde{\sigma}$ — матриця підстановки $\sigma = (12...p)$). Тоді G — мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(np, F)$.

Доведення. Перш за все відмітимо, що $b^{-1}ab = \varepsilon a$. Потрібно показати, що будь-яка незвідна підгрупа в групі G співпадає з цією групою. Нехай G_1 — підгрупа групи G, H_0 — підгрупа в H таких елементів x, що $d(x) \in G_1$. Тоді група G_1 буде породжуватись матрицями $d(x)$ ($x \in H_1$) і матрицями $x_1 a, x_2 b$ з деякими $x_1, x_2 \in H$. Відмітимо, що $x_1^p, x_2^p \in H_1$. Нехай $H_1 = \langle H_0, x_1\rangle$ і $H_2 = \langle H_1, x_2\rangle$. Тоді H_0 — нормальна підгрупа в групі H_2. Нехай H_1 — власна підгрупа в групі H. Тоді H_1 — звідна група. Це означає існування такої виродженої ненульової матриці α, яка комутує з кожною матрицею групи H_1. Тоді матриця

$$diag[\alpha, \ x_2 \alpha \, x_2^{-1}, \dots, x_2^{p-1} \alpha \, x_2^{-(p-1)}]$$

комутує із кожним елементом групи G_1 і, отже, група G_1 буде звідною. Таким чином для незвідності групи G_1 необхідно, щоб $H_1 = H$. Нехай ця умова виконується але, при цьому, H_0 — власна підгрупа в групі H_1. Можна вважати, що x_2 є деяким степенем x_1. Застосуємо лему 3.1 до групи $H_1 = H$ і її нормальної підгрупи H_0 (із заміною G на H_1 і H на H_0). Згідно цієї леми елементи групи H_1 будуть матрицями над кільцем $M(np^{-1}, F)$ матриць порядку np^{-1}, причому елементи із H_0 будуть діагональними матрицями (див. (4)), а матриця x_1 буде мати вид матриці (5). Тоді матриця $a_1 = diag[E_1, \varepsilon E_1, \ldots, \varepsilon^{p-1} E_1]$ (E_1 — одиниця в $M(np^{-1}, F)$) буде централізувати групу H_0 і , окрім цього, $x_1^{-1} a_1 x_1 = \varepsilon a_1$. Нехай $A = diag[E, a_1, \ldots, a_1^{p-1}]$. Тоді

$$A^{-1} G_1 A = \langle d(x) = diag[x, \ldots, x] \ (x \in H_0), \ d(x_1), d(x_1^s) d(a_1) b_1 \rangle,$$

де $b_1 = a^s b$ ($0 \leq s \leq p$). Легко бачити, що ненульова вироджена матриця $E + b_1 + \ldots + b_1^{p-1}$ централізує групу $A^{-1} G_1 A$ і тому ця група і група G_1 будуть звідними групами. Таким чином для незвідності групи G_1 необхідно, щоб виконувалась умова $H_0 = H$. Нехай ця умова виконується. Тоді для незвідності групи G_1 необхідно, щоб елементи a і b належали цій групі, тобто незвідною підгрупою в G може бути лише сама ця група. Незвідність групи G випливає із леми 3.2 (потрібно в цій лемі за підгрупу H взяти підгрупу в G, породжену всіма її матрицями $d(x)$ і матрицею a). Теорема доведена.

4. Мінімальні незвідні p-підгрупи групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$. Введемо наступні позначення для деяких елементів групи $\mathrm{GL}(p, F)$: $a_0 = diag[\varepsilon, \ldots, \varepsilon] = \varepsilon E$, $a_1 = diag[1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}]$, b — матриця циклу $\sigma = (1, 2, ..., p)$ (або супровідна матриця многочлена $x^p - 1$), a_j ($j = 2, \ldots, p-1$) — такі діагональні матриці, що $b^{-1} a_j b = a_j a_{j-1}$, $\tilde{\varepsilon}_1 = diag[\varepsilon, 1, \ldots, 1] b$ — супровідна матриця многочлена $x^p - \varepsilon$.

Лема 4.1. *Групами $H_{1j} = \langle a_j, b \rangle$ ($j = 1, \ldots, p-1$), $H_{2j} = \langle a_j, \tilde{\varepsilon}_1 \rangle$ ($j = 0, 1, \ldots, p-1$) вичерпуються всі незвідні p-підгрупи групи $\mathrm{GL}(p, F)$ з точністю до спряженості в цій групі. Група H_{20} (циклічна порядку p^2) і група H_{11} — мінімальні незвідні, а група H_{1p-1} — максимальна незвідна. Групи H_{ij} утворюють два субнормальні ряди:*

$$H_{11} \subset H_{12} \subset \ldots \subset H_{1p-1}; H_{20} \subset \ldots \subset H_{2p-1} = H_{1p-1},$$

фактори яких є циклічні групи порядку p. Групи H_{ij} ($(j, i) \neq (0, 2)$) — абсолютно незвідні.

Доведення слідує із описання мінімальних незвідних p-підгруп групи $\mathrm{GL}(p, F)$ (див. т.1.2) і описання силовської p-підгрупи цієї групи. Ця підгрупа є сплетенням групи $\langle \varepsilon \rangle$ і групи підстановок $\langle \sigma \rangle$.

Нехай далі G — мінімальна незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$.
Нехай H — нормальна індекса p підгрупа в групі G і $G = \langle H, c \rangle$ ($c^p \in H$). Застосуємо лему 3.1, яка приводить до двох випадків: 1) F-зображення Δ_1 і Δ_2 групи H еквівалентні і 2) ці зображення нееквівалентні. В першому випадку назвемо групу H однорідно звідною, в другому — неоднорідно звідною.

<u>*Перший випадок*</u>. Нехай $H_1 = \Delta_1(H)$. Тоді $H \cong \Delta_1(H)$ і $\Delta_1(H)$ — незвідна підгрупа в групі $\mathrm{GL}(p, F)$.

Лема 4.2. *Нехай $\gamma \in \mathrm{GL}(p, F)$ і $\gamma^{-1} \Delta_1(h) \gamma = \Delta_2(h)$ ($h \in H$). Тоді група G спряжена в групі $\mathrm{GL}(p^2, F)$ з групою, що породжується матрицями*

$$\langle d(h) = diag[h, \ldots, h] (h \in H_1), diag[\alpha, E, \ldots, E] d(\gamma)(b \otimes E) \rangle,$$

де матриця $\alpha = \Delta_1(c^p)$ централізує групу H_1 і $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, матриця γ нормалізує групу H_1 і $\gamma^p = E$ — одиниця групи $\mathrm{GL}(p, F)$.

Доведення. За матрицю спряженості потрібно взяти $diag[E, \gamma, \dots, \gamma^{p-1}]$ і використати лему 3.1.

Нехай H — абелева група. Тоді $H = C_{p^2} = \langle \tilde{\varepsilon}_1 \rangle$ — циклічна група порядку p^2 (див. лему 4.1).

Лема 4.3. *Нехай H — абелева група. Тоді $G = C_{p^3} = \langle \tilde{\varepsilon}_2 \rangle$ — циклічна порядку p^3, що породжується супровідною матрицею многочлена $x^{p^2} - \varepsilon$ і при $p = 2$ група G може також бути групою кватерніонів порядку* 8:

$$K_4 = \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{i} & 0 \\ 0 & -\tilde{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де

$$\tilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Існують 3 розширення циклічної групи порядку p^2 з допомогою групи порядку p. Це циклічна група порядку p^3 і два розщеплених розширення, жодне з яких немає незвідного степеня p^2 зображення над полем F. Окрім цього при $p = 2$ існує неабелеве нерозщеплене розширення – група кватерніонів.

Лема 4.4. *Нехай H — неабелева група. Тоді група G буде нерозщепленим розширенням абсолютно незвідної p-підгрупи в $\mathrm{GL}(p, F)$ з допомогою циклічної групи порядку p.*

Доведення. Нехай $\Delta_1(H) = H_{1j-1}$ або $\Delta_1(H) = H_{2j-1}$ $(j > 1)$. Будемо вважати, що група G співпадає з групою, твірні якої вказані в лемі 4.2. Тоді централізатор групи H в кільці $M(p^2, F)$ буде співпадати з кільцем $M(p, F) \otimes E$ (це витікає із абсолютної незвідності зображення $\Delta = \Delta_1$). Звідси слідує, що централізатор групи G в кільці $M(p^2, F)$ буде співпадати з кільцем многочленів $F(z)$ від матриці $z = diag[\alpha, E, \dots, E](b \otimes E)$(див. лему 4.2). Якщо $\alpha = E$, то в кільці $F(z)$ існують ненульові вироджені матриці, що суперечить незвідності групи G. Отже, можна вважати, що $\alpha = \varepsilon E$. Тоді $z^p = d(\alpha)$ — неодиничний елемент підгрупи H, що ізоморфна абсолютно незвідній підгрупі в $\mathrm{GL}(p, F)$ (див. лему 4.1). Це доводить лему.

Зауваження до доведення. Якщо в елементі $z\,\gamma \in \Delta_1(H)$, то можна γ замінити на E. Якщо $\gamma \notin \Delta_1(H)$, то $\gamma \in H_{1j}$ або $\gamma \in H_{2j}$. Тоді можна вважати, що $\gamma = a_j$.

Теорема 4.1. *Нехай G — мінімальна незвідна підгрупа групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$ і група G містить однорідно звідну нормальну підгрупу індекса p. Тоді група G спряжена в групі $\mathrm{GL}(p^2, F)$ із однією з наступних груп*:

1) *циклічною групою порядку* p^3;
2) $G_{11}(p) = \langle x_i = d(a_i)(i = 0, 1), y = d(b), z = \tilde{\varepsilon}_1 \otimes E \rangle$
   $(x_i^p = y^p = 1, z^p = x_0, x_i z = z x_i, y x_0 = x_0 y, y^{-1} x_1 y = x_0 x_1, zy = yz)$;
3) $G_{21}(p) = \langle x_i = d(a_i)(i = 0, 1), y = d(\tilde{\varepsilon}_1), z = \tilde{\varepsilon}_1 \otimes E \rangle (p > 2)$
   $(x_i^p = 1, y^p = z^p = x_0, x_i z = z x_i, y^{-1} x_1 y = x_0 x_1, zy = yz)$;
4) $G_{21}(2) = K_4$ — *група кватерніонів порядку* 8;
5) $G_{1j}(p) = \langle x_i = d(a_i)(i = 0, \dots j-1), y = d(b),$
   $z = d(a_j)(\tilde{\varepsilon}_1 \otimes E) \rangle (j = = 2, \dots, p-1; p > 2),$
   $(x_i^p = y^p = 1, z^p = x_0, x_i z = z x_i, y x_0 = x_0 y, y^{-1} x_i y = x_{i-1} x_i (i \geq 1), zy = y z x_{j-1})$;

6) $G_{2j}(p) = \langle x_i = d(a_i)(i = 0, \dots, j-1), y = d(\tilde{\varepsilon}_1),$
$z = d(a_j)(\tilde{\varepsilon}_1 \otimes E)\rangle (j = = 2, \dots, p-1; p > 2),$
$(x_i^p = 1, y^p = z^p = x_0, x_i z = z x_i, y^{-1} x_i y = x_{i-1} x_i (i \geq 1), zy = yzx_{j-1}).$

Число таких груп G рівно $2p - 1$.

Доведення. Кожна із цих груп є мінімальною незвідною підгрупою у відповідній групі $\mathrm{GL}(p^2, F)$. Доведемо це для групи G рівній $G_{1j}(p)$ або $G_{2j}(p)$. Нехай A — мінімальна незвідна підгрупа групи G. Для незвідності групи A необхідно існування в ній двох елементів виду $y_1 = yx$ та $z_1 = zx^1$, де $x, x^1 \in \langle x_0, \dots, x_{j-1}\rangle$. Розглядаючи послідовно комутатори $u_1 = [y_1, z_1,\ u_i = [y_1, u_{i-1}]$, неважко впевнитись у тому, що всі елементи x_i $(i = 0, \dots, j-1)$ належать групі A. Тоді $A = G$, що потрібно було довести. Із лем 4.2 - 4.4 і зауваження до леми 4.4 слідує, що група G спряжена в $\mathrm{GL}(p^2, F)$ з однією із перерахованих в теоремі груп. Теорема доведена.

Другий випадок (підгрупа H неоднорідна).

Лема 4.5. *Нехай H — незвідна p-підгрупа групи $\mathrm{GL}(n, F)$, яка має такий зовнішній автоморфізм θ порядка p по модулю підгрупи внутрішніх автоморфізмів, що F-зображення $\Delta : h \to h$ $(h \in H)$ та $\Delta_1 : h \to \theta(h)$ $(h \in H)$ не еквівалентні. Тоді група*

$$G = \langle diag[h, \theta(h), \dots, \theta^{p-1}(h)]\ (h \in H),\ diag[h_0, E, \dots, E]\ (b \otimes E)\rangle,$$

де h_0 той елемент із H, що породжує внутрішній автоморфізм θ^p, буде незвідною p-підгрупою групи $\mathrm{GL}(np, F)$.

Доведення слідує із леми 3.2.

Наслідок 4.1. *Наступні дві підгрупи групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$ будуть мінімальними незвідними*:

$G_3 = \langle x_0 = d(a_0), y_1 = d(b), y_2 = d(a_1) diag[E, b, \dots, bp-1], z = (b \otimes E)\rangle$
$(y_1^p = y_2^p = z_p = 1, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 z = z y_1, z^{-1} y_2 z = y_1 y_2),$
$G_4 = \langle x_0 = d(a_0), y_1 = d(b), y_2 = d(a_1) diag[E, b, \dots, b^{p-1}],$
$z = diag[\varepsilon E, E, \dots, E](b \otimes E)\rangle$
$(y_1^p = y_2^p = 1, z^p = x_0, y_1 y_2 = y_2 y_1, y_1 z = z y_1, z^{-1} y_2 z = y_1 y_2).$

Розглянемо нарешті випадок, коли в мінімальній незвідній підгрупі G групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$ нормальна індекса p підгрупа H не буде ізоморфна групі $\Delta(H)$, тобто коли ядро зображення Δ — неодинична група. Частина таких груп G описується теоремою 4.1 (твірну y підгрупи H замінити на z). Серед них будуть також дві групи G, що описуються теоремою 3.1. Ще частину ми опишемо з допомогою конструкції, розглянутої в п. 2, дещо змінивши її.

Нехай $p > 2$ і $A = \langle a, b\rangle$ — абелева група типу (p, p) з твірними a та b, L — PA-модуль з P-базисом e_1, e_2, e_3 і з відповідним P-зображенням:

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

групи A. Нехай $f : A \times A \to L$ — 2-коцикл групи A із значеннями в PA-модулі L.

Визначимо групу (L, A, f) як декартовий добуток $(L \times A)$ з наступною операцією в ньому:

$$(x_1, a_1)(x_2, a_2) = (x_1 + a_1(x_2) + f(a_1, a_2), a_1 a_2)(x_j \in L, a_j \in A).$$

Визначимо далі лінійний функціонал $\phi : L \to P$ рівністю:

$$\phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = \alpha_1 (\alpha_j \in P).$$

Нарешті визначимо лінійний характер $\chi : (L, 1) \to F$ $\chi((x, 1)) = \varepsilon\phi(x)(x \in L)$ підгрупи $(L, 1)$ групи (L, A, f). Нехай Γ — F-зображення групи (L, A, f), яке індукується F-зображенням χ підгрупи $(L, 1)$ і нехай $G_f = \Gamma((L, A, f))$.

Лема 4.6. *Групи G_f та (L, A, f) ізоморфні. Група G_f буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$. Група G_f ізоморфна розширенню елементарної абелевої групи типу (p, p, p) (це L_+) з допомогою групи A (із системою факторів f).*

Доведення. Використавши (6) неважко показати, що обмеження зображення Γ на підгрупу $(L, 1)$ буде сумою p^2 різних характерів цієї підгрупи. Звідси слідує незвідність зображення Γ. Неважко бачити, що це зображення є точним. Лема доведена.

Зауваження 4.1. Нехай $a^1 = (0, a)$, $b^1 = (0, b)$. В кожному класі 2-коциклів (як елементу групи $H^2(A, L)$) можна вибрати так коцикл f, що група (L, A, f) буде мати співвідношення: $(a^1)^p = (\alpha, 1)$, $(b^1)^p = (\beta, 1)$, $a^1 b^1 = (\gamma, 1) b^1 a^1$, де $\alpha, \beta \in \langle e_1 \rangle$, $\gamma \in \langle e_2, e_3 \rangle$.

Зауваження 4.2. Нехай σ — довільний автоморфізм групи A. Неважко пересвідчитись в тому, що спряжений PA-модуль L^σ буде ізоморфний PA-модулю L і нехай σ^1 — відповідний ізоморфізм. Визначимо 2-коцикл $f^\sigma : A \times A \to L$ рівністю $f^\sigma(x, y) = \sigma^1 f(\sigma(x), \sigma(y))$ $(x, y \in A)$. Групи Γ_f і Γf^σ будуть ізоморфні.

Нехай $B = \langle b \rangle$ — циклічна група порядку p^2 і L — PB-модуль з P-базисом $e_1, \ldots, e_{p+1}$ і наступним P-зображенням групи B : $b \to J_{p+1}(1)$ (клітка Жордана). Визначимо функціонал $\phi(\sum\limits_{j=1}^{p+1} \alpha_j e_j) = \alpha_1$ лінійного простору L і відповідний йому характер $\hat{\phi} : (L, 1) \to F$ підгрупи $(L, 1)$ групи $(L \times B)$ (див. п. 2).

Нехай Γ_ϕ — F-зображення групи $(L \times B)$, що індукується характером $\hat{\phi}$ підгрупи $(L, 1)$ цієї групи.

Лема 4.7. *Група $G_\phi = \Gamma_\phi((L \times B))$ буде мінімальною незвідною p-підгрупою групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$. Група G_ϕ ізоморфна групі $(L \times B)$ і є напівпрямим добутком елементарної абелевої групи порядку p^{p+1} та циклічної групи порядку p^2.*

Ця лема завершує розгляд 2-го випадку нормальної індекса p підгрупи в мінімальній незвідній p-підгрупі групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$.

Леми 4.3 – 4.7 разом з теоремою 4.1 дають описання з точністю до ізоморфізму всіх мінімальних незвідних p-підгруп групи $\mathrm{GL}(p^2, F)$. Нехай $\tilde{\varepsilon}$ — супровідна матриця полінома $\Phi_p(x)$ поділу круга на p частин і $\mathbb{Q}(\tilde{\varepsilon})$ — ізоморфне полю F, поле матриць порядку $p - 1$. Замінивши елементи поля F на елементи поля $\mathbb{Q}(\tilde{\varepsilon})$, ми одержимо описання мінімальних незвідних p-підгруп групи $\mathrm{GL}(\varphi(p^3), \mathbb{Q})$ (φ — функція Ейлера).

5. Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи GL(pq, $\mathbb{Q}$). Нехай p і q — різні прості числа. Зробимо деякі зауваження про мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$.

Лема 5.1. [5]. *Нехай pq — непарне число. Будь-яка мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$ буде розширенням елементарної абелевої 2-групи з допомогою мінімальної транзитивної розв'язної групи підстановок на pq символах.*

Введемо деякі позначення.

Z_q — поле із q елементів;

$Z_q(\zeta)$ — розширення поля Z_q з допомогою первісного кореня ζ степеня p із одиниці;

$m_{q,p} = (Z_q(\zeta) : Z_q)$;

$Z_2(\eta)$ — розширення поля Z_2 із двох елементів з допомогою первісного кореня η степеня q із одиниці;

$m_q = (Z_2(\eta) : Z_2)$;

$H_{q,p} = (Z_q(\zeta) \times \langle\zeta\rangle)$ — група з елементами $[x, \zeta^j]$ $(x \in Z_q(\zeta),\ j \in Z_p)$ і з операцією $[x, \zeta^j][y, \zeta^i] = [x + y, \zeta^{j+i}]$.

Нехай $A = (Z_q(\zeta) \times 1)$ — підгрупа групи $H_{q,p}$. Перетворимо поле $Z_2(\eta)$ в Z_2A-модуль, поклавши $[r + \omega, 1](x) = \eta^r x$, де $x \in Z_2(\eta), r + \omega \in Z_q + Z_q^1 = Z_q(\zeta), r \in Z_q$, $\omega \in Z_q^1$ (Z_q^1 — пряме доповнення підгрупи Z_q в групі $Z_q(\zeta)$). Нехай $L_{q,p} = (Z_2(\eta))^{H_{q,p}}$ — $Z_2H_{q,p}$-модуль, індукований Z_2A-модулем $Z_q(\eta)$ і $(L_{q,p} \times H_{q,p})$ — напівпрямий добуток 2-групи $L_{q,p}$ і групи $H_{q,p}$ (див. позначення п. 2). Неважко бачити, що

$$|(L_{q,p} \times H_{q,p})| = 2^{pm} pq^n, \text{ де } m = m_q,\ n = m_{q,p}.$$

Модуль $L_{q,p}$ представимо у виді прямої суми лінійних просторів

$$L_{q,p} = \oplus \sum_{i=0}^{p-1} [0, \zeta^i] \otimes Z_2(\eta)$$

і визначимо функціонал $\phi : (L_{qp} \times 1) \to Z_2$, поклавши

$$\phi([0, \zeta^i] \times x, 1) = \begin{cases} 0,\ (i = 1, \ldots, p-1); \\ \alpha_0\ (i = 0), \end{cases}$$

де $x = \alpha_0 + \alpha_1\eta + \ldots$ — елемент поля $Z_2(\eta)$, розкладений по степеневому Z_2-базису $1, \eta, \ldots$ цього поля ($\alpha_j \in Z_2$).

Неважко бачити, що підгрупа $B = (Z_q^1, 1)$ групи $H_{q,p}$ стабілізує функціонал ϕ. Це дає можливість визначити лінійний характер $\hat{\phi} : (L_{q,p} \times B) \to \mathbb{Q}$, поклавши

$$\hat{\phi}(ab) = (-1)^{\phi(a)}\ ((a \in (L_{q,p} \times 1), b \in B).$$

Лема 5.2. *Нехай Γ_ϕ — $\mathbb{Q}$-зображення групи $(L_{q,p} \times H_{q,p})$, що індукується лінійним характером $\hat{\phi}$ підгрупи $(L_{q,p} \times B)$ цієї групи. Тоді Γ_ϕ — точне і незвідне зображення степеня pq. Підгрупа $G_{q,p} = \Gamma_\phi((L_{q,p} \times H_{q,p}))$ групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$ буде мінімальною незвідною.*

Доведення аналогічне доведенню леми 2.1. Відмітимо лише, що за Q-базис індукованого модуля можна взяти pq елементів $[r, \zeta^j]$ $(r \in Z_q,\ j = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Нехай циклічна група $C_{pq} = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ порядку pq буде прямим добутком груп $\langle a\rangle$ і $\langle b\rangle$ порядків p і q відповідно і нехай $Z_2(\eta_p)$ — розширення поля Z_2 з допомогою неодиничного кореня η_p степеня p із одиниці. Введемо в розгляд два Z_2C_{pq}-модулі :

$$L_1 = Z_2(\eta_p) \oplus Z_2(\eta_q)(\,(ab)(x, y) = (\eta_p x, \eta_q y),\ (x \in Z_2(\eta_p),\ y \in Z_2(\eta_q)),$$

$$L_2 = Z_2(\eta_p\eta_q)((ab)(x) = \eta_p\eta_q x(x \in L_2)$$

і відповідні цим модулям дві групи $(L_1 \times C_{pq})$ і $(L_2 \times C_{pq})$. Відмітимо, що L_1 — пряма сума двох незвідних Z_2C_{pq}-модулів, а L_2 — незвідний Z_2C_{pq}-модуль.

Нехай $\phi_1 : L_1 \to Z_2, \phi_2 : L_2 \to Z_2$ — ненульові функціонали, причому $\phi_1 \neq 0$ на кожному прямому доданку і $\hat{\phi}_j : (L_j \times 1) \to \mathbb{Q}$ — лінійний характер підгрупи $(L_j \times 1)$ в $(L_j \times C_{pq})$, що відповідає функціоналу ϕ_j $(j = 1, 2)$.

Лема 5.3. *Групи* $G_{1,pq} = \Gamma\phi_1((L_1 \times Cpq))$ *і* $G_{2,pq} = \Gamma\phi_2((L_2 \times C_{pq}))$ *будуть мінімальними незвідними підгрупами групи* $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$*. Порядки цих підгруп рівні відповідно* $|G_{1,pq}| = 2^m pq$*, де* $m = m_p + m_q$*,* $|G_{2,pq}| = 2^n pq$*, де* $n = (L_2 : Z_2)$*.*

Доведення слідує із леми 2.1.

Теорема 5.1 (Д. О. Супруненко [5]). *Нехай* $q < p$ *і* q *не ділить* $p-1$*. З точністю до спряженості в групі* $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$ *існують* 4 *мінімальні незвідні розв'язні підгрупи. Це групи* $G_{q,p}$*,* $G_{p,q}$*,* $G_{1,pq}$*,* $G_{2,pq}$*.*

Групи, що приведені в теоремі, описані в лемах 5.2 – 5.3.

Нехай, як і раніше, $q < p$, але q ділить $p - 1$. Розглянемо питання про існування мінімальних незвідних розв'яних підгруп в $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$. При цьому будемо користуватись наступними позначеннями:

α — найбільше натуральне число таке, що q^α ділить $p - 1$;

m — показник, якому належить 2 по модулю p;

β — найбільше невід'ємне ціле число таке, що q^β ділить m;

ν — первісний корінь степеня q^α із одиниці по модулю p, вибраний так, що

$$\nu^{q^{\alpha-\beta}} \equiv 2^{\frac{m}{q^\beta}} (\operatorname{mod} p);$$

$T_\alpha = \langle a, b\rangle$ — група з твірними a та b і визначальними співвідношеннями:

$$a^p = b^{q^\alpha} = 1,\ bab^{-1} = a^\nu;$$

$T_j = \langle a,\, b_j = b^{q^{\alpha-j}}\rangle \subset T_\alpha \quad (j = 0, 1, \ldots, \alpha)$;

$T_{\alpha+1} = \langle a_1, \ldots, a_q, c\rangle \quad (a_1^p = \ldots = a^p = c^{q^{\alpha+1}} = 1, ca_jc^{-1} = a_{j+1}, ca_qc^{-1} = a_1^\nu)$; (будемо вважати, що група T_α міститься в групі $T_{\alpha+1}$: для цього покладемо $a = a_1$ і $b = c^q$).

Як витікає із результатів Т. І. Копилової [12], групи $T_1, \ldots, T_{\alpha+1}$ ізоморфні мінімальним транзитивним розв'язним групам підстановок степеня pq.

Нехай далі $Z_2(\eta)$ — розширення поля Z_2 з допомогою первісного кореня $\eta = \eta_p$ степеня p із одиниці, σ — такий автоморфізм поля $Z_2(\eta)$, що $\sigma(\eta) = 2^d$, де $d = 2^{\frac{m}{q^\beta}}$. Поле $Z_2(\eta)$ буде Z_2T_β-модулем: $a(x) = \eta x$, $b_\beta(x) = \sigma(x)$ $(x \in Z_2(\eta))$. Виберемо в $Z_2(\eta)$ степеневий Z_2-базис $1, \eta, \ldots, \eta^{m-1}$ і нехай $\tilde\eta, \tilde\sigma$ — матриці операторів a, σ. Якщо ототожнити кожний елемент поля $Z_2(\eta) = L$ з координатним стовпцем, то простір L^* лінійних (над Z_2) функціоналів цього поля стане m-вимірним векторним простором над полем Z_2. Нехай e^* — такий вектор із L^*, що $e^*\tilde\sigma = e^*$. Тоді $L^* = e^*Z_2T_\beta = e^*Z_2(\tilde\eta)$ і можна вважати, що $L^* = Z_2(\eta)$. Неважко впевнитись в тому, що

$$xa = x\eta, x(b_\beta)^{-1} = \sigma(x)(x \in L^* = Z_2(\eta)). \tag{7}$$

Введемо в розгляд Z_2T_j-модуль L_j для кожного $j = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$:

1) $L_j = L|T_j$ — обмеження Z_2T_β-модуля $L = Z_2(\eta)$ на підгрупу T_j групи T_β, де $j = 0, 1, \ldots, \beta$;

2) $L_j = L^{T_j}$ — індукований Z_2T_j-модуль для $j = \beta + 1, \ldots, \alpha$.

Нехай $T^1_{\alpha+1} = \langle a = a_1, a_2, \ldots, a_q, b = c^q\rangle$. Перетворимо Z_2T_α-модуль L_α в $Z_2T^1_{\alpha+1}$-модуль, поклавши додатково $a_2(x) = \ldots = a_q(x) = x(x \in L_\alpha)$. Тоді

3) $L_{\alpha+1} = L_\alpha^{T_{\alpha+1}}$ — індукований $Z_2T_{\alpha+1}$ -модуль.

Лема 5.4. Z_2T_j*-модуль* L_j *є незвідний і група* T_j *діє точно в ньому* $(j = 0, 1, \ldots \ldots, \alpha + 1)$*.*

Доведення легко витікає із добре відомих ознак незвідності індукованих модулів. Відмітимо, що L_β — поле.

Теорема 5.2. *Нехай q ділить $p-1$. Для кожної групи T_j ($1 \le j \le \alpha+1$, α — найбільше натуральне число таке, що q^α ділить $p-1$) існують такий Z_2T_j-модуль V_j і такий лінійний функціонал $\phi_j : V_j \to Z_2$, що індекс стабілізатора цього функціонала в групі T_j дорівнює pq. Нехай $(V_j \times T_j)$ — напівпрямий добуток адитивної групи простору V_j та групи T_j. Тоді група $\Gamma\phi_j((V_j \times T_j))$ буде мінімальною незвідною розв'язною підгрупою групи $\mathrm{GL}(pq,\mathbb{Q})$. Більш точніше результат приведено в таблиці:*

N	β, j	V	$\lvert\Gamma\phi_j((V_j \times T_j))\rvert$
1	$\beta > 0; j = 1, \ldots, \beta$, якщо $j = 1$, то $p \ne \frac{2^m-1}{d}$ $(d = 2^{\frac{m}{q}} - 1)$	L_j	$2^m q^j p$
2	$\beta > 0; j = 1$, $p = \frac{2^m-1}{d}$ $(d = 2^{\frac{m}{q}} - 1)$ і		
2a)	$q > 2$	$L_1 + L_1$	$2^{2m}qp$
2b)	$q = 2$	$V_0 + L_1$	$2^{3m}p$
3	$\alpha > \beta \ge 0, j = \beta + t (t = 1, \ldots, \alpha-\beta)$	L_j	$2^{mr}rp$, де $r = q^j$
4	$j = \alpha + 1$	L_j	$2^{mk}q^{\alpha+1}p$, де $k = q^{\alpha-\beta}$

Доведення. Перш за все відмітимо, що групи $(V_j \times T_j)$ і $\Gamma\phi_j((V_j \times T_j))$ ізоморфні. Формули для порядків витікають із рівності $|(V_j \times T_j)| = 2^n|T_j|$, де $n = dimV_j$. Основним в доведені є побудова функціонала ϕ_j. Розглянемо випадок $1 \le j \le \beta$. Твірний елемент b_j групи T_j діє в Z_2T_j- модулі $L_j = Z_2(\eta)$ як автоморфізм ω порядку q^j поля $Z_2(\eta)$. Візьмемо за функціонал ϕ_j такий елемент ϕ поля $Z_2(\eta) = L_j$ (див. (7)), що

$$\omega(\phi) \ne \phi \text{ і } \omega^q(\phi) = \phi. \tag{8}$$

Знайдемо умови, при яких в множині $U_j = \{\omega^s(\phi)\eta^t : s = 0, 1, \ldots, q-1; t = 0, 1, \ldots, p-1\}$ pq функціоналів простору L_j існують однакові функціонали. Це буде тоді і тільки тоді, коли для деякого s ($1 \le s < q$) і деякого $\lambda = \eta^t$ ($1 \le t < p$) буде виконуватись рівність $\omega^s(\phi) = \phi\lambda$. Тоді із (8) витікає, що

$$\phi = \omega^{sq}(\phi) = \phi\lambda^n, \tag{9}$$

де $n = 1 + r + \ldots + r^{q-1}$ і $r = 2^{\frac{sm}{q^j}}$. Рівність (9) буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли $n \equiv 0(modp)$, що еквівалентно умові $r^t \equiv 1(modp)$, де $t = 2^q$. Ця умова при $j > 1$ не виконується. Отже, при $j > 1$ множина $\phi Z_2T_j = U_j$ складається із pq різних функціоналів, тобто індекс стабілізатора функціонала $\phi_j = \phi$ в групі T_j дорівнює pq. Тоді група $\Gamma\phi_j((L_j \times T_j))$ буде незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(pq,\mathbb{Q})$. Мінімальність цієї групи слідує із незвідності L_j. Нехай тепер $j = 1$ і ω — автоморфізм порядку q поля $Z_2(\eta)$. Розглянемо підполе $A = \{x \in Z_2(\eta) : \omega(x) = x\}$ поля $Z_2(\eta)$. Множина $U_1 = \{x\eta^t : x \in A - 0\}$; $t = 0, \ldots, p-1\}$ містить $(2^{\frac{m}{q}} - 1)p$ елементів. Якщо це число не співпадає з числом ненульових елементів поля $Z_2(\eta)$ (тобто $p \ne \frac{2^m-1}{d} - 1)$ ($d = 2^{\frac{m}{q}} - 1$), то можна взяти $V_1 = L_1 = Z_2(\eta)$ і функціонал ϕ_1 вибрати серед тих елементів простору $L_1^* = Z_2(\eta)$, які не містяться в U_1. Індекс стабілізатора функціонала ϕ_1 в групі T_1 буде рівний pq і група $\Gamma\phi_1((V_1 \times T_1))$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(pq,\mathbb{Q})$.

Нехай $p = \frac{2^m-1}{d}$ $(d = 2^{\frac{m}{q}} - 1)$. Візьмемо $V_1 = L_1 \oplus L_1$ і $\phi_1 = (\phi, \phi\eta) : V_1 \to Z_2$, де ϕ — ненульовий функціонал із L_1^*. Зокрема, якщо $q = 2$, то можна взяти за $V_1 = V_0 \oplus L_1$, де V_0 — Z_2T_1-модуль з базисом e_1, e_2 таким, що

$$a(e_1) = e_1, a(e_2) = e_2, b_1(e_1) = e_1, b_1(e_2) = e_1 + e_2.$$

Нехай $\phi_0 = (1, 0) : V_0 \to Z_2$, $\phi \in L_1^*$ ($\phi \neq 0$) і $\phi_1 = (\phi_0, \phi)$ — відповідний функціонал із V_1^* . В обох випадках група $\Gamma\phi_1((V_1 \times T_1))$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\alpha > \beta$ і $j > \beta$. Z_2T_j-модуль L_j індукується Z_2T_{j-1}-модулем L_{j-1}: $L_j = 1 \otimes L_{j-1} \oplus b_j \otimes L_{j-1} \oplus \cdots \oplus b_j^{q-1} \otimes L_{j-1}$.

Зручно далі вважати елементами модуля L_j q-вимірні вектори-стовбчики, компоненти яких належать модулю L_{j-1}. Тоді елементами простору функціоналів L_j^* будуть q-вимірні вектори, компоненти яких належать L_{j-1}^*, а значення функціонала $\phi \in L_j^*$ на елементі $x \in L_j$ буде добуток $\phi \cdot x$ рядка на стовбчик. Нехай ϕ_{j-1}^1 такий функціонал із L_{j-1}^*, що $(\phi_{j-1}^1)b_{j-1} = \phi_{j-1}^1$. Визначимо два функціонала $\phi_j = (\phi_{j-1}^1, 0, \ldots, 0)$, $\phi_j^1 = (\phi_{j-1}^1, \ldots, \phi_{j-1}^1)$ із простору L_j^*. Неважко бачити, що $(\phi_j^1)b_j = \phi_j^1$, $(\phi_j b_{j-1} = \phi_j$. Тоді індекс стабілізатора функціонала ϕ_j в групі T_j буде рівний pq і група $\Gamma\phi_j((L_j \times T_j))$ буде мінімальною незвідною підгрупою групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$. Функціонал ϕ_j^1 використовується для побудови функціонала ϕ_{j+1} ($j \leq \alpha$). Теорема доведена.

Зауваження 5.1.До перерахованих в теоремі груп слід добавити групи $G_{p,q}$, $G_{1,pq}$, $G_{2,pq}$ (див. теорему 5.1). Але і після цього список мінімальних незвідних розв'язних підгруп в групі $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$ (навіть з точністю до ізоморфізму) буде неповним.

Зауваження 5.2. Для даної групи T_j нехай G — мінімальна незвідна підгрупа групи $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{Q})$, що є напівпрямим добутком елементарної абелевої 2-групи і групи T_j. Серед таких груп G група $\Gamma\phi_j((V_j \times T_j))$ має силовську 2-підгрупу з найменшим порядком.

1. *Платонов. В. П.* Конечность минимальных неприводимых линейных групп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – №5. – С. 96–97.
2. *Супруненко Д. А.* Минимальные неприводимые разрешимые линейные группы простой степени // Труды Моск. матем. об–ва. –1973. – **29**. – С. 223–234.
3. *Юферев В.П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – №2. – С. 5–10.
4. *Гудивок П.М., Капитонова Ю. В., Рудько В. П.* О конечных неприводимых подгруппах группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ // Кибернетика. – 1986. – №5. – С. 1–16.
5. *Супруненко Д. А.* Подпространства, порожденные строками циркулянтов, и минимальные неприводимые линейные группы // Матем. сб. – 1985. – **127**. – С. 45–54.
6. *Копылова Т.И.* О минимальных неприводимых разрешимых линейных группах // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – №6. – С. 20–22.
7. *Копылова Т.И.* Минимальные неприводимые нильпотентные линейные группы степени p^2 // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – №5. – С. 30–34.
8. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1963. – **27**. – С. 1031–1054.
9. *Супруненко Д. А.* О конечных неприводимых разрешимых линейных группах // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – №3. – С. 5–16.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen, Berlin: Springer, 1967.
11. *Roquette P.* Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotenter gruppen // Arch. der Math. – 1958. – **9**. – P. 241–250.
12. *Копылова Т. И.* Разрешимые минимальные транзитивные группы подстановок степени pq // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1985. – №6. – С. 54–60.

Одержано 24.09.2003