УДК 517.927

І. І. Король (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ІНТЕГРУВАННЯ ПАРАМЕТРИЗОВАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

A new scheme of successive approximations on the basis of the numerical-analytic method of the succesive approximations is suggested. It allows, for the non-linear ordinary differential equations with unknown parameters considered together with multipoint linear boundary conditions, to approximately construct the solutions.

На основі чисельно-аналітичного методу послідовних наближень запропоновано нову схему інтегрування систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з невідомими параметрами, підпорядкованих лінійним багатоточковим крайовим умовам.

При моделюванні реальних процесів часто зустрічаються крайові задачі для диференціальних рівнянь з параметрами. Саме тому таким задачам приділяється значна увага, застосовуються різноманітні методи дослідження умов існування та наближеної побудови їх розв'язків. Так, у працях А. М. Самойленка, Н. И. Ронто [1–3] для цього використано чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, у роботі Р. І. Собковича [4] цей метод поєднується з двосторонніми та проекційно-ітеративними методами, у монографії А. Ю. Лучки [5] розглядається проекційно-ітеративний метод. Для побудови наближених розв'язків застосовуються також функціонально-аналітичний метод [6], метод Ньютона [7], метод усереднення функціональних поправок [8]. Дво- та багатоточкові крайові задачі для скалярного диференціального рівняння з параметрами вивчалися також у роботах І. А. Гома [9] та Н. С. Курпеля, А. Г. Марусяка [10].

У даній статті на основі чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А. М. Самойленка розроблено алгоритм наближеного відшукання розв'язку нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, підпорядкованих лінійним багатоточковим крайовим умовам.

1. На початку розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь з невідомими параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\right), \tag{1}$$

підпорядковану нерозділеним двоточковим крайовим умовам

$$Ax\left(0\right) + Bx\left(T\right) = d, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $x, f, d \in \mathbb{R}^n$, A, B — сталі $n \times n$-вимірні матриці такі, що $\det\left(A + B\right) \neq 0$. При цьому певні фіксовані координати вектора $x\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right)$ у заданих точках $t = \tau_s$, $s = \overline{1, r}$, $r \leq p$, $\tau_s \in [0, T]$ приймають задані значення $z_1, \ldots, z_p$:

$$\begin{cases} x_{i_1}\left(\tau_{j_1}\right) = z_1, \\ \qquad \vdots \\ x_{i_p}\left(\tau_{j_p}\right) = z_p. \end{cases} \tag{3}$$

Дану крайову задачу будемо розглядати в області

$$(t, x, \Lambda) \in \Omega = [0, T] \times U \times B(\Lambda_0, \rho),$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, U — компактна область в $\mathbb{R}^n$, $B(\Lambda_0, \rho) = \{\Lambda : |\Lambda - \Lambda_0| \le \rho\}$, $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ — деяка фіксована точка.

Позначимо $y = (x, \Lambda)$, $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) = (A+B)^{-1} d$, $x_0^{(p)} = \left(x_{0,i_1}, \ldots, x_{0,i_p}\right)$, $z^{(p)} = (z_1, \ldots, z_p)$, C_1 — $p \times n$-вимірна матриця, яка складається з рядків матриці $(A+B)^{-1} A$ з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$,

$$F(y) = F(x, \Lambda) = \begin{pmatrix} F_1(x, \Lambda) \\ \vdots \\ F_p(x, \Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{T} f_{i_1}(s, x(s), \Lambda)\, ds \\ \vdots \\ \int\limits_{\tau_{j_p}}^{T} f_{i_p}(s, x(s), \Lambda)\, ds \end{pmatrix},$$

$$\Phi(y) = \Phi(x, \Lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \Lambda) \\ \vdots \\ \Phi_p(x, \Lambda) \end{pmatrix} = x_0^{(p)} - F(x, \Lambda) + C_1 \int\limits_0^T f(s, x(s), \Lambda)\, ds - z^{(p)},$$

$J = \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda} \Phi(x_0, \Lambda_0)\right)$ — матриця Якобі p-вимірної вектор-функції $\Phi(x, \Lambda)$ у точці $(x, \Lambda) = (x_0, \Lambda_0)$.

Під розв'язком задачі (1)-(3) на інтервалі $t \in [0, T]$ розуміємо неперервно-диференційовну вектор-функцію $x^*(t)$ і значення векторного параметра $\Lambda = \Lambda^*$, тобто сукупність $(x^*(t), \Lambda^*)$, яка задовольняє умовам:

1) $(t, x^*(t), \Lambda^*) \in [0, T] \times U \times B(\Lambda_0, \rho)$,
2) $\frac{d}{dt} x^*(t) \equiv f(t, x^*(t), \Lambda^*)$,
3) $Ax^*(0) + Bx^*(T) = d$,
4) $\Phi(x, \Lambda) = 0$.

Розв'язок задачі (1)–(3) будемо шукати наступним чином: знайдемо функцію $x^* = x^*(t, \Lambda)$, яка при всіх $\Lambda \in B(\Lambda_0, \rho)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) і задовольняє умовам (2), а також значення параметра $\Lambda = \Lambda^*$, яке є розв'язком алгебраїчної системи $\Phi(x^*, \Lambda) = 0$. При цьому для знаходження розв'язку задачі (1), (2) застосуємо модифікацію чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка [11], при якій не потрібно розв'язувати визначальне рівняння.

Наближений розв'язок задачі (1)–(3) будемо шукати у вигляді

$$x_0(t) = x_0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_{m+1}(t) = x_0 - \int\limits_t^T f(s, x_m(s), \Lambda_m)\, ds + (A+B)^{-1} A \int\limits_0^T f(s, x_m(s), \Lambda_m)\, ds\,, \tag{4}$$

$$\Lambda_{m+1} = \Lambda_m - J^{-1} \cdot \Phi(x_m, \Lambda_m). \tag{5}$$

Легко переконатися, що всі члени послідовності (4) задовольняють крайовим умовам (2).

Будемо вважати, що в області Ω виконуються наступні умови:

A) права частина рівняння (1) визначена, неперервна, обмежена вектор-функцією $m(t)$ і задовольняє умові Ліпшіца по x, Λ-:

$$|f(t,x,\Lambda)| \le m(t), \tag{6}$$

$$|f(t,x',\Lambda') - f(t,x'',\Lambda'')| \le K(t)\,|x'-x''| + L(t)\,|\Lambda'-\Lambda''|, \tag{7}$$

де $K(t) = \left\{k_{ij}(t) \ge 0,\ i,j=\overline{1,n}\right\},\ \ L(t) = \left\{l_{ij}(t) \ge 0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p}\right\}$,

$m(t) \ge 0, \quad m(t),\, K(t),\, L(t) \in L_1[0,T]$;

Тут і надалі $|x| = (|x_1|,\ldots,|x_n|)$, $|\Lambda| = (|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_p|)$, і всі нерівності між векторами розуміємо покомпонентно.

B) існують матриці P_1 та P_2 розмірності відповідно $p\times n$ і $p\times p$ з невід'ємними елементами такі, що

$$\left|J^{-1}\cdot\{\Phi(x',\Lambda) - \Phi(x'',\Lambda)\}\right| \le P_1|x'-x''|_0, \tag{8}$$

$$\left|(\Lambda'-\Lambda'') - J^{-1}\cdot\{\Phi(x,\Lambda') - \Phi(x,\Lambda'')\}\right| \le P_2|\Lambda'-\Lambda''|, \tag{9}$$

де $|x|_0 = \left(\max\limits_{t\in[0,T]}|x_1(t)|,\ \ldots\ ,\max\limits_{t\in[0,T]}|x_n(t)|\right)$;

C) β окіл точки x_0 міститься в області U:

$$B(x_0,\beta) \subseteq U,$$

$$\beta = \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|(A+B)^{-1}A\right|\cdot\int_0^t m(s)\,ds + \left|(A+B)^{-1}B\right|\cdot\int_t^T m(s)\,ds\right\},$$

і існує невід'ємний вектор N такий, що для довільних $x\in U$

$$\left|J^{-1}\cdot\Phi(x,\Lambda_0)\right| \le N, \quad N \le \rho - P_2\rho; \tag{10}$$

D) найбільше власне значення $(n+p)\times(n+p)$-вимірної матриці Q менше за одиницю, де

$$Q = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|(A+B)^{-1}A\right|\cdot\int_0^t K(s)\,ds + \left|(A+B)^{-1}B\right|\cdot\int_t^T K(s)\,ds\right\},$$

$$R_2 = \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|(A+B)^{-1}A\right|\cdot\int_0^t L(s)\,ds + \left|(A+B)^{-1}B\right|\cdot\int_t^T L(s)\,ds\right\}.$$

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі* (1)–(3) *виконані умови* A)–D).

Тоді послідовні наближення $y_m = (x_m(t), \Lambda_m)$ *вигляду* (4), (5) *рівномірно збігаються в області* Ω *до єдиного розв'язку* $y^* = (x^*(t), \Lambda^*)$ *задачі* (1)–(3), *причому при всіх натуральних* m *виконуються оцінки похибки*

$$|y^* - y_m| = \begin{pmatrix} |x^*(t) - x_m(t)| \\ |\Lambda^* - \Lambda_m| \end{pmatrix} \le Q^m (E-Q)^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ \rho \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Доведення. З (4), (5) на підставі (6) і умови C) слідує, що

$$\begin{gathered} |x_1(t) - x_0| = \left| -\int_t^T f(s, x_0, \Lambda_0)\, ds + (A+B)^{-1} A \cdot \int_0^T f(s, x_0, \Lambda_0)\, ds \right| = \\ = \left| (A+B)^{-1} A \cdot \int_0^t f(s, x_0, \Lambda_0)\, ds - (A+B)^{-1} B \cdot \int_t^T f(s, x_0, \Lambda_0)\, ds \right| \le \\ \le \left| (A+B)^{-1} A \right| \cdot \int_0^t m(s)\, ds + \left| (A+B)^{-1} B \right| \cdot \int_t^T m(s)\, ds \le \beta, \end{gathered} \tag{12}$$

$$|\Lambda_1 - \Lambda_0| \le \left| J^{-1} \cdot \Phi(x_0, \Lambda_0) \right| \le N \le \rho. \tag{13}$$

Отже, $(x_1(t), \Lambda_1) \in U \times B(\Lambda_0, \rho)$. За індукцією, враховуючи (9), (10), а також, що

$$|\Lambda_m - \Lambda_0| \le \left| \Lambda_{m-1} - \Lambda_0 - J^{-1} \cdot \{\Phi(x_m, \Lambda_m) - \Phi(x_m, \Lambda_0)\} \right| + \left| J^{-1} \cdot \Phi(x_m, \Lambda_0) \right|,$$

можемо показати, що при всіх $t \in [0, T]$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо $(x_m(t), \Lambda_m) \in \in U \times B(\Lambda_0, \rho)$.

Беручи до уваги (7), з (4) отримуємо

$$\begin{gathered} |x_{m+1}(t) - x_m(t)| = \\ = \left| (A+B)^{-1} A \cdot \int_0^t \{f(s, x_m(s), \Lambda_m) - f(s, x_{m-1}(s), \Lambda_{m-1})\} ds - \right. \\ \left. - (A+B)^{-1} B \cdot \int_t^T \{f(s, x_m(s), \Lambda_m) - f(s, x_{m-1}(s), \Lambda_{m-1})\} ds \right| \le \\ \le \left| (A+B)^{-1} A \right| \cdot \int_0^t \{K(s) |x_m(s) - x_{m-1}(s)| + L(s) |\Lambda_m - \Lambda_{m-1}|\} ds + \\ + \left| (A+B)^{-1} B \right| \cdot \int_t^T \{K(s) |x_m(s) - x_{m-1}(s)| + L(s) |\Lambda_m - \Lambda_{m-1}|\} ds. \end{gathered} \tag{14}$$

Враховуючи (12), (13), з (14) при $m = 1$ одержуємо

$$\begin{gathered} |x_2(t) - x_1(t)| \le \left| (A+B)^{-1} A \right| \cdot \int_0^t \{K(s)\beta + L(s)\rho\} ds + \\ + \left| (A+B)^{-1} B \right| \cdot \int_t^T \{K(s)\beta + L(s)\rho\} ds \le R_1 \beta + R_2 \rho, \end{gathered}$$

а з (8), (9) слідує, що

$$|\Lambda_2 - \Lambda_1| \leq |\Lambda_1 - \Lambda_0 - J^{-1} \cdot \{\Phi(x_1, \Lambda_1) - \Phi(x_0, \Lambda_0)\}| \leq$$

$$\leq |\Lambda_1 - \Lambda_0 - J^{-1} \cdot \{\Phi(x_1, \Lambda_1) - \Phi(x_1, \Lambda_0)\}| +$$

$$+|J^{-1} \cdot \{\Phi(x_1, \Lambda_0) - \Phi(x_0, \Lambda_0)\}| \leq P_1\beta + P_2\rho,$$

тобто

$$|y_2 - y_1| = \begin{pmatrix} |x_2(t) - x_1(t)| \\ |\Lambda_2 - \Lambda_1| \end{pmatrix} \leq Q \begin{pmatrix} \beta \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що при всіх $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$|y_{m+1} - y_m| = \begin{pmatrix} |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \\ |\Lambda_{m+1} - \Lambda_m| \end{pmatrix} \leq Q^m \begin{pmatrix} \beta \\ \rho \end{pmatrix},$$

а тому маємо, що

$$|y_{m+j} - y_m| \leq \sum_{i=0}^{j-1} |y_{m+i+1} - y_{m+i}| \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \rho \end{pmatrix} \leq Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (15)$$

З умови D) слідує, що $\sum\limits_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}$, $\lim\limits_{m\to\infty} Q^m = 0$, отже, при $m \to \infty$ послідовність $y_m = (x_m(t), \ \Lambda_m)$ рівномірно збігається до єдиної граничної точки $y^* = (x^*(t), \ \Lambda^*)$:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x^*(t), \quad \lim_{m\to\infty} \Lambda_m = \Lambda^*,$$

і при цьому з (15) одержуємо оцінку (11). Переходячи в (4), (5) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що $y^* = (x^*(t), \ \Lambda^*)$ є розв'язком крайової задачі (1)–(3). Теорему доведено.

2. Даний алгоритм може бути застосований також і у випадку, коли замість умови (2) маємо лінійну багатоточкову крайову умову

$$\sum_{k=0}^{q} A_k x(t_k) = d, \quad (16)$$

де $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = T$, $q \geq 1$, A_k, $k = \overline{0,q}$ — сталі $n \times n$-вимірні матриці такі, що $\det\left(\sum\limits_{k=0}^{q} A_k\right) \neq 0$.

Припустимо при цьому, що крім A) крайова задача (1), (16), (3) в області Ω задовольняє наступним умовам:

B1) існують відповідно $p \times n$- та $p \times p$-вимірні матриці $\tilde{P}_1$ та $\tilde{P}_2$ з невід'ємними елементами такі, що

$$\left|\tilde{J}^{-1} \cdot \left\{\tilde{\Phi}(x', \Lambda) - \tilde{\Phi}(x'', \Lambda)\right\}\right| \leq \tilde{P}_1 |x' - x''|_0,$$

$$\left|(\Lambda' - \Lambda'') - \tilde{J}^{-1} \cdot \left\{\tilde{\Phi}(x, \Lambda') - \tilde{\Phi}(x, \Lambda'')\right\}\right| \leq \tilde{P}_2 |\Lambda' - \Lambda''|,$$

де

$$\tilde{\Phi}(y) = \tilde{\Phi}(x,\Lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(x,\Lambda) \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_p(x,\Lambda) \end{pmatrix} = \tilde{x}_0^{(p)} - F(x,\Lambda) + \sum_{k=0}^{q} G_k \int_{t_k}^{T} f(s, x(s), \Lambda)\, ds - z^{(p)},$$

$\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_{0,1}, \dots, \tilde{x}_{0,n}) = G^{-1}d$, $G = \sum\limits_{k=0}^{q} A_k$, $\tilde{x}_0^{(p)} = \left(\tilde{x}_{0,i_1}, \dots, \tilde{x}_{0,i_p}\right)$, G_k, $k = \overline{0,q}$ — $p \times n$-вимірні матриці, які складаються з рядків із номерами $i_1, \dots, i_p$ відповідних матриць $G^{-1}A_k$, $\tilde{J} = \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda}\tilde{\Phi}(\tilde{x}_0, \Lambda_0)\right)$;

C1) точка $\tilde{x}_0$ разом із своїм $\tilde{\beta}$ околом лежить в області U, де

$$\tilde{\beta} = \int_0^T m(s)\, ds + \sum_{k=0}^{q} \left(\left|G^{-1}A_k\right| \cdot \int_{t_k}^{T} m(s)\, ds \right);$$

і існує вектор $\tilde{N}$ з невід'ємними елементами такий, що при всіх $x \in U$

$$\left|\tilde{J}^{-1} \cdot \tilde{\Phi}(x, \Lambda_0)\right| \le \tilde{N}, \quad \tilde{N} \le \rho - \tilde{P}_2 \rho;$$

D1) найбільше власне значення матриці $\tilde{Q}$ менше за одиницю, де

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_1 & \tilde{R}_2 \\ \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_1 = \int_0^T K(s)\, ds + \sum_{k=0}^{q} \left(\left|G^{-1}A_k\right| \cdot \int_{t_k}^{T} K(s)\, ds \right),$$

$$\tilde{R}_2 = \int_0^T L(s)\, ds + \sum_{k=0}^{q} \left(\left|G^{-1}A_k\right| \cdot \int_{t_k}^{T} L(s)\, ds \right).$$

Для крайової задачі (1), (16), (3) має місце аналогічний результат.

Теорема 2. *Нехай для крайової задачі* (1), (16), (3) *виконані умови* А), B1)–D1). *Тоді послідовні наближення* $\tilde{y}_m = \left(\tilde{x}_m(t),\ \tilde{\Lambda}_m\right)$ *вигляду*

$$\tilde{x}_0(t) = \tilde{x}_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{x}_{m+1}(t) = \tilde{x}_0 - \int_t^T f\left(s, \tilde{x}_m(s), \tilde{\Lambda}_m\right) ds + G^{-1} \sum_{k=0}^{q} A_k \cdot \int_{t_k}^{T} f\left(s, \tilde{x}_m(s), \tilde{\Lambda}_m\right) ds,$$

$$\tilde{\Lambda}_{m+1} = \tilde{\Lambda}_m - \tilde{J}^{-1} \cdot \tilde{\Phi}\left(\tilde{x}_m, \tilde{\Lambda}_m\right),$$

рівномірно збігаються в області Ω *до єдиного розв'язку* $\tilde{y}^* = \left\{\tilde{x}^*(t), \tilde{\Lambda}^*\right\}$ *задачі* (1), (16), (3), *причому при всіх натуральних* m *виконуються оцінки*

$$|\tilde{y}^* - \tilde{y}_m| = \begin{pmatrix} |\tilde{x}^*(t) - \tilde{x}_m(t)| \\ \left|\tilde{\Lambda}^* - \tilde{\Lambda}_m\right| \end{pmatrix} \le \tilde{Q}^m \left(E - \tilde{Q}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\beta} \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Доведення. Проводиться аналогічно до доведення теореми 1.

3. Для ілюстрації розробленого алгоритму розглянемо наступну параметризовану крайову задачу.

Приклад. Нехай на відрізку $t \in [0,1]$ потрібно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{4}{5}t\lambda + \frac{1}{5}x_1^2 - \frac{1}{5}tx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{5}t\lambda^2 x_1 - \frac{1}{8}tx_2^2 + \frac{2}{5}\lambda, \end{cases} \tag{17}$$

підпорядкованої крайовим умовам

$$x(0) + 3x(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} \tag{18}$$

і додатковій умові

$$x_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{160}. \tag{19}$$

Неважко переконатися, що в області

$$t \in [0,1], \quad |x_1| \le 1, \quad |x_2| \le 1, \quad |\lambda| \le 1 \tag{20}$$

для задачі (17)–(19) виконуються припущення A)–D). Справді, права частина системи (17) задовольняє умовам обмеженості (6) і Ліпшіца (7), де

$$m(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{5} \\ \frac{13}{40}t + \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad K(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{1}{5}t & \frac{1}{5}t \\ \frac{1}{5}t & \frac{1}{4}t \end{pmatrix}, \quad L(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}t \\ \frac{2}{5}t + \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

При цьому

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{40} \\ \frac{3}{40} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{21}{40} \\ \frac{27}{64} \end{pmatrix}, \quad N = \frac{85}{88}, \quad J = -\frac{11}{40},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{40} \\ \frac{3}{40} & \frac{3}{32} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \left(\frac{103}{88}, \ \frac{23}{88} \right), \quad P_2 = 0,$$

матриця Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{40} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{40} & \frac{3}{32} & \frac{9}{20} \\ \frac{103}{88} & \frac{23}{88} & 0 \end{pmatrix},$$

а її найбільше власне значення складає 0.9122133563, тобто в області (20) умови A)–D) для задачі (17)–(19) виконуються і для знаходження її розв'язку можемо застосувати розроблений алгоритм.

Нульовим наближенням до розв'язку є

$$x_{0,1}(t) = \frac{3}{40}, \quad x_{0,2}(t) = \frac{3}{40}, \quad \lambda_0 = 0.$$

Згідно (4), (5), наступні послідовні наближення шукаються за формулами

$$x_{m+1,1}(t) = \tfrac{3}{40} - \int_t^T \left\{ \tfrac{4}{5}s \cdot \lambda_m + \tfrac{1}{5}x_{m,1}(s)^2 - \tfrac{1}{5}s \cdot x_{m,1}(s) \cdot x_{m,2}(s) \right\} ds +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_0^T \left\{ \tfrac{4}{5}s \cdot \lambda_m + \tfrac{1}{5}x_{m,1}(s)^2 - \tfrac{1}{5}s \cdot x_{m,1}(s) \cdot x_{m,2}(s) \right\} ds \ , \tag{21}$$

$$x_{m+1,2}(t) = \tfrac{3}{40} - \int_t^T \left\{ \tfrac{1}{5}s \cdot \lambda_m^2 \cdot x_{m,1}(s) - \tfrac{1}{8}s \cdot x_{m,2}^2 + \tfrac{2}{5}\lambda_m \right\} +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_0^T \left\{ \tfrac{1}{5}s \cdot \lambda_m^2 \cdot x_{m,1}(s) - \tfrac{1}{8}s \cdot x_{m,2}^2 + \tfrac{2}{5}\lambda_m \right\} ds \ ,$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m + \tfrac{40}{11} \cdot \Bigg(\tfrac{11}{160} - \int_{\frac{1}{4}}^T \left\{ \tfrac{4}{5}s \cdot \lambda_m + \tfrac{1}{5}x_{m,1}(s)^2 - \tfrac{1}{5}s \cdot x_{m,1}(s) \cdot x_{m,2}(s) \right\} ds + \tag{22}$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_0^T \left\{ \tfrac{4}{5}s \cdot \lambda_m + \tfrac{1}{5}x_{m,1}(s)^2 - \tfrac{1}{5}s \cdot x_{m,1}(s) \cdot x_{m,2}(s) \right\} ds \Bigg).$$

Три перші наближення, знайдені за формулами (21), (22), мають вигляд

$$x_{1,1}(t) = \tfrac{4773}{64000} + \tfrac{9}{8000}t - \tfrac{9}{16000}t^2,$$

$$x_{1,2}(t) = \tfrac{7707}{102400} - \tfrac{9}{25600}t^2,$$

$$\lambda_1 = 0,2493607954,$$

$$x_{2,1}(t) = -2,2830587314 \cdot 10^{-4} + 1,1123793457 \cdot 10^{-3}t +$$

$$+9,9199795907 \cdot 10^{-2}t^2 - 1,1153759765 \cdot 10^{-5}t^3 + 3,3644531250 \cdot 10^{-6}t^4 +$$

$$+2,8476562500 \cdot 10^{-8}t^5 - 6,5917968750 \cdot 10^{-9}t^6,$$

$$x_{2,2}(t) = 1,0606642460 \cdot 10^{-4} + 9,9744318182 \cdot 10^{-2}t + 1,0969402555 \cdot 10^{-4}t^2 +$$

$$+4,6635604732 \cdot 10^{-6}t^3 - 9,5092387239 \cdot 10^{-8}t^4 - 2,5749206543 \cdot 10^{-9}t^6,$$

$$\lambda_2 = 2,4993593958,$$

$$x_{3,1}(t) = 1,9148496702 \cdot 10^{-4} + 1,0424714343 \cdot 10^{-8}t + 9,9743709954 \cdot 10^{-2}t^2 -$$

$$-1,4269451119 \cdot 10^{-6}t^3 + 4,9625228894 \cdot 10^{-6}t^4 - 2,1665049123 \cdot 10^{-6}t^5 -$$

$$-3,9933654296 \cdot 10^{-7}t^6 - 3,6910335582 \cdot 10^{-9}t^7 + 2,9589644589 \cdot 10^{-10}t^8 -$$

$$-1,4592035768 \cdot 10^{-11}t^9 + 5,1336095717 \cdot 10^{-12}t^{10} - 7,0573758746 \cdot 10^{-16}t^{11} +$$

$$+1,2768244516 \cdot 10^{-16}t^{12} + 1,7965642306 \cdot 10^{-18}t^{13} - 2,4247648461 \cdot 10^{-19}t^{14},$$

$$x_{3,2}(t) = 1,9275870237 \cdot 10^{-4} + 9,9743758325 \cdot 10^{-2} t - 1,4203115217 \cdot 10^{-6} t^2 +$$

$$+3,7295642773 \cdot 10^{-6} t^3 - 2,4920561832 \cdot 10^{-6} t^4 - 5,7483420131 \cdot 10^{-7} t^5 -$$

$$-1,2658679813 \cdot 10^{-8} t^6 + 3,7106789998 \cdot 10^{-10} t^7 - 1,0252285422 \cdot 10^{-11} t^8 +$$

$$+7,1465881704 \cdot 10^{-12} t^9 + 6,9483032747 \cdot 10^{-15} t^{10} + 2,7291586784 \cdot 10^{-16} t^{11} -$$

$$-5,1011531660 \cdot 10^{-18} t^{12} - 5,9198360499 \cdot 10^{-20} t^{14},$$

$$\lambda_3 = 2,4999744789.$$

Точним розв'язком задачі (17)-(19) є $x_1^*(t) = \frac{1}{10}t^2$, $x_2^*(t) = \frac{1}{10}t$, $\lambda^* = \frac{1}{4}$. Похибки наближених розв'язків, знайдених згідно (21), (22), наведені в таблиці 1. З неї бачимо, що на кожному кроці похибка зменшується і послідовні наближення швидко збігаються до точного розв'язку.

Таблиця 1.

Порядок наближення (m)	Похибка першої координати $\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x_{m,1}(t) - x_1^*(t)\rvert$	Похибка другої координати $\max\limits_{t\in[0,1]} \lvert x_{m,2}(t) - x_2^*(t)\rvert$	Похибка λ $\lvert\lambda_m - \lambda^*\rvert$
1	$7,45782 \cdot 10^{-2}$	$7,52637 \cdot 10^{-2}$	$6,39205 \cdot 10^{-3}$
2	$2,28306 \cdot 10^{-4}$	$1,06067 \cdot 10^{-4}$	$6,40605 \cdot 10^{-4}$
3	$1,91485 \cdot 10^{-4}$	$1,92759 \cdot 10^{-4}$	$2,55222 \cdot 10^{-6}$
4	$5,25498 \cdot 10^{-7}$	$4,73865 \cdot 10^{-7}$	$8,08743 \cdot 10^{-7}$
5	$2.41671 \cdot 10^{-7}$	$2,42945 \cdot 10^{-7}$	$3,29569 \cdot 10^{-9}$
6	$6,87654 \cdot 10^{-10}$	$6,20051 \cdot 10^{-10}$	$1,02045 \cdot 10^{-9}$
7	$3,04908 \cdot 10^{-10}$	$3,06507 \cdot 10^{-10}$	$4,2362 \cdot 10^{-12}$

1. *Самойленко А.М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наука, 1992. – 279 с.
2. *Ronto M., Samoilenko A.M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore: World Scientific, 2000. – 455 p.
3. *Ronto M.* On numerical-analytic methods for BVPs with parameters // Publ. Univ. of Miskolc, Series D. Natural Sciences. – 1995. – **36**, No. 1. – P. 125-140.
4. *Собкович Р.И.* Численно-аналитический метод исследования краевых задач с управлениями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1983. – 161 с.
5. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. – К.: Наукова думка, 1993. – 288 с.
6. *Кибенко А.В.* Функция Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1963. – № 3. – С. 309–314.
7. *Хосабеков О.* Достаточные условия сходимости метода Ньютона- Канторовича для краевой задачи с параметром // Докл. АН ТаджССР. – 1973. – №8. – С. 14–17.
8. *Ахмедов К. Т., Сваричевская Н. А., Ягубов М. А.* Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок // Докл. АН АзССР. – 1973. – **29**, №8. – С. 3–7.
9. *Гома И. А.* Метод последовательных приближений в двухточечной задаче с параметром // Укр. мат. журн. – 1977. – **47**, №6. – С. 800–806.
10. *Курпель Н. С., Марусяк А. Г.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения с параметрами // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, №2. – С. 223–226.
11. *Трофимчук Е. П., Коваленко А. В.* Численно-аналитический метод А. М.Самойленко без определяющего уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, №1. – С. 138–140.

Одержано 24.09.2003