УДК 517.946

**В. В. Маринець, А. В. Добридень** (Ужгородський нац. ун-т)

# УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ГУРСА

The characteristic initial value problem for the nonlinear differential equation has been researched and one modification of two-sided method has been constructed. The theorems of existence and uniquness of solution, comparison have been proved.

Для характеристичної задачі Коші у випадку квазілінійного диференціального рівняння будується та досліджується одна модифікація монотонного двостороннього методу. Доводяться теореми існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі, порівняння, одержана достатня умова його знакосталості.

При дослідженні процесів сорбції та десорбції газу, сушки, коливання газу в трубі з рухомою границею, прогрівання труби потоком гарячої води та ін. приходять до задачі Гурса. У випадку лінійного рівняння [1] за допомогою методу Рімана в деяких випадках можна знайти точний розв'язок цієї задачі. Задача Гурса для квазілінійних рівнянь з відхиляючим аргументом вищих порядків у випадку області $B_2$ розглянута в [2]; для квазілінійного рівняння другого порядку в областях $B_2$ та $B_4$ — в [3]. В даній роботі результати наведених статей узагальнюються на більш широкий клас задач.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння в частинних похідних гіперболічного типу вигляду

$$U_{xy}(x,y) = f(x,y,U(x,y),U_x(x,y),U_y(x,y)) \equiv f[U(x,y)], \tag{1}$$

де $U(x,y)$ — шукана функція, $(x,y) \in \bar{B}$, $\bar{B} = \{(x,y)|x \in [0,1], y \in [0,1]\}$, $f : \bar{D} \to R$, $\bar{D} \in R^5$.

Постановка задачі: в просторі функцій $C^2(B) \cap C(\bar{B})$ знайти розв'язок диференціального рівняння (1), що задовольняє умови [4]

$$U(x_0,y) = \varphi(y), y \in [0,1], U(x,y_0) = \phi(x), x \in [0,1], \tag{2}$$

$$\varphi(y_0) = \phi(x_0). \tag{3}$$

$(x_0,y_0) \in B$ — деяка фіксована точка, $\varphi(x)$, $\phi(y) \in C^1([0,1])$ — відомі функції. Розв'язок задачі (1)–(3), який належить простору $C^2(B) \cap C(\bar{B})$, будемо називати регулярним.

Позначимо $\bar{B}_1 = \{(x,y)|x \in [0,x_0], y \in [0,y_0]\}$, $\bar{B}_2 = \{(x,y)|x \in [0,x_0], y \in [y_0,1]\}$, $\bar{B}_3 = \{(x,y)|x \in [x_0,1], y \in [y_0,1]\}$, $\bar{B}_4 = \{(x,y)|x \in [x_0,1], y \in [0,y_0]\}$, $W(x,y) = Z(x,y) - V(x,y)$.

**Означення**. Довільні з простору $C^2(B) \cap C(\bar{B})$ функції $Z(x,y)$,$V(x,y)$, які задовольняють умови (2) і нерівності

$$\begin{aligned} &W(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4),\\ &W_x(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),\\ &W_y(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2), \end{aligned} \tag{4}$$

називаються функціями порівняння задачі (1)–(3).

Нехай права частина рівняння (1) $f[U(x,y)] \in C_1(\bar{D})$, де $C_1(\bar{D})$ — клас функцій (див. [5]), які задовольняють наступні умови:

1) $f[U(x,y)] \in C(\bar{D})$;

2) функцію $f[U(x,y)]$ можна подати у вигляді $f[U(x,y)] \equiv [f[U^+(x,y);\, U^-(x,y)]$, $f : D_1 \to R$, $D_1 \in R^8$ так, що для довільних із $\bar{D}_1$ функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, які належать простору $C^2(B) \cap C(\bar{B})$ і задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} Z(x,y) \geq (\leq) Z^*(x,y), V(x,y) \leq (\geq) V^*(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3(\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4), \\ Z_x(x,y) \geq (\leq) Z_x^*(x,y), V_x(x,y) \leq (\geq) V_x^*(x,y), (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4), \\ Z_y(x,y) \geq (\leq) Z_y^*(x,y), V_y(x,y) \leq (\geq) V_y^*(x,y), (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2), \end{gathered} \tag{5}$$

виконується нерівність

$$f[Z(x,y), V(x,y)] \geq f[Z^*(x,y), V^*(x,y)]. \tag{6}$$

3) функція $f[U^+(x,y); U^-(x,y)]$ для довільних із $\bar{D}_1$ функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, які належать простору $C^2(B) \cap C(\bar{B})$, задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $K$

$$\begin{gathered} |f[Z(x,y), V(x,y)] - f[Z^*(x,y), V^*(x,y)]| \leq K \Big\{ |Z(x,y) - Z^*(x,y)| + \\ + |V(x,y) - V^*(x,y)| + |Z_x(x,y) - Z_x^*(x,y)| + \\ + |V_x(x,y) - V_x^*(x,y)| + |Z_y(x,y) - Z_y^*(x,y)| + |V_y(x,y) - V_y^*(x,y)| \Big\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Відмітимо, що якщо $f[U(x,y)] \in C(\bar{D})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього, то вона належить класу $C_1(\bar{D})$.

Легко показати, що задача (1)–(3) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$U(x,y) = \varphi(y) + \phi(x) - \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f[U(\xi,\eta)] d\eta d\xi.$$

Оскільки функція $\Phi(x,y) = \varphi(y) + \phi(x) - \phi(x_0)$ належить класу $C^{(1.1)}(\bar{B})$ і задовольняє умови (2), то підстановкою $V(x,y) = U(x,y) - \Phi(x,y)$ задача (1)–(3) зводиться до задачі з однорідними умовами (2). Тому надалі, не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $\varphi(y) = \phi(x) = 0$.

Позначимо

$$\begin{gathered} \bar{f}^p = f[\bar{Z}_p(x,y); \bar{V}_p(x,y)], \bar{f}_p = f[\bar{V}_p(x,y); \bar{Z}_p(x,y)], \\ f^p = f[Z_p(x,y); V_p(x,y)], f_p = f[V_p(x,y); Z_p(x,y)], \\ \bar{Z}_p(x,y) = Z_p(x,y) - d_p(x,y) W_p(x,y), \\ \bar{V}_p(x,y) = V_p(x,y) + d_p(x,y) W_p(x,y), \end{gathered}$$

$$\alpha_p(x,y) = Z_{p,xy}(x,y) - f^p, \ \beta_p(x,y) = V_{p,xy}(x,y) - f_p, \tag{8}$$

де $d_p(x,y)$ — довільні з простору $C^2(B) \cap C(\bar{B})$ функції, що задовольняють нерівності

$$\begin{gathered}d_p(x,y)\geq 0,(x,y)\in\bar{B},\\ d_{p,x}(x,y)\geq(\leq)0,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2),\\ d_{p,y}(x,y)\geq(\leq)0,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4),\\ \sup_{\bar{B}} d_p(x,y)\leq 0,5,\ \sup_{\bar{B}}|d_{p,x}(x,y)|\leq 0,5,\ \sup_{\bar{B}}|d_{p,y}(x,y)|\leq 0,5,\ p=0,1,2...\end{gathered}\tag{9}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(x,y)\}$,$\{V_p(x,y)\}$ за законом [2, 6]

$$\begin{gathered}Z_{p+1}(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\{f^p-c_p(\xi,\eta)(f^p-f_p)\}d\eta d\xi,\\ V_{p+1}(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\{f_p+c_p(\xi,\eta)(f^p-f_p)\}d\eta d\xi,\end{gathered}\tag{10}$$

де $c_p(x,y)$ — довільні невід'ємні функції з простору $C(\bar{B})$, які задовольняють умову

$$\sup_{\bar{B}} c_p(x,y)\leq 0,5,\ p=0,1,2...\tag{11}$$

За нульове наближення вибираємо довільні функції порівняння задачі (1)–(3) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, які задовольняють нерівності

$$\alpha_0(x,y)\ \geq\ 0\ ,\ \beta_0(x,y)\ \leq\ 0.\tag{12}$$

Нехай $M=\sup\limits_{\bar{D}}\ f[U^+(x,y);U^-(x,y)]$, $m=\inf\limits_{\bar{D}}\ f[U^-(x,y);U^+(x,y)]$. Тоді якщо функції $Z_0(x,y)=M(x-x_0)(y-y_0)$, $V_0(x,y)=m(x-x_0)(y-y_0)$ належать просторові $\bar{D}_1$, то вони є функціями нульового наближення.

З (8), (10) випливає справедливість формул

$$W_{p+1}(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(1-2c_p(\xi,\eta))(\bar{f}^p-\bar{f}_p)d\eta d\xi.\tag{13}$$

$$\begin{gathered}Z_p(x,y)-Z_{p+1}(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(\alpha_p(\xi,\eta)+f^p-\bar{f}^p+c_p(\xi,\eta)(\bar{f}^p-\bar{f}_p)))d\eta d\xi,\\ V_p(x,y)-V_{p+1}(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\left(\beta_p(\xi,\eta)+f_p-\bar{f}_p-c_p(\xi,\eta)(\bar{f}^p-\bar{f}_p))\right)d\eta d\xi,\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}(x,y)=\bar{f}^p-f^{p+1}-c_p(x,y)(\bar{f}^p-\bar{f}_p),\\ \beta_{p+1}(x,y)=\bar{f}_p-f_{p+1}+c_p(x,y)(\bar{f}^p-\bar{f}_p),\end{gathered}\tag{15}$$

$(x,y)\in\bar{B}$.

Будемо вважати, що функція $d_0(x,y)$ така, що в області $\bar{B}$ виконуються нерівності (9) і

$$\begin{gathered}(1-2d_0(x,y))W_{0,x}(x,y)-2d_{0,x}(x,y)W_0(x,y)\geq(\leq)0,\\ (x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4),\\ (1-2d_0(x,y))W_{0,y}(x,y)-2d_{0,y}(x,y)W_0(x,y)\geq(\leq)0,\\ (x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2).\end{gathered}\tag{16}$$

Тоді легко показати, що якщо $Z_0(x,y), V_0(x,y) \in \bar{D}$, то і $\bar{Z}_0, \bar{V}_0$ також належать цій області.

Враховуючи (5), (10), з (13) при $p=0$ отримуємо $W_{1,xy} = (1-2c_0(x,y))(\bar{f}^0 - \bar{f}_0) \geq 0$. Інтегруючи останню нерівність по $x$ від $x_0$ до $x$ та по $y$ від $y_0$ до $y$ і враховуючи умови (2), (3), переконуємося в справедливості в області $\bar{D}_1$ нерівностей

$$\begin{gathered}W_1(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4),\\ W_{1,x}(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),\\ W_{1,y}(x,y) \geq (\leq) 0, (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2).\end{gathered}$$

Вибираємо функцію $d_0(x,y)$ таким чином, щоб крім умов (16) в області $\bar{D}_1$ виконувалися нерівності

$$\begin{gathered}\bar{Z}_0(x,y) \geq (\leq) Z_1(x,y), \bar{V}_0(x,y) \leq (\geq) V_1(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4),\\ \bar{Z}_{0,x}(x,y) \geq (\leq) Z_{1,x}(x,y), \bar{V}_{0,x}(x,y) \leq (\geq) V_{1,x}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),\\ \bar{Z}_{0,y}(x,y) \geq (\leq) Z_{1,y}(x,y), \bar{V}_{0,y}(x,y) \leq (\geq) V_{1,y}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2).\end{gathered} \tag{17}$$

Тоді, враховуючи (17), (5), (6), отримуємо $\bar{f}^0 - f^1 \geq 0,\ \bar{f}_0 - f_1 \leq 0$.

Вибираючи функці $c_0(x,y)$ так, щоб в області $\bar{D}_1$ виконувалися нерівності

$$\bar{f}^0 - f^1 - c_0(x,y)(\bar{f}^0 - \bar{f}_0) \geq 0,\ \bar{f}_0 - f_1 + c_0(x,y)(\bar{f}^0 - \bar{f}_0) \leq 0,$$

з (15) при $p=0$ маємо $\alpha_1(x,y) \geq 0,\ \beta_1(x,y) \leq 0$.

Приймаючи функції $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ за вихідні та повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося, що якщо функції $c_p(x,y)$, $d_p(x,y)$ на кожному кроці ітерації вибирати таким чином, щоб

$$\begin{gathered}(1-2d_p(x,y))W_{p,x}(x,y) - 2d_{p,x}(x,y)W_p(x,y) \geq (\leq) 0,\\ (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),\\ (1-2d_p(x,y))W_{p,y}(x,y) - 2d_{p,y}(x,y)W_p(x,y) \geq (\leq) 0,\\ (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2),\\ \bar{Z}_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) \geq (\leq) 0, \bar{V}_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) \leq (\geq) 0,\\ (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4),\\ \bar{Z}_{p,x}(x,y) - Z_{p+1,x}(x,y) \geq (\leq) 0, \bar{V}_{p,x}(x,y) - V_{p+1,x}(x,y) \leq (\geq) 0,\\ (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),\\ \bar{Z}_{p,y}(x,y) - Z_{p+1,y}(x,y) \geq (\leq) 0, \bar{V}_{p,y}(x,y) - V_{p+1,y}(x,y) \leq (\geq) 0,\\ (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2),\\ \bar{f}^p - f^{p+1} - c_p(x,y)(\bar{f}^p - \bar{f}_p) \geq 0,\ \bar{f}_p - f_{p+1} + c_p(x,y)(\bar{f}^p - \bar{f}_p) \leq 0,\end{gathered} \tag{18}$$

то в області $\bar{D}_1$ мають місце нерівності

$$\begin{gathered} Z_p(x,y) \geq (\leq) Z_{p+1}(x,y), V_p(x,y) \leq (\geq) V_{p+1}(x,y), \\ (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4), \\ Z_{p,x}(x,y) \geq (\leq) Z_{p+1,x}(x,y), V_{p,x}(x,y) \leq (\geq) V_{p+1,x}(x,y), \\ (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4), \\ Z_{p,y}(x,y) \geq (\leq) Z_{p+1,y}(x,y), V_{p,y}(x,y) \leq (\geq) V_{p+1,y}(x,y), \\ (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2), \end{gathered} \tag{19}$$

для довільних $p = 0, 1, \ldots$

**Теорема 1.** Нехай права частина рівняння (1) $f[U(x,y)]$ належить класу $C_1(\bar{D})$ і в області $\bar{D}_1$ існують функції порівняння задачі (1)–(3) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, які задовольняють умови (12). Тоді якщо функції $d_p(x,y)$, $c_p(x,y)$ на кожному кроці ітерації вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності (9), (11), (18), то:

1) послідовності функцій $Z_p(x,y)$, $V_p(x,y)$, побудовані за законом (10), збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв'язку задачі (1)–(3);

2) мають місце нерівності

$$\begin{gathered} Z_p(x,y) \geq (\leq) U(x,y) \geq (\leq) V_p(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4), \\ Z_{p,x}(x,y) \geq (\leq) U_x(x,y) \geq (\leq) V_{p,x}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4), \\ Z_{p,y}(x,y) \geq (\leq) U_y(x,y) \geq (\leq) V_{p,y}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2) \end{gathered} \tag{20}$$

   для довільних $p = 0, 1, \ldots$;

3) збіжність ітераційного процесу не повільніша збіжності методу Пікара [3, 7].

***Доведення***. Для доведення збіжності послідовностей функцій $Z_p(x,y)$, $V_p(x,y)$, $Z_{p,x}(x,y)$, $V_{p,x}(x,y)$, $Z_{p,y}(x,y)$, $V_{p,y}(x,y)$ відповідно до однієї і тієї ж границі в силу нерівностей (19) достатньо показати, що $W_p(x,y) \underset{p\to\infty}{\overset{(x,y)\in\bar{B}}{\rightrightarrows}} 0$, $W_{p,x}(x,y) \underset{p\to\infty}{\overset{(x,y)\in\bar{B}}{\rightrightarrows}} 0$, $W_{p,y}(x,y) \underset{p\to\infty}{\overset{(x,y)\in\bar{B}}{\rightrightarrows}} 0$.

В силу нерівностей (18) маємо

$$\begin{gathered} |(1-2d_p(x,y))W_{p,x}(x,y) - 2d_{p,x}(x,y)W_p(x,y)| \leq (1-2d_p(x,y)) \left| W_{p,x}(x,y) \right|, \\ |(1-2d_p(x,y))W_{p,y}(x,y) - 2d_{p,y}(x,y)W_p(x,y)| \leq (1-2d_p(x,y)) \left| W_{p,y}(x,y) \right|, \end{gathered}$$

тому з (6) отримаємо

$$\begin{gathered} \bar{f}^p - \bar{f}_p \leq 2K \left( \left|\bar{W}_p(x,y)\right| + \left|\bar{W}_{p,x}(x,y)\right| + \left|\bar{W}_{p,y}(x,y)\right| \right) \leq \\ \leq 2K \left( (1-2d_p(x,y)) \left( |W_p(x,y)| + |W_{p,x}(x,y)| + |W_{p,y}(x,y)| \right) \right) \leq \\ \leq 2Kl \left( |W_p(x,y)| + |W_{p,x}(x,y)| + |W_{p,y}(x,y)| \right), \end{gathered} \tag{21}$$

$l = \max\limits_{p} \sup\limits_{\bar{B}} \{1 - 2d_p(x,y)\}$.

При $p=0$ маємо $\bar{f}^0-\bar{f}_0\leq 2Kl(|W_0(x,y)|+|W_{0,x}(x,y)|+|W_{0,y}(x,y)|)$. Позначимо $d=\sup\limits_{\bar{B}}\{|W_0(x,y)|,|W_{0,x}(x,y)|,|W_{0,y}(x,y)|)\}$, $q=\max\limits_{p}\sup\limits_{\bar{B}}(1-2c_p(x,y))$ . Тоді з (13) при $p=0$ випливає $W_{1,xy}(x,y)=(1-2c_0(x,y))(\bar{f}^0-\bar{f}_0)\leq 6Klqd$,

$$\Omega_1(x,y)\leq\begin{cases}6Klqd(x_0-x+y_0-y),\ (x,y)\in\bar{B}_1,\\ 6Klqd(x_0-x+y-y_0),\ (x,y)\in\bar{B}_2,\\ 6Klqd(x-x_0+y-y_0),\ (x,y)\in\bar{B}_3,\\ 6Klqd(x-x_0+y_0-y),\ (x,y)\in\bar{B}_4,\end{cases}$$

де $\Omega_p(x,y)=\sup\limits_{\bar{B}}\{|W_p(x,y)|,|W_{p,x}(x,y)|,|W_{p,y}(x,y)|\}$.

Тоді з (13) при $p=1$ отримуємо

$$W_{2,xy}(x,y)=(1-2c_1(x,y))(\bar{f}^1-\bar{f}_1)\leq$$
$$\leq 2Klq(|W_1(x,y)|+|W_{1,x}(x,y)|+|W_{1,y}(x,y)|)\leq$$
$$\leq\begin{cases}d(6Klq)^2(x_0-x+y_0-y),\ (x,y)\in\bar{B}_1,\\ d(6Klq)^2(x_0-x+y-y_0),\ (x,y)\in\bar{B}_2,\\ d(6Klq)^2(x-x_0+y-y_0),\ (x,y)\in\bar{B}_3,\\ d(6Klq)^2(x-x_0+y_0-y),\ (x,y)\in\bar{B}_4,\end{cases}$$

отже,

$$\Omega_2(x,y)\leq\begin{cases}d(6Klq)^2(x_0-x+y_0-y)^2/2!,\ (x,y)\in\bar{B}_1,\\ d(6Klq)^2(x_0-x+y-y_0)^2/2!,\ (x,y)\in\bar{B}_2,\\ d(6Klq)^2(x-x_0+y-y_0)^2/2!,\ (x,y)\in\bar{B}_3,\\ d(6Klq)^2(x-x_0+y_0-y)^2/2!,\ (x,y)\in\bar{B}_4.\end{cases}$$

Методом математичної індукції переконуємося в справедливості оцінок

$$\Omega_{p+1}(x,y)\leq\begin{cases}d(6Klq)^{p+1}(x_0-x+y_0-y)^{p+1}/(p+1)!,\ (x,y)\in\bar{B}_1,\\ d(6Klq)^{p+1}(x_0-x+y-y_0)^{p+1}/(p+1)!,\ (x,y)\in\bar{B}_2,\\ d(6Klq)^{p+1}(x-x_0+y-y_0)^{p+1}/(p+1)!,\ (x,y)\in\bar{B}_3,\\ d(6Klq)^{p+1}(x-x_0+y_0-y)^{p+1}/(p+1)!,\ (x,y)\in\bar{B}_4.\end{cases}\tag{22}$$

Із оцінок (22) випливає, що $\lim\limits_{p\to\infty}\Omega_p(x,y)=0$, тобто в області $\bar{B}$

$$\lim_{p\to\infty}Z_p(x,y)=\lim_{p\to\infty}V_p(x,y)=U(x,y),$$
$$\lim_{p\to\infty}Z_{p,x}(x,y)=\lim_{p\to\infty}V_{p,x}(x,y)=U_x(x,y),$$
$$\lim_{p\to\infty}Z_{p,y}(x,y)=\lim_{p\to\infty}V_{p,y}(x,y)=U_y(x,y),$$

Переходячи в (11) до границі при $p\to\infty$ і диференціюючи по $x$ та $y$, переконуємося, що гранична функція $U(x,y)$ є розв'язком задачі (1)–(3).

Для доведення єдиності розв'язку задачі (1)–(3) припустимо, що існують два розв'язки $U(x,y)$ і $Z(x,y)$ та позначимо $W(x,y) = U(x,y) - Z(x,y)$. З (6) маємо

$$|W_{xy}(x,y)| \le 2K\left(|W(x,y)| + |W_x(x,y)| + |W_y(x,y)|\right).$$

Позначивши $d_1 = \sup\limits_{\bar{B}} \{|W(x,y)|, |W_x(x,y)|, |W_y(x,y)|\}$, як і в попередньому випадку переконуємося в справедливості оцінки

$$\Omega(x,y) \le \begin{cases} d_1(6Klq)^p(x_0 - x + y_0 - y)^p/p!, \ (x,y) \in \bar{B}_1, \\ d_1(6Klq)^p(x_0 - x + y - y_0)^p/p!, \ (x,y) \in \bar{B}_2, \\ d_1(6Klq)^p(x - x_0 + y - y_0)^p/p!, \ (x,y) \in \bar{B}_3, \\ d_1(6Klq)^p(x - x_0 + y_0 - y)^p/p!, \ (x,y) \in \bar{B}_4, \end{cases}$$

де $p$ — довільне додатне число. А це можливо лише тоді, коли $W(x,y) \equiv 0$.

Покажемо, що мають місце нерівності (20). Для цього припустимо, що для деякого номера $p$ в деякій точці $(x,y) \in B$

$$Z_p(x,y) < (>) U(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 \left(\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4\right).$$

Тоді в силу (19) отримуємо

$$Z_p(x,y) \le (\ge) Z_{p+q}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 \left(\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4\right)$$

для довільних $q \in \mathbf{N}$, отже, послідовність $\{Z_{p+q}\}$ при $q \to \infty$ не збігається до розв'язку задачі (1)–(3), що суперечить доведеному. Аналогічно доводиться справедливість в області $\bar{D}_1$ і інших нерівностей (20).

Залишилося показати, що збіжність ітераційного процесу (10) не повільніша збіжності методу Пікара. Дійсно, послідовні двосторонні наближення за допомогою методу Пікара будуються за формулою

$$Z_{1,p+1}(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} f^p d\eta d\xi,$$
$$V_{1,p+1}(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} f_p d\eta d\xi.$$

В силу умов (5), (6), (16) маємо

$$Z_{1,p+1,xy}(x,y) - Z_{p+1,xy}(x,y) = f^p - \bar{f}^p + c_p(x,y)\left(\bar{f}^p - \bar{f}_p\right) \ge 0,$$
$$V_{1,p+1,xy}(x,y) - V_{p+1,xy}(x,y) = f_p - \bar{f}_p - c_p(x,y)\left(\bar{f}^p - \bar{f}_p\right) \le 0,$$

звідки, інтегруючи по $x$ від $x_0$ до $x$ та по $y$ від $y_0$ до $y$, отримаємо

$$Z_{1,p}(x,y) \ge (\le) Z_p(x,y) \ge (\le) V_p(x,y) \ge (\le) V_{1,p}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_1 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_2 \cup \bar{B}_4),$$
$$Z_{1,p,x}(x,y) \ge (\le) Z_{p,x}(x,y) \ge (\le) V_{p,x}(x,y) \ge (\le) V_{1,p,x}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_4),$$
$$Z_{1,p,y}(x,y) \ge (\le) Z_{p,y}(x,y) \ge (\le) V_{p,y}(x,y) \ge (\le) V_{1,p,y}(x,y), (x,y) \in \bar{B}_3 \cup \bar{B}_4 (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2).$$

Теорема доведена.

**Теорема 2.** Нехай права частина рівняння (1) $f[U(x,y)]$ належить класу $C_1\left(\bar{D}\right)$ і в просторі $C^2\left(B\right)\cap C\left(\bar{B}\right)$ існує функція $Z_0(x,y)$ $(V_0(x,y))$ така, що задовольняє однорідні умови (2) і нерівності

$$\begin{gathered}
Z_0(x,y)\geq(\leq)\,0\,(V_0(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
Z_{0,x}(x,y)\geq(\leq)\,0\,(V_{0,x}(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
Z_{0,y}(x,y)\geq(\leq)\,0\,(V_{0,y}(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right),\\
Z_{0,xy}(x,y)-f\left[Z_0(x,y);0\right]\geq0,f\left[0;Z_0(x,y)\right]\geq0,\\
(V_{0,xy}(x,y)-f\left[V_0(x,y);0\right]\leq0,f\left[0;V_0(x,y)\right]\leq0)\,.
\end{gathered}\tag{23}$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(2) задовольняє умови

$$\begin{gathered}
U(x,y)\geq(\leq)\,0\,(U(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
U_x(x,y)\geq(\leq)\,0\,(U_x(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
U_y(x,y)\geq(\leq)\,0\,(U_y(x,y)\leq(\geq)\,0)\,,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).
\end{gathered}\tag{24}$$

***Доведення***. Згідно умов (23) функції $Z_0(x,y),V_0(x,y)\equiv0$ $(Z_0(x,y)\equiv0,V_0(x,y))$ є функціями порівняння задачі (1)–(2) і $\alpha_0(x,y)\geq0$, $\beta_0(x,y)\leq0$. Тому згідно теореми 1 мають місце нерівності (19), звідки при $p=0$ отримуємо нерівності (24). Теорема доведена.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь вигляду

$$Z_{xy}=q_1(x,y)Z(x,y)+q_2(x,y)Z_x(x,y)+q_3(x,y)Z_y(x,y)+f_1(x,y),\tag{25}$$

$$V_{xy}=p_1(x,y)V(x,y)+p_2(x,y)V_x(x,y)+p_3(x,y)V_y(x,y)+f_2(x,y)\tag{26}$$

з однорідними умовами (2), де $Z(x,y)$, $V(x,y)$ — шукані функції, $q_j(x,y)$, $p_j(x,y)$, $f_i(x,y)$, $j=\overline{1,3}$, $i=1,2$ — відомі кусково-неперервні функції, які задовольняють умовам:

$$\begin{gathered}
f_i(x,y)\geq0,(x,y)\in\bar{B},\\
q_1(x,y)\geq(\leq)0,p_1(x,y)\geq(\leq)0,(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
q_2(x,y)\geq(\leq)0,p_2(x,y)\geq(\leq)0,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
q_3(x,y)\geq(\leq)0,p_3(x,y)\geq(\leq)0,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).
\end{gathered}\tag{27}$$

Тоді згідно теореми 2 розв'язки задач (25), (2) і (26), (2) задовольняють нерівності

$$\begin{gathered}
Z(x,y)\geq(\leq)\,0,V(x,y)\geq(\leq)\,0,(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
U_x(x,y)\geq(\leq)\,0,V_x(x,y)\geq(\leq)\,0,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
U_y(x,y)\geq(\leq)\,0,V_y(x,y)\geq(\leq)\,0,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).
\end{gathered}\tag{28}$$

**Теорема 3**. Нехай для кусково-неперервних функцій $q_j(x,y)$, $p_j(x,y)$, $f_i(x,y)$, $i=1,2$, $j=\overline{1,3}$, що задовольняють умови (27), мають місце нерівності

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &\geq f_2(x,y),(x,y)\in \bar{B},\\
q_1(x,y) &\geq (\leq) p_1(x,y),(x,y)\in \bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
q_2(x,y) &\geq (\leq) p_2(x,y),(x,y)\in \bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
q_3(x,y) &\geq (\leq) p_3(x,y),(x,y)\in \bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).
\end{aligned}\tag{29}$$

Тоді розв'язки задач (25), (2) і (26), (2) задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}
Z(x,y) &\geq (\leq)\, V(x,y),(x,y)\in \bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
Z_x(x,y) &\geq (\leq)\, V_x(x,y),(x,y)\in \bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
Z_y(x,y) &\geq (\leq)\, V_y(x,y),(x,y)\in \bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).
\end{aligned}\tag{30}$$

***Доведення***. Позначивши $W(x,y)=Z(x,y)-V(x,y)$, з (25), (26) отримуємо

$$W_{xy}(x,y)=q_1(x,y)W(x,y)+q_2(x,y)W_x(x,y)+q_3(x,y)W_y(x,y)+f(x,y), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y)=\left(q_1(x,y)-p_1(x,y)\right)V(x,y)+\left(q_2(x,y)-p_2(x,y)\right)V_x(x,y)+\\
+\left(q_3(x,y)-p_2(x,y)\right)V_y(x,y)+f_1(x,y)-f_2(x,y).
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (28), (29), отримуємо $f(x,y)\geq 0$, тому згідно теореми 2 розв'язок задачі (31), (2) задовольняє нерівності:

$$\begin{aligned}
W(x,y) &\geq (\leq)\, 0(x,y)\in \bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\
W_x(x,y) &\geq (\leq)\, 0,(x,y)\in \bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\
W_y(x,y) &\geq (\leq)\, 0,(x,y)\in \bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right),
\end{aligned}$$

що й треба було довести.

Розглянемо два квазілінійні диференціальні рівняння вигляду

$$U_{xy}(x,y)=f(x,y,U(x,y),U_x(x,y),U_y(x,y))\equiv f[U(x,y)] \tag{32}$$

$$V_{xy}(x,y)=g(x,y,V(x,y),V_x(x,y),V_y(x,y))\equiv g[V(x,y)] \tag{33}$$

де $f$, $g: D\to R$, $D\in R^5$. Функції $U(x,y)$,$V(x,y)$ вздовж характеристик $x=x_0$, $y=y_0$ задовольняють умови (2).

Нехай праві частини рівнянь (32), (33) $f[U(x,y)]$, $g[V(x,y)]$ належать класу $C_1(\bar{D})$ і такі, що

1) $f[U(x,y)]\equiv f[U^+(x,y)]$, $g[V(x,y)]\equiv g[V^+(x,y)]$, тобто мають місце нерівності

$$\begin{aligned}
a_1(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial U^+}\geq (\leq) 0,(x,y)\in \bar{B}_1\cup\bar{B}_3(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4),\\
a_2(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial U_x^+}\geq (\leq) 0,(x,y)\in \bar{B}_2\cup\bar{B}_3(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4),\\
a_3(x,y) &= \tfrac{\partial f}{\partial U_y^+}\geq (\leq) 0,(x,y)\in \bar{B}_3\cup\bar{B}_4(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2);
\end{aligned}\tag{34}$$

2) $\forall\, Z(x,y)\in\bar{D}$
$$0\le g[Z(x,y)]-f[Z(x,y)]\le\varepsilon(x,y); \tag{35}$$

3) $f[U(x,y)]$ (або $g[V(x,y)]$) має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього.

Розглянемо

$$\begin{aligned}V_{xy}(x,y)-U_{xy}(x,y)=g[V(x,y)]-f[U(x,y)]=g[V(x,y)]-f[V(x,y)]+\\+\left(f[V(x,y)]-f[U(x,y)]\right).\end{aligned} \tag{36}$$

Позначимо $W(x,y)=V(x,y)-U(x,y)$, одержимо

$$W_{xy}(x,y)=g[V(x,y)]-f[U(x,y)]+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial U^+}W(x,y)+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial U_x^+}W_x(x,y)+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial U_y^+}W_y(x,y). \tag{37}$$

В силу умов (34) має місце теорема 2, тому розв'язок задачі

$$\begin{aligned}W_{xy}(x,y)=g[V(x,y)]-f[V(x,y)]+\tilde{a}_1(x,y)W(x,y)+\\+\tilde{a}_2(x,y)W_x(x,y)+\tilde{a}_3(x,y)W_y(x,y),\end{aligned} \tag{38}$$

$$W(x_0,y)=W(x,y_0)=0 \tag{39}$$

задовольняє нерівності (24).

Тоді розв'язки задач (32)–(2), (33)–(2) задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}W(x,y)\ge(\le)0,(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4),\\W_x(x,y)\ge(\le)0,(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4),\\W_y(x,y)\ge(\le)0,(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2).\end{aligned} \tag{40}$$

Позначимо $a_i=\sup\limits_{\bar{B}}|a_i(x,y)|$, $i=\overline{1,3}$ і розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$\bar{W}_{xy}(x,y)=\begin{cases}\varepsilon(x,y)+a_1\bar{W}(x,y)-a_2\bar{W}_x(x,y)-a_3\bar{W}_y(x,y),\ (x,y)\in\bar{B}_1,\\\varepsilon(x,y)-a_1\bar{W}(x,y)+a_2\bar{W}_x(x,y)-a_3\bar{W}_y(x,y),\ (x,y)\in\bar{B}_2,\\\varepsilon(x,y)+a_1\bar{W}(x,y)+a_2\bar{W}_x(x,y)+a_3\bar{W}_y(x,y)\ (x,y)\in\bar{B}_3,\\\varepsilon(x,y)-a_1\bar{W}(x,y)-a_2\bar{W}_x(x,y)+a_3\bar{W}_y(x,y),\ (x,y)\in\bar{B}_4.\end{cases} \tag{41}$$

Розв'язки рівняння (41) також задовольняють умови (39). Враховуючи умови (34), (35), виконуються умови теореми 3, тому розв'язки задач (38), (39) та (41), (39) задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}W(x,y)\le(\ge)\,\bar{W}(x,y),(x,y)\in\bar{B}_1\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_2\cup\bar{B}_4\right),\\W_x(x,y)\le(\ge)\,\bar{W}_x(x,y),(x,y)\in\bar{B}_2\cup\bar{B}_3\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_4\right),\\W_y(x,y)\le(\ge)\,\bar{W}_y(x,y),(x,y)\in\bar{B}_3\cup\bar{B}_4\left(\bar{B}_1\cup\bar{B}_2\right).\end{aligned}$$

Зробивши заміну $\bar{W}(x,y) = Q(x,y)\exp\nu(x,y)$, де

$$\nu(x,y) = \begin{cases} -a_2(y-y_0) - a_3(x-x_0),\ (x,y)\in\bar{B}_1, \\ a_2(y-y_0) - a_3(x-x_0),\ (x,y)\in\bar{B}_2, \\ a_2(y-y_0) + a_3(x-x_0)(x,y)\in\bar{B}_3, \\ -a_2(y-y_0) + a_3(x-x_0)\ (x,y)\in\bar{B}_4, \end{cases}$$

та позначивши $d = a_2a_3 + a_1$, отримаємо

$$Q_{xy}(x,y) = \begin{cases} dQ(x,y) + \varepsilon(x,y)e^{a_2(y-y_0)+a_3(x-x_0)},\ (x,y)\in\bar{B}_1, \\ -dQ(x,y) + \varepsilon(x,y)e^{-a_2(y-y_0)+a_3(x-x_0)},\ (x,y)\in\bar{B}_2, \\ dQ(x,y) + \varepsilon(x,y)e^{-a_2(y-y_0)-a_3(x-x_0)},\ (x,y)\in\bar{B}_3, \\ -dQ(x,y) + \varepsilon(x,y)e^{a_2(y-y_0)-a_3(x-x_0)},\ (x,y)\in\bar{B}_4, \end{cases}$$

$$Q(x_0,y) = Q(x,y_0) = 0.$$

Розв'язок цієї задачі за допомогою методу Рімана можна подати у вигляді

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_x^{x_0}\int\limits_y^{y_0} \varepsilon(\xi,\eta)e^{a_2(\eta-y_0)+a_3(\xi-x_0)}\cos(2\sqrt{d(x_0-\xi)(y_0-\eta)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_x^{x_0}\int\limits_{y_0}^{y} \varepsilon(\xi,\eta)e^{-a_2(\eta-y_0)+a_3(\xi-x_0)}\, ch(2\sqrt{d(x_0-\xi)(\eta-y_0)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \\ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \varepsilon(\xi,\eta)e^{-a_2(\eta-y_0)-a_3(\xi-x_0)}\cos(2\sqrt{d(\xi-x_0)(\eta-y_0)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_y^{y_0} \varepsilon(\xi,\eta)e^{a_2(\eta-y_0)-a_3(\xi-x_0)}\, ch(2\sqrt{d(\xi-x_0)(y_0-\eta)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \end{cases}$$

отже,

$$W(x,y) \le$$

$$\le \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_x^{x_0}\int\limits_y^{y_0} \varepsilon(\xi,\eta)e^{a_2(\eta-y)+a_3(\xi-x)}\cos(2\sqrt{d(x_0-\xi)(y_0-\eta)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \\ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \varepsilon(\xi,\eta)e^{-a_2(\eta-y)-a_3(\xi-x)}\cos(2\sqrt{d(\xi-x_0)(\eta-y_0)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \end{cases} \tag{42}$$

коли $(x,y)$ належить відповідно областям $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$,

$$W(x,y) \ge$$

$$\ge \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_x^{x_0}\int\limits_{y_0}^{y} \varepsilon(\xi,\eta)e^{-a_2(\eta-y)+a_3(\xi-x)}\, ch(2\sqrt{d(x_0-\xi)(\eta-y_0)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_y^{y_0} \varepsilon(\xi,\eta)e^{a_2(\eta-y)-a_3(\xi-x)}\, ch(2\sqrt{d(\xi-x_0)(y_0-\eta)}\cos\theta)d\eta d\xi d\theta, \end{cases} \tag{43}$$

коли $(x, y)$ належить відповідно областям $\bar{B}_2$, $\bar{B}_4$. Тим самим доведена наступна теорема

**Теорема 4**. Нехай праві частини рівнянь (32), (33) $f[U(x,y)]$, $g[V(x,y)]$ належать класу $C(\bar{D})$ і задовольняють умови 1) — 3). Тоді розв'язки задач (32)–(2), (33)–(2) задовольняють нерівності (40), (42), (43).

Теорему 4 зручно використовувати у випадку складності правої частини рівняння (1), тобто коли реалізація ітераційного процесу (10) практично неможлива. У цьому випадку на підставі вказаної теореми можна певним чином апроксимувати функцію $f\,[U(x,y)]$.

1. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. (Навч. посібник. 2-ге вид., перероб. й доп.) - К.: Либідь, 2001. – 336 с.
2. *Маринець В. В.* Деякі підходи побудови наближеного розв'язку узагальненої задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С.1667–1675.
3. *Добридень А. В.* Характеристична задача Коші // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С.66-87.
4. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. - 448 с.
5. *Маринець В. В., Трошина А. В.* Узагальнена задача Дарбу // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем.– 1999. – Вип. 4. – С.79–84.
6. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
7. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применение. – К.: Наук. думка, 1980. – 267 с.

Одержано 18.09.2003