УДК 517. 3

Рибак В. Я. (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДИН ВИД ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

In this article one kind of the linear differential equations in fractional orders is analised and some properties of their solutions examined.

Розглядається один вид лінійних диференціальних рівнянь дробового порядку та описуються властивості розв'язків таких рівнянь.

Диференціальні рівняння дробового порядку ще не стали звичним явищем у математиці, хоча вже знаходять практичне застосування [1, С. 620, 621]. В статті досліджено один вид лінійних диференціальних рівнянь дробового порядку і показано його зв'язок із звичайними рівняннями у цілих похідних.

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{\frac{n-i}{n}} y(x) = 0\,, \quad x \in (0, b), \quad b < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_i = const, \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

де через $D^{\frac{n-i}{n}}$ позначено оператор невизначеного диференціювання дробового порядку [2]. Рівняння цього типу мають цікаві властивості і широкі можливості для дослідження поведінки та регулювання різних об'єктів. Покажемо зв'язок (1) із лінійними неоднорідними рівняннями n-го порядку.

Теорема 1. *Якщо всі коефіцієнти a_i, $i = 1, 1, 2, \ldots, n-1$, рівняння* (1) *водночас не дорівнюють нулеві, то його можна звести до неоднорідного лінійного рівняння n-го порядку із постійними коефіцієнтами*

$$\sum_{i=0}^{n} A_{in} D^{n-i} y(x) = Q(x), \quad A_{in} = const. \tag{2}$$

Доведення. Вихідний вираз (1) розглянемо як алгебраїчне рівняння відносно невідомих дробових похідних $D^{\frac{n-i}{n}} y(x) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n-1)$.

$$a_1 D^{\frac{n-1}{n}} y + a_2 D^{\frac{n-2}{n}} y + \ldots + a_{n-1} D^{\frac{1}{n}} y = -(a_n y + Dy). \tag{3}$$

Послідовно застосуємо до (3) оператор $D^{\frac{j}{n}}$ $(j = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ )$.

$$\begin{array}{rcl}
a_1 D^{\frac{n-1}{n}} y + a_2 D^{\frac{n-2}{n}} y + \cdots + a_{n-2} D^{\frac{2}{n}} y + a_{n-1} D^{\frac{1}{n}} y & = & -(a_n y + Dy); \\
D^{\frac{n+1}{n}} y + a_2 D^{\frac{n-1}{n}} y + a_3 D^{\frac{n-2}{n}} y + \cdots + a_{n-1} D^{\frac{2}{n}} y + a_n D^{\frac{1}{n}} y & = & \sum{}_1 - a_1 Dy; \\
D^{\frac{n+2}{n}} y + a_1 D^{\frac{n+1}{n}} y + a_3 D^{\frac{n-1}{n}} y + a_4 D^{\frac{n-2}{n}} y + \cdots \quad + a_n D^{\frac{2}{n}} y & = & \sum{}_2 - a_2 Dy; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
D^{\frac{2n-1}{n}} y + a_1 D^{\frac{2n-2}{n}} y + a_2 D^{\frac{2n-3}{n}} y + \cdots + a_{n-2} D^{\frac{n-3}{n}} y + a_n D^{\frac{n-1}{n}} y & = & \sum{}_{n-1} - a_{n-1} Dy; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots
\end{array} \tag{4}$$

Тут прийнято позначення :

$$\sum{}_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_{kj} \frac{x^{-k-j/n}}{\Gamma(1-k-j/n)}\,, \quad j = 1,\ 2, \ldots, \tag{5}$$

C_{kj} — константи диференціювання.

В структурі рівняння (4) легко помітити окремі блоки коефіцієнтів при невідомих дробових похідних, які повторюються і одночасно зміщуються вліво. Розглянемо будову такого блока (його виділено у фрагменті (4)).

Початковий рядок має $n-1$ невідому дробову похідну $\left(D^{\frac{n-1}{n}}y,\ D^{\frac{n-2}{n}}y,\ \ldots,\ D^{\frac{1}{n}}y\right)$. Кожен наступний рядок додає ще по одній невідомій, а всього в розглядуваному блоці буде $n-1$ рядків. Закінчується перший блок взяттям похідної $D^{\frac{n-1}{n}}$ від першого рядка.

Наступний блок буде мати таку будову:

$$\begin{array}{rcl}
a_1 D^{\frac{2n-1}{n}}y + a_2 D^{\frac{2n-2}{n}}y + \cdots + a_{n-2}D^{\frac{n+2}{n}}y + a_{n-1}D^{\frac{n+1}{n}}y & = & -(a_n Dy + D^2 y); \\
D^{\frac{2n+1}{n}}y + a_2 D^{\frac{2n-1}{n}}y + \ \ a_3 D^{\frac{2n-2}{n}}y + \cdots + a_n D^{\frac{n+2}{n}}y & = & \sum_{n+1} - a_1 D^2 y; \\
D^{\frac{2n+2}{n}}y + a_1 D^{\frac{2n+1}{n}}y + a_3 D^{\frac{2n-1}{n}}y + a_4 D^{\frac{2n-2}{n}}y + \cdots & = & \sum_{n+2} - a_2 D^2 y; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
D^{\frac{3n-1}{n}}y + a_1 D^{\frac{3n-2}{n}}y + a_2 D^{\frac{3n-3}{n}}y + \cdots + a_{n-2}D^{\frac{2n-3}{n}}y + a_n D^{\frac{2n-1}{n}}y & = & \sum_{2n-1} - a_{n-1} D^2 y.
\end{array} \tag{6}$$

Його початковий рядок буде зміщений вліво відносно початкового рядка першого блока на $n-1$ позицію. Надалі послідовність повторюється. Значення додаткових функцій диференціювання $\sum_j$ описуються формулою (5).

Нехай кількість таких блоків у системі рівнянь буде m. Кількість невідомих дробових похідних тоді дорівнюватиме $p = n-1+m(n-1)$. В одному блоці знаходиться n рівнянь, а загальна кількість рівнянь в m блоках буде $q = m \cdot n$. Із порівняння значень p і q знаходимо кількість блоків, яка робить задачу знаходження невідомих дробових похідних визначеною, а саме:

$$m = n - 1. \tag{7}$$

Відповідно до цих розрахунків кінцевою, використаною для розв'язування системи, похідною була $D^{\frac{n^2-n-1}{n}}$. Останнє рівняння системи диференціюємо оператором $D^{\frac{1}{n}}$ і отримуємо

$$D^n y + a_1 D^{n-\frac{1}{n}}y + a_2 D^{n-\frac{2}{n}}y + \cdots + a_{n-1}D^{n-\frac{n-1}{n}}y + a_n D^{n-1}y = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) не містить нових невідомих дробових похідних. Значення $D^{n-j/n}$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$) шукаємо за правилом Крамера.

$$D^n y + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\Delta_{nj}}{\Delta_n} + a_n D^{n-1} y = 0. \tag{9}$$

Тут Δ_{nj}, Δ_n — детермінанти системи алгебраїчних рівнянь.

Як було показано раніше, права частина системи містить лише цілі похідні $D^k y$, від $k = 0$ до $k = n-1$. А це означає, що Δ_{nj} в (9) будуть включати такі ж самі похідні, причому входитимуть вони в Δ_{nj} лінійно, — це випливає із властивостей детермінантів Δ_{nj}. Таким чином, (9) набирає вигляду

$$\begin{gathered}
D^n y + A_{1n} D^{n-1} y + A_{2n} D^{n-2} y + \cdots + A_{n-1,n} Dy + A_{nn} y = Q(x)\,; \\
Q(x) = \sum_{j=1}^{n-1} B_j \sum\nolimits_j ,
\end{gathered} \tag{10}$$

де A_{1n}, A_{2n}, …, A_{nn} — коефіцієнти, які виражаються через коефіцієнти a_i вихідного рівняння (1).

Вираз для $Q(x)$ містить тільки перші $n-1$ сум $\sum_j$, які домножуються на коефіцієнти B_j, що також виражаються через a_i (наступні $\sum_j$ для $j=n+1$, $n+2,\dots$ з точністю до констант диференціювання входять в $\sum_1$, $\sum_2$, …, тобто $\sum_{nj}\subset\sum_j$). Теорема доведена.

Знайдемо розв'язок рівняння (1). Відповідно до загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь, (1) буде мати один розв'язок як рівняння, що має старшу похідну із порядком, рівним одиниці. Розв'язок шукаємо у формі

$$y(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty} b_i\frac{x^{i/n}}{\Gamma(1+i/n)}. \tag{11}$$

Після підстановки у (1) прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і знаходимо такі рекурентні співвідношення для визначення b_i:

$$\begin{aligned}
&b_0=1\,,\quad b_1=-a_1b_0\,;\\
&b_2=-a_1b_1-a_2b_0\,;\\
&b_3=-a_1b_2-a_2b_1-a_3b_0\,;\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&b_n=-a_1b_{n-1}-a_2b_{n-2}-\ldots-a_nb_0\,;\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&b_{n+k}=-\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n+k-j}\,,\quad k=1,\ 2,\ 3,\dots.
\end{aligned} \tag{12}$$

За допомогою (12) обчислюємо b_i. $b_1=-a_1$; $b_2=a_1^2-a_2$; $b_3=-(a_1^3-2a_1a_2+a_3)$; $b_4=a_1^4-3a_1^2a_2+2a_1a_3+a_2^2-a_4$ і т. д.

Для ілюстрації розглянемо конкретний приклад розв'язування рівняння. Нехай

$$Dy+a_1D^{2/3}y+a_2D^{1/3}y+a_3y=0\quad(n=3).$$

На основі (11) та (12) маємо: $y=1-a_1\frac{x^{1/3}}{\Gamma(4/3)}+(a_1^2-a_2)\frac{x^{2/3}}{\Gamma(5/3)}-(a_1^3-2a_1a_2+a_3)\frac{x}{1!}+$ $+(a_1^4-3a_1^2a_2+2a_1a_3+a_2^2)\frac{x^{4/3}}{\Gamma(7/3)}-(a_1^5-4a_1^3a_2+3a_1^2a_3+3a_1a_2^2-2a_2a_3)\frac{x^{5/3}}{\Gamma(8/3)}+(a_1^6-$ $-5a_1^4a_2+4a_1^3a_3+6a_1^2a_2^2-6a_1a_2a_3-a_2^3+a_3^2)\frac{x^2}{2!}-(a_1^7-6a_1^5a_2+5a_1^4a_3+10a_1^3a_2^2-12a_1^2a_2a_3-$ $-4a_1a_2^3+3a_1a_3^2+3a_2^2a_3)\frac{x^{7/3}}{\Gamma(10/3)}+\cdots$. У структурі цього розв'язку неважко виявити цілу і дробову частини, які позначимо через u і v.

$$u=1-(a_1^3-2a_1a_2+a_3)\tfrac{x}{1!}+(a_1^6-5a_1^4a_2+4a_1^3a_3+6a_1^2a_2^2-6a_1a_2a_3-a_2^3+a_3^2)\tfrac{x^2}{2!}-\cdots$$
$$v=-a_1\tfrac{x^{1/3}}{\Gamma(4/3)}+(a_1^4-3a_1^2a_2+2a_1a_3+a_2^2)\tfrac{x^{4/3}}{\Gamma(7/3)}-\cdots+$$
$$+(a_1^2-a_2)\tfrac{x^{2/3}}{\Gamma(5/3)}-(a_1^5-4a_1^3a_2+3a_1^2a_3+3a_1a_2^2-2a_2a_3)\tfrac{x^{5/3}}{\Gamma(8/3)}+\cdots$$

Відповідно до теореми 1, перетворення, які нею визначаються, зводяться до такого:

$$\left|\begin{array}{cccccc}
 & & & & a_1 & a_2\\
 & & & 1 & a_2 & a_3\\
 & & 1 & a_1 & a_3 & \\
\hdashline
 & & a_1 & a_2 & & \\
 & 1 & a_2 & a_3 & & \\
1 & a_1 & a_3 & & &
\end{array}\right|\times\left|\begin{array}{c}
D^{8/3}y\\ D^{7/3}y\\ D^{5/3}y\\ D^{4/3}y\\ D^{2/3}y\\ D^{1/3}y
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}
-(a_3y+Dy)\\ \sum_1-a_1Dy\\ \sum_2-a_2Dy\\ -(a_3Dy+D^2y)\\ \sum_3-a_1D^2y\\ \sum_4-a_2D^2y
\end{array}\right|.$$

Матриця коефіцієнтів складається із двох блоків (вони розділені пунктирною лінією), по три рядки у кожному. Після розв'язування системи рівнянь знаходимо:

$$y''' + (a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3)y'' + (a_2^3 - 3a_1a_2a_3 + 3a_3^2)y' + a_3^3 y = B_1 \sum{}_1 + B_2 \sum{}_2;$$
$$A_{13} = a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3\,; \quad A_{23} = a_2^3 - 3a_1a_2a_3 + 3a_3^2; \quad A_{33} = a_3^3;$$
$$B_1 \sum{}_1 = (a_1^2 - a_2)\tfrac{x^{-7/3}}{\Gamma(-4/3)} - a_2a_3\tfrac{x^{-4/3}}{\Gamma(-1/3)}; \quad B_2 \sum{}_2 = -a_1\tfrac{x^{-8/3}}{\Gamma(-5/3)} + (a_2^2 - a_1a_3)\tfrac{x^{-5/3}}{\Gamma(-2/3)}.$$

Повертаємось знову до рівняння (10). Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь [3] стверджує, що (10) буде мати n лінійно незалежних розв'язків, які складають фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідного рівняння, і частинний розв'язок, що цілком визначається його правою частиною $Q(x)$. Очевидно, що цілий розв'язок рівняння (1) утворюється лінійною комбінацією ФСР, тоді як дробовий повинен бути результатом розв'язування неоднорідного рівняння. Для того щоб із ФСР отримати єдиний цілий розв'язок (1), потрібно певним чином пронумерувати складові ФСР та накласти на них деякі початкові умови. Ці дії регламентує

Теорема 2. *Якщо $y_1,\ y_2, \dots, y_n$ утворюють ФСР* (10), *то цілий розв'язок вихідного рівняння* (1) *буде мати таку будову:*

$$u = y_1 + b_n y_2 + b_{2n} y_3 + \dots + b_{n(n-1)} y_n = \sum_{j=1}^{n} b_{n(j-1)} y_j, \quad b_0 = 1\,, \tag{13}$$

де $b_n,\ b_{2n}, \dots, b_{n(n-1)}$ — коефіцієнти (12), *а $y_1, y_2, \dots, y_n$ відповідають наступним початковим умовам:*

$$\begin{array}{lllll} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0, & y_1''(0) = 0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1, & y_2''(0) = 0, & \dots, & y_2^{(n-1)}(0) = 0, \\ y_3(0) = 0, & y_3'(0) = 0, & y_3''(0) = 1, & \dots, & y_3^{(n-1)}(0) = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(0) = 0, & y_n'(0) = 0, & y_n''(0) = 0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{array} \tag{14}$$

При дотриманні вимог (13) *та* (14) *рівняння* (1) *і* (10) *стають еквівалентними.*

Доведення. Для виконання умов (14) розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ повинні мати вигляд:

$$\begin{array}{c} y_1 = 1 + \sum\limits_{i=n}^{\infty} E_{1i}\frac{x^i}{i!}\,'; \\ y_2 = \frac{x}{1!} + \sum\limits_{i=n}^{\infty} E_{2i}\frac{x^i}{i!}\,'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum\limits_{i=n}^{\infty} E_{ni}\frac{x^i}{i!}\,. \end{array} \tag{15}$$

Тут $E_{j\,i} = const \quad (j = 1,\, 2, \dots, n)$. Підставляючи вирази (15) у однорідне рівняння (10), знаходимо для E_{ji} рекурентні співвідношення, подібні до (12).

Нагадуємо, що цілий розв'язок (13) є частиною загального розв'язку (11), коли в останному прийняти $b_{n(j-1)} \neq 0\,, \quad j \in \mathbb{N}$, а всі інші коефіцієнти вважати рівними нулю. Саме таку роль виконує запропонована структура (13). Початкові умови (14) гарантують присутність у цілому розв'язку перших n членів із цілими степенями x та рівність їх відповідним членам загального розв'язку (11). Інші члени приймають цілком конкретні значення, що задовольняють однорідне рівняння (10), внаслідок єдиності розв'язку. Теорема доведена.

Розглянемо структуру правої частини рівняння (10).

$$Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1}B_j\sum{}_j=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{C_{ji}}\frac{x^{-i-j/n}}{\Gamma(1-i-j/n)}\,,\quad \overline{C_{ji}}=B_j\cdot C_{ji}.$$

Раніше було зазначено, що так званий дробовий розв'язок безпосередньо залежить від $Q(x)$. Цей розв'язок запишемо так:

$$v(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{x^{i/n}}{\Gamma(1+i/n)}\,,\quad b_i=0,\text{ якщо}\quad i=kn\,,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{12a}$$

Теорема 3. *Якщо дробовий розв'язок рівняння* (1) *має вигляд* (12*a*), *то права частина еквівалентного рівняння* (10) *дорівнює*

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n(n-1)-1}\overline{C_i}\frac{x^{i/n-n}}{\Gamma(1+i/n-n)}, \tag{16}$$

де $\overline{C_i}=\sum\limits_{k=0}^{n-2}A_{kn}b_{i-kn}\,,\ A_{0n}=1,\ b_i=0$ при $i\le 0$;A_{kn} — *коефіцієнти еквівалентного рівняння* (10).

Доведення. Підставляємо (12а) у (10).

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}b_i\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}+A_{1n}\sum_{i=1}^{\infty}b_i\tfrac{x^{i/n-(n-1)}}{\Gamma\left(2+\frac{i}{n}-n\right)}+A_{2n}\sum_{i=1}^{\infty}b_i\tfrac{x^{i/n-(n-2)}}{\Gamma\left(3+\frac{i}{n}-n\right)}+\cdots+A_{nn}\sum_{i=1}^{\infty}b_i\tfrac{x^{i/n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{C_{ji}}\tfrac{x^{-i-j/n}}{\Gamma\left(1-i-\frac{j}{n}\right)}\,,\quad i\ne kn,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ldots.\end{aligned} \tag{17}$$

Показники степенів x у кожній сумі лівої частини (17) зростають із збільшенням i. Найменше значення показника дорівнює $1/n-n$. Тому для виконання рівності (17) у правій частині слід прийняти

$$\overline{C_{ji}}=0,\quad i>n-1\ \Rightarrow\ Q(x)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\overline{C_{ji}}\frac{x^{-i-j/n}}{\Gamma(1-i-j/n)}. \tag{18}$$

Якщо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах (17), то можна знайти значення $\overline{C_{ji}}$. Але простіше цей процес буде проходити, коли поміняти черговість додавання членів у (18) так, щоб показники степенів зростали, починаючи від першого члена.

$$\begin{aligned}Q(x)=&\sum_{i=1}^{n-1}\overline{C_i}\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}+\sum_{i=n+1}^{2n-1}\overline{C_i}\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}+\sum_{i=2n+1}^{3n-1}\overline{C_i}\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}+\cdots\\&+\sum_{i=n(n-2)+1}^{n(n-1)-1}\overline{C_i}\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}=\sum_{i=1}^{n(n-1)-1}\overline{C_i}\tfrac{x^{i/n-n}}{\Gamma\left(1+\frac{i}{n}-n\right)}\,.\end{aligned}$$

Вираз (16) теореми підтверджено. Для $i=kn,\quad k=1,\ 2,\ldots,n-1$, складові суми автоматично стають рівними нулю, оскільки $1/\Gamma(1+k-n)=0$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, послідовно знаходимо:

$$\begin{gathered}\overline{C}_1=b_1;\ \overline{C}_2=b_2;\ \ldots;\ \overline{C}_{n-1}=b_{n-1};\\ \overline{C}_{n+1}=b_{n+1}+A_{1n}b_1;\ \overline{C}_{n+2}=b_{n+2}+A_{1n}b_2;\ \ldots;\ \overline{C}_{2n-1}=b_{2n-1}+A_{1n}b_{n-1};\\ \overline{C}_{2n+1}=b_{2n+1}+A_{1n}b_{n+1}+A_{2n}b_1;\ \overline{C}_{2n+2}=b_{2n+2}+A_{1n}b_{n+2}+A_{2n}b_2;\ \ldots;\\ \overline{C}_{3n-1}=b_{3n-1}+A_{1n}b_{2n-1}+A_{2n}b_{n-1},\ldots\end{gathered}$$

Шляхом узагальнення цих результатів записуємо:

$$\begin{aligned}&\overline{C}_i=b_i+A_{1n}b_{i-n}+A_{2n}b_{i-2n}+\cdots+A_{n-2,n}b_{i-(n-2)n}=\sum_{k=0}^{n-2}A_{kn}b_{i-kn}\,;\\ &A_{0n}=1,\quad b_0=b_{-1}=b_{-2}=b_{-3}=\ldots=0\,.\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Нам залишається пов'язати структуру дробового розв'язку (12a) із ФСР еквівалентного рівняння (10). Для цього буде викладена

Теорема 4. *Якщо $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ утворюють ФСР рівняння* (10) *і відповідають початковим умовам* (14), *то дробовий розв'язок вихідного рівняння* (1) *має вигляд*

$$\begin{gathered}v(x)=D^{-1/n}\sum_{i=1}^{n}b_{n(i-1)+1}\cdot y_i(x)+D^{-2/n}\sum_{i=1}^{n}b_{n(i-1)+2}\cdot y_i(x)+\cdots+\\ +D^{(n-1)/n}\sum_{i=1}^{n}b_{n(i-1)+n-1}\cdot y_i(x)=\sum_{j=1}^{n-1}D^{-j/n}\sum_{i=1}^{n}b_{n(i-1)+j}\cdot y_i(x)\,.\end{gathered}\tag{19}$$

Доведення теореми не викликає особливих труднощів і може бути проведено аналогічно доведенню теореми 2.

Для розглядуваного раніше еквівалентного рівняння третього порядку ФСР виглядає так (другий підстрочний індекс у позначенні коефіцієнтів A_{k3}, $\ k=1,\ 2,\ 3$, опускаємо):

$$\begin{aligned}&y_1(x)=1-A_3\tfrac{x^3}{3!}+A_1A_3\tfrac{x^4}{4!}-A_3(A_1^2-A_2)\tfrac{x^5}{5!}+A_3(A_1^3-2A_1A_2+A_3)\tfrac{x^6}{6!}-\ldots\,;\\ &y_2(x)=\tfrac{x}{1!}-A_2\tfrac{x^3}{3!}+(A_1A_2-A_3)\tfrac{x^4}{4!}-(A_1^2A_2-A_1A_3-A_2^2)\tfrac{x^5}{5!}+\cdots\,;\\ &y_3(x)=\tfrac{x^2}{2!}-A_1\tfrac{x^3}{3!}+(A_1^2-A_2)\tfrac{x^4}{4!}-(A_1^3-2A_1A_2+A_3)\tfrac{x^5}{5!}+\\ &\qquad\qquad+(A_1^4-3A_1^2A_2+2A_1A_3+A_2^2)\tfrac{x^6}{6!}-\ldots.\end{aligned}$$

Коефіцієнти розв'язків можна знайти за допомогою рекурентних співвідношень, якщо записати ці розв'язки у вигляді $y=E_0+E_1x/1\,!+E_2x^2/2\,!+E_3x^3/3\,!+E_4x^4/4\,!+$ $+\ldots$ і підставити їх у еквівалентне рівняння (10). Наприклад, для $y_1(x)$, $n=3$, будемо мати $E_0=1$, $E_1=E_2=0$, $E_3=-A_3E_0$, $E_4=-A_1E_3$, $E_5-A_1C_4-A_2C_3$, $E_6=-A_1C_5-A_2C_4-A_3C_3$ і т. д. Цілий розв'язок вихідного рівняння (1) при $n=3$ буде таким: $u(x)=y_1(x)+b_3y_2(x)+b_6y_3(x)$; $b_3=-(a_1^3-2a_1a_2+a_3)$; $b_6=$ $=a_1^6-5a_1^4a_2+4a_1^3a_3+6a_1^2a_2^2-6a_1a_2a_3-a_2^3+a_3^2$.

Дробовий розв'язок: $v(x)=D^{-1/3}\left(b_1y_1(x)+b_4y_2(x)+b_7y_3(x)\right)+D^{-2/3}(b_2y_1(x)+$ $+b_5y_2(x)+b_8y_3(x))$; $b_1=-a_1$; $b_2=a_1^2-a_2$; $b_4=a_1^4-3a_1^2a_2+2a_1a_3+a_2^2$; $b_5=-(a_1^5-4a_1^3a_2+$ $+3a_1^2a_3+3a_1a_2^2-2a_2a_3)$; $b_7=-(a_1^7-6a_1^5a_2+5a_1^4a_3+10a_1^3a_2^2-12a_1^2a_2a_3-4a_1a_2^3+3a_1a_3^2+$ $+3a_2^2a_3)$; $b_8=a_1^8-7a_1^6a_2+6a_1^5a_3+15a_1^4a_2^2-20a_1^3a_2a_3-10a_1^2a_2^3+6a_1^2a_3^2+12a_1a_2^2a_3+a_2^4-3a_2a_3^2$.

Певну зацікавленість може викликати ще одне перетворення еквівалентного рівняння (10), що дозволяє зробити його однорідним із одночасним підвищенням порядку.

Теорема 5. *Неоднорідному рівнянню* (10) *відповідає еквівалентне йому однорідне рівняння, яке має вигляд:*

$$\underbrace{D^{n-1}(x^{n-1-\frac{1}{n}}D^{n-1}(x^{n-1-\frac{1}{n}}D^{n-1}(x^{n-1-\frac{1}{n}}D^{n-1}(\ldots D^{n-1}(x^{n-1-\frac{1}{n}}}_{n-1}L(y))\ldots)))) = 0, \quad (20)$$

де $L(y) = D^n y + A_{1n}D^{n-1}y + A_{2n}D^{n-2}y + \cdots + A_{nn}y$.

Доведення може бути виконано безпосередньою перевіркою за участю (10) та (16).

Диференціальне рівняння (20) зводиться до узагальненого рівняння Лапласа [3], а його порядок становить $n^2 - n + 1$.

Як приклад зробимо перетворення, що передбачені торемою 5, для рівняння, яке вже фігурувало в попередніх ілюстраціях із $n = 3$. $y''' + A_1y'' + A_2y' + A_3y = -a_1\frac{x^{-8/3}}{\Gamma(-5/3)} + (a_1^2 - a_2)\frac{x^{-7/3}}{\Gamma(-4/3)} - (a_1a_3 - a_2^2)\frac{x^{-5/3}}{\Gamma(-2/3)} - a_2a_3\frac{x^{-4/3}}{\Gamma(-1/3)}$; $L(y) = y''' + A_1y'' + A_2y' + A_3y$. Домножуємо рівняння на $x^{8/3}$ і беремо першу похідну від правої та лівої його частин.

$$\frac{8}{3}x^{5/3}L(y) + x^{8/3}L'(y) = \frac{1}{3}(a_1^2 - a_2)\frac{x^{-2/3}}{\Gamma(-4/3)} - \frac{a_1a_3 - a_2^2}{\Gamma(-2/3)} - \frac{4}{3}a_2a_3\frac{x^{1/3}}{\Gamma(-1/3)}.$$

Повторно диференціюємо.

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}x^{2/3}L(y) + \frac{16}{3}x^{5/3}L'(y) + x^{8/3}L''(y) = -\frac{2}{9}(a_1^2 - a_2)\frac{x^{-5/3}}{\Gamma(-4/3)} - \frac{4}{9}a_2a_3\frac{x^{-2/3}}{\Gamma(-1/3)}.$$

Домножуємо ще один раз на $x^{5/3}$ і двічі диференціюємо.

$$\tfrac{8}{3}\tfrac{5}{3}\tfrac{7}{3}\tfrac{4}{3}x^{1/3}L(y) + \tfrac{560}{9}x^{4/3}L'(y) + \tfrac{490}{9}x^{7/3}L''(y) + 14x^{10/3}L'''(y) + x^{13/3}L^{(4)}(y) = 0; \ \left(\times x^{-1/3}\right).$$

Розкриваємо оператор $L(y)$ та його похідні.

$$\begin{gathered} x^4\left(y^{(7)} + A_1y^{(6)} + A_2y^{(5)} + A_3y^{(4)}\right) + 14x^3\left(y^{(6)} + A_1y^{(5)} + A_2y^{(4)} + A_3y^{(3)}\right) + \\ +\tfrac{490}{9}x^2(y^{(5)} + A_1y^{(4)} + A_2y''' + A_3y'') + \tfrac{560}{9}x\left(y^{(4)} + A_1y''' + A_2y'' + A_3y'\right) + \\ +\tfrac{1120}{81}\left(y''' + A_1y'' + A_2y' + A_3y\right) = 0. \end{gathered}$$

Групуємо члени при однакових порядках похідних і остаточно записуємо

$$\begin{gathered} x^4y^{(7)} + \left(A_1x^4 + 14x^3\right)y^{(6)} + \left(A_2x^4 + 14A_1x^3 + \tfrac{490}{9}x^2\right)y^{(5)} + \\ + \left(A_3x^4 + 14A_2x^3 + \tfrac{490}{9}A_1x^2 + \tfrac{560}{9}x\right)y^{(4)} + \left(14A_3x^3 + \tfrac{490}{9}A_2x^2 + \tfrac{560}{9}A_1x + \tfrac{1120}{81}\right)y''' + \\ + \left(\tfrac{490}{9}A_3x^2 + \tfrac{560}{9}A_2x + \tfrac{1120}{81}A_1\right)y'' + \left(\tfrac{560}{9}A_3x + \tfrac{1120}{81}A_2\right)y' + \tfrac{1120}{81}A_3y = 0. \end{gathered} \quad (21)$$

Покажемо, що отримане рівняння сьомого порядку у натуральних похідних еквівалентне вихідному рівнянню в дробових похідних (1), коли прийняти для нього $n = 3$. Шукаємо розв'язок (21) у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{\lambda+i}. \quad (22)$$

Підставляємо $y(x)$ у (21) і знаходимо $\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 1/3,\ 2/3,\ 4/3,\ 5/3$. Перші три корені ($\lambda = 0,\ 1,\ 2$) дають вираз для цілого розв'язку, якщо сформувати $y(x)$ для λ=0, 1, 2 відповідно до (14) і пронормувати коефіцієнтами так, як регламентує (13). Наступні корені визначають структуру дробового розв'язку, причому із чотирьох коренів самостійне значення мають лише $\lambda = 1/3,\ 2/3,$ — два інші, як випливає із (12а), повторюють попередні і можуть не враховуватись.

Рисунки 1, 2, 3 демонструють поведінку розв'язків $y(x)$ рівняння (1) для $n = 3$ при різних значеннях коефіцієнтів a_1, a_2, a_3. Наводимо програму для графічної побудови розв'язків рівняння (1) при $n = 3$ у програмному середовищі Mathematica 2. 2.

$$Dy + a_1 D^{2/3} y + a_2 D^{1/3} y + a_3 y = 0\,, \quad y(x) = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{x^{i/3}}{\Gamma(1 + i/3)}.$$

Число N членів ряду вибирається таким, щоб забезпечити потрібну точність обчислення на інтервалі $(0,\ x_{\max})$. Коефіцієнти b_i розраховуються за формулою (12).

Програма: $n = N;\quad b\,[\,0\,] = 1;\quad b\,[\,1\,] = -a_1;\quad b\,[\,2\,] = a_1^2 - a_2;$
$Do[\,b\,[\,i\,] = -a_1 b\,[i-1] - a_2 b\,[i-2] - a_3 b\,[i-3]\,];\quad i = 3;$
$While[i <= n,\ b\,[i] = -a_1 b\,[i-1] - a_2 b\,[i-2] - a_3 b\,[i-3]\ ;$
$s := Sum[b\,[i] * x \wedge (i/3)/Gamma[1 + i/3]\,, \{i,\,0,\,n\}];\quad i = i+1];$
$Plot[s,\ \{x,\,0.01,\,x_{\max}\},\quad GridLines- > Automatic]$

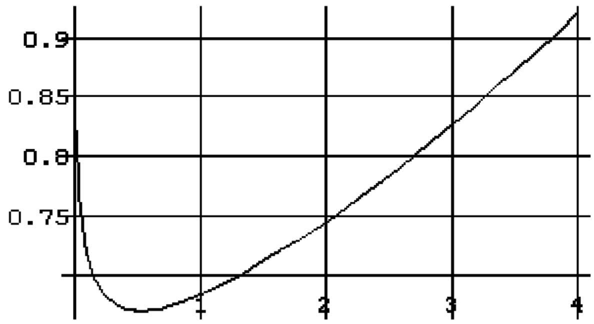

Рис. 1. Характер протікання розв'язку $y(x)$ рівняння (1):
$n = 3$; $a_1 = 1$, $a_2 = -0,5$, $a_3 = -0,1$

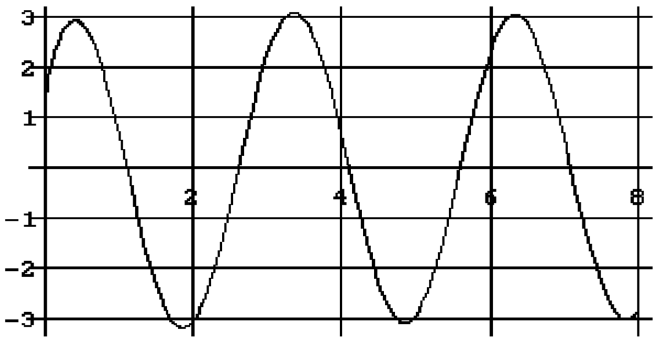

Рис. 2. Розв'язок рівняння (1) для $n = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1,06$, $a_3 = 2$

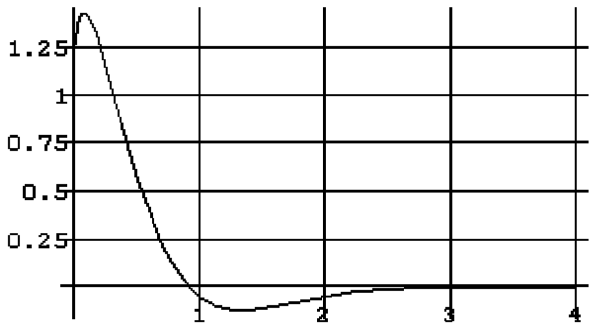

Рис. 3. Залежність $y(x)$ рівняння (1): $n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,1$, $a_3 = 2$

Для неоднорідного рівняння виду (1)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{1-i/n} y(x) = h(x), \tag{23}$$

де $h(x)$ — неперервна на $(0, b)$ функція, частинний розв'язок $y^*(x)$ описується формулою

$$y^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^{-1-k/n} h(x). \tag{24}$$

Коефіцієнти b_k обчислюються за рекурентними залежностями (12). Рівняння (23) також має еквівалентний аналог цілого порядку

$$A_{0n} D^n y(x) + A_{1n} D^{n-1} y(x) + A_{2n} D^{n-2} y(x) + \cdots + A_{nn} y(x) = Q(x) + P(x)\,, \quad A_{0n} = 1\,, \tag{25}$$

причому $Q(x)$ подається (16), а $P(x)$ має вигляд

$$P(x) = A_{0n} \sum_{i=0}^{n(n-1)} b_i D^{n-1-\frac{i}{n}} h(x) + A_{1n} \sum_{i=0}^{n(n-2)} b_i D^{n-2-\frac{i}{n}} h(x) +$$
$$+ A_{2n} \sum_{i=0}^{n(n-3)} b_i D^{n-3-\frac{i}{n}} h(x) + \cdots + A_{n-1,n} b_0 h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{jn} \sum_{i=0}^{n(n-1-j)} b_i D^{n-1-j-\frac{i}{n}} h(x)\,. \tag{26}$$

У справедливості виразів (24) та (26) легко переконатись прямою перевіркою.

Висновки. 1. Розгляд рівнянь (1) дозволяє стверджувати про тісний зв'язок рівнянь цього виду із звичайними лінійними диференціальними рівняннями цілих порядків, а, отже, використовувати добре розроблену теорію звичайних лінійних рівнянь для побудови розв'язків та дослідження властивостей рівнянь дробових порядків.

2. Якщо за критерій інформативності диференціального рівняння брати його порядок, то рівняння виду (1) особливо відзначаються багатством інформації, про що свідчить порядок еквівалентного рівняння (20). Збільшення знаменника n та варіація числових значень коефіцієнтів дають таку багату гаму розв'язків, що нею можна описати самі складні об'єкти і явища. Ще ширші можливості створює застосування неоднорідних рівнянь, а також рівнянь вищих порядків такого виду:

$$\sum_{i=0}^{m \cdot n} a_i D^{m-i/n} y(x) = h(x)\,, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

1. *Самко С. Г. , Килбас А. А. , Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Рибак В. Я. , Король І. Ю. , Рубіш Ю. Ю.* Невизначені інтеграли та похідні дробового порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 90–95.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. – 704 с.

Одержано 17.09.2003