УДК 517.95:511.2

М. М. Симотюк (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ОДНОРІДНИХ ЗА ПОРЯДКОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

The correctness of the problem with multipoint conditions on temporary variable and conditions of periodicity on spatial coordinates for the linear systems of partial differential equations is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншою координатою для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі, доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Багатоточкові задачі для систем рівнянь із частинними похідними вивчались у різних аспектах багатьма авторами (див. наприклад, [1–11] та бібліографію в них). Зокрема, в роботах [1, 2] встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для систем диференціальних рівнянь. До цих робіт примикають праці [3, 4], в яких застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови розв'язків багатоточкових задач в необмежених областях. У працях [5–8] досліджено багатоточкові задачі для окремих класів систем рівнянь із частинними похідними в обмежених областях, розв'язність яких пов'язана з проблемою малих знаменників. У цих роботах аксіоматично накладено умови на швидкість спадання малих знаменників, однак питання про можливість їх виконання не вивчалося. Вперше це питання досліджено в роботі [9], де розглянуто систему рівнянь, однорідних за порядком диференціювання. У [10] узагальнено результати праці [9] на випадок неізотропних систем рівнянь.

Дана праця уточнює і доповнює результати, отримані в [9]. У роботі для систем загального типу, однорідних за порядком диференціювання, встановлено коректну розв'язність для майже всіх векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції, задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t у класах періодичних за x вектор-функцій; при цьому покращено теореми 2, 3 із [9]. У роботі вперше для систем довільного порядку запропоновано метод оцінювання малих знаменників задачі у випадку рівномірного розміщення вузлів інтерполяції.

1. Надалі використовуємо такі позначення: $Q = (0,T) \times \Omega$, Ω — коло одиничного радіуса; C_n^m — кількість комбінацій з n елементів по m; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} B$ — міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ вимірної множини $B \subset \mathbb{C}^n$, $C(m,n)$ — множина всіх наборів $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$, складених з m натуральних чисел $i_1, \ldots, i_m$ таких, що $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$; $W_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \geq 0)$ — простір, який отримується в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ikx)$ за нормою $\|\varphi(x); W_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum\limits_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|)}$; $W_{\alpha,\beta}^{+} = \{\varphi(x) \in W_{\alpha,\beta} : \varphi_k = 0,\, k < 0\}$, $W_{\alpha,\beta}^{-} = \{\varphi(x) \in W_{\alpha,\beta} : \varphi_k = 0,\, k \geq 0\}$, (де

φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$); $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ikx)$ зі скінченною нормою

$$\|u(t,x);C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial^j u(t,x)/\partial t^j;W_{\alpha,\beta}\|;$$

$\overline{W}_{\alpha,\beta}$ — простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}(\varphi^1(x),\ldots,\varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^j(x) \in W_{\alpha,\beta}$, $j = 1,\ldots,m$, з нормою $\|\vec{\varphi}(x);\overline{W}_{\alpha,\beta}\| = \max\limits_{1\leq j\leq m} \|\varphi^j(x);W_{\alpha,\beta}\|$; $\overline{H}_\alpha = \overline{W}_{\alpha,0}$; $\overline{W}^{\,+}_{\alpha,\beta}$ (відповідно, $\overline{W}^{\,-}_{\alpha,\beta}$) — простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}(\varphi^1(x),\ldots,\varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^j(x) \in W^+_{\alpha,\beta}$ (відповідно, $\varphi^j(x) \in \overline{W}^{\,-}_{\alpha,\beta}$), $j = 1,\ldots,m$; $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$ — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$ таких, що $u^j(t,x) \in C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})$, $j = 1,\ldots,m$. У просторі $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$ норму задаємо формулою

$$\|\vec{u}(t,x);C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})\| = \max_{1\leq j\leq m} \|u^j(t,x);C^n([0,T];W_{\alpha,\beta})\|.$$

2. Розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u}(t,x) \equiv \frac{\partial^n \vec{u}(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\partial^n \vec{u}(t,x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = \vec{0}, \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

$$\vec{u}(t_j,x) = \vec{\varphi}_j(x),\ j = 1,\ldots,n,\ 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T,\ x \in \Omega, \tag{2}$$

де $A_j = \|a^j_{q,r}\|^m_{q,r=1}, j = 0,1,\ldots,n-1,$ — квадратні матриці розміру $m\times m$, елементами яких є комплексні числа, $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, $\vec{0} = \mathrm{col}\,(\underbrace{0,\ldots,0}_{m})$, $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}(\varphi^1_j(x),\ldots,\varphi^m_j(x))$, $j = 1,\ldots,n$.

Будемо припускати, що корені характеристичного рівняння $\det\|L(\mu,i)\| = 0$, які позначимо через $\mu_1,\ldots,\mu_{mn}$, є простими. Через n^+ (відповідно, n^-) позначимо кількість тих коренів, дійсна частина яких є додатною (відповідно, від'ємною). Нехай $\Lambda^+ = \max\{0;\max\limits_{1\leq j\leq mn}\{\mathrm{Re}\,\mu_j\}\}$, $\Lambda^- = \min\{0;\min\limits_{1\leq j\leq mn}\{\mathrm{Re}\,\mu_j\}\}$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду Фур'є

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \vec{u}_k(t)\exp(ikx). \tag{3}$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком такої задачі:

$$L\left(\frac{d}{dt},ik\right)\vec{u}_k(t) \equiv \frac{d^n \vec{u}_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j (ik)^{n-j} \frac{d^j \vec{u}_k(t)}{dt^j} = \vec{0}, \tag{4}$$

$$\vec{u}_k(t_j) = \vec{\varphi}_{jk},\ j = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

де $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}(u^1_k(t),\ldots,u^m_k(t))$, $\vec{\varphi}_{jk} = \mathrm{col}(\varphi^1_{jk},\ldots,\varphi^m_{jk})$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec{u}(t,x)$ та $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

Задача (4), (5) для $k = 0$ має єдиний розв'язок $\vec{u}_0(t) = \mathrm{col}(u^1_0(t),\ldots,u^m_0(t))$. Дійсно, з рівняння (4) при $k = 0$ випливає, що кожна функція $u^q_0(t)$, $q = 1,\ldots,m$, є многочленом $(n-1)$-го степеня, коефіцієнти якого однозначно визначаються з умов $u_0^q(t_j) = \varphi_{j0}^q$, $j = 1,\dots,n$, які випливають з умов (5) при $k = 0$.

Якщо $k \neq 0$, то розв'язок задачі (4), (5) зображається формулою (див. [11])

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{k,q} \exp(\mu_q k t) \vec{h}_q, \tag{6}$$

де $\vec{h}_q = \mathrm{col}(h_q^1,\dots,h_q^m)$ — деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\mu_q, i)$, яка є приєднаною до матриці $L(\mu_q, i)$, $q = 1,\dots,mn$. Сталі $C_{k,q}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q = 1,\dots,mn$, знаходяться із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{mn} C_{k,q} \exp(\mu_q k t_j) h_q^s = \varphi_{jk}^s, \ \ s = 1,\dots,m, \ \ j = 1,\dots,n. \tag{7}$$

Нехай $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, — визначник системи (7), тобто

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} h_1^1 \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & h_{mn}^1 \exp(\mu_{mn} k t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m \exp(\mu_1 k t_1) & \dots & h_{mn}^m \exp(\mu_{mn} k t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^1 \exp(\mu_1 k t_n) & \dots & h_{mn}^1 \exp(\mu_{mn} k t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m \exp(\mu_1 k t_n) & \dots & h_{mn}^m \exp(\mu_{mn} k t_n) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$, $\alpha \geq n$, $\beta \geq 0$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{9}$$

Доведення теореми аналогічне до доведення теореми 5.3 з розділу 2 в [11].

Наведемо приклади задач, для яких виконується умова єдиності (9).

Приклад 1. Нехай матриці A_j, $j = 0,1,\dots,n-1$, у рівнянні (1) є верхніми трикутними $A_j = \|a_{q,r}^j\|_{q,r=1}^m$, $\quad a_{q,r}^j \equiv 0$, $r = 1,\dots,q-1$, $q = 2,\dots,m$, $j = 0,1,\dots,n-$ -1, де числа $a_{q,r}^j \in \mathbb{C}$, $q = 1,\dots,m$, $r = 1,\dots,q$, $j = 0,1,\dots,n-1$, є такими, що корені $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ рівняння

$$\det \|L(\mu, i)\| \equiv \prod_{q=1}^{m} \Big(\mu^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{q,q}^j i^{n-j} \mu^j\Big) = 0$$

є дійсними і різними. Тоді задача (1), (2) у просторі $C^n([0,T];\overline{W}_{\alpha,\beta})$ не може мати двох різних розв'язків.

Дійсно, занумеруємо корені $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ таким чином, щоб для довільного q, $q =$ $= 1,\dots,m$, числа $\mu_{n(q-1)+1},\dots,\mu_{nq}$ були коренями рівняння

$$p_q(\mu) \equiv \mu^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{q,q}^j i^{n-j} \mu^j = 0.$$

Вектори $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{mn} \in \mathbb{C}^m$ виберемо так, щоб вектор $\vec{h}_{n(q-1)+j}$ був q-им стовпцем приєднаної матриці $L^*(\mu_{n(q-1)+j}, i)$, $j = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, m$. Матриця $L^*(\mu_{n(q-1)+j}, i) \equiv \equiv \|l_{s,r}^{n(q-1)+j}\|_{s,r=1}^m$, $j = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, m$, у розглядуваному випадку є верхньою трикутною, а для її діагональних елементів $l_{r,r}^{n(q-1)+j}$, $r = 1, \dots, m$, справедливі рівності

$$l_{r,r}^{n(q-1)+j} = \prod_{s=1, s\neq r}^{m} p_s(\mu_{n(q-1)+j}),\ r = 1, \dots, m. \tag{10}$$

Числа $\mu_{n(q-1)+1}, \dots, \mu_{nq}, q = 1, \dots, m$, не є коренями многочленів $p_1(\mu), \dots, p_{q-1}(\mu)$, $p_{q+1}(\mu), \dots, p_m(\mu)$. Тому з (10) випливає, що

$$l_{q,q}^{n(q-1)+j} = \prod_{s=1, s\neq q}^{m} p_s(\mu_{n(q-1)+j}) \neq 0,\ j = 1, \dots, n,\ q = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Таким чином, q-ова компонента вектора $\vec{h}_{n(q-1)+j}$ відмінна від нуля, а його останні $(m-q)$ компонент дорівнюють нулеві:

$$\vec{h}_{n(q-1)+j} = \operatorname{col}(l_{1,q}^{n(q-1)+j}, \dots, l_{q,q}^{n(q-1)+j}, \dots, l_{m,q}^{n(q-1)+j}) =$$

$$= \operatorname{col}(h^1_{n(q-1)+j}, \dots, h^q_{n(q-1)+j}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-q}),\ \ j = 1, \dots, n,\ \ q = 1, \dots, m.$$

Тоді з формули (8) випливає, що для даної задачі

$$\Delta(k) = \pm \prod_{q=1}^{m} \det \| \exp(\mu_{n(q-1)+j}\, k\, t_s)\|_{j,s=1}^n \cdot \prod_{q=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} l_{q,q}^{n(q-1)+j},\ k \neq 0. \tag{12}$$

Оскільки корені $\mu_1, \dots, \mu_{mn}$ є дійсними та різними, то кожен з m визначників у формулі (12) відмінний від нуля [12, с. 58, задача 76], якщо $t_1 < \dots < t_n$. Враховуючи співвідношення (11), звідси отримуємо, що $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Приклад 2. Нехай у рівнянні (1) $n = 2$, A_1 — нульова матриця, а матриця A_0 має такий вигляд:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a^0_{1,1} & a^0_{1,2} & \dots & a^0_{1,m-1} & a^0_{1,m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^0_{1,m} \neq 0.$$

Нехай числа $a^0_{1,j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, є такими, що рівняння $\lambda^m - \sum\limits_{j=0}^{m-1} a^0_{1,m-j} \lambda^j = 0$ має різні додатні корені $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тоді корені $\mu_1, \dots, \mu_{2m}$ рівняння $\det \|L(\mu, i)\| \equiv \equiv \mu^{2m} - \sum\limits_{j=0}^{m-1} a^0_{1,m-j} \mu^{2j} = 0$ можна занумерувати так, щоб $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \dots, m$, $\mu_{m+j} = -\mu_j$, $j = 1, \dots, m$. Зрозуміло, що корені $\mu_1, \dots, \mu_{2m}$ є дійсними і різними.

Легко перевірити, що у даному випадку перший стовпець приєднаної матриці $L^*(\mu_q, i) = \|l^q_{s,r}\|_{s,r=1}^m$, $q = 1, \dots, 2m$, має вигляд

$$\operatorname{col}(l^q_{1,1}, \dots, l^q_{m-1,1}, l^q_{m,1}) = \operatorname{col}(\mu_q^{2(m-1)}, \dots, \mu_q^2, 1),$$

і, отже, є відмінним від нуля. Покладаючи $\vec{h}_q = \mathrm{col}\,(\mu_q^{2(m-1)}, \ldots, \mu_q^2, 1)$, $q = 1, \ldots, 2m$, із формули (8) дістаємо, що

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \mu_1^{2(m-1)} \exp(\mu_1 k t_1) & \ldots & \mu_{2m}^{2(m-1)} \exp(\mu_{2m} k t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^2 \exp(\mu_1 k t_1) & \ldots & \mu_{2m}^2 \exp(\mu_{2m} k t_1) \\ \exp(\mu_1 k t_1) & \ldots & \exp(\mu_{2m} k t_1) \\ \mu_1^{2(m-1)} \exp(\mu_1 k t_2) & \ldots & \mu_{2m}^{2(m-1)} \exp(\mu_{2m} k t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^2 \exp(\mu_1 k t_2) & \ldots & \mu_{2m}^2 \exp(\mu_{2m} k t_2) \\ \exp(\mu_1 k t_2) & \ldots & \exp(\mu_{2m} k t_2) \end{vmatrix}.$$

Для обчислення цього визначника спочатку винесемо з кожного j-го стовпця множник $\exp(\mu_j k t_1)$, $j = 1, \ldots, 2m$ (добуток усіх таких множників дорівнює 1, бо $\mu_{m+j} = -\mu_j$, $j = 1, \ldots, m$), а потім у одержаному визначнику віднімемо від $(m+1)$-го стовпця перший, від $(m+2)$-го стовпця — другий, ..., від $2m$-го стовпця — m-ий. В результаті дістанемо, що

$$\Delta(k) = (-2)^m \prod_{m \geq j > q \geq 1} (\mu_j^2 - \mu_q^2)^2 \cdot \prod_{j=1}^{m} \mathrm{sh}\,(\mu_j k (t_2 - t_1)). \tag{13}$$

Оскільки $\mu_j^2 \neq \mu_q^2$, $m \geq j > q \geq 1$, $\mu_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j = 1, \ldots, m$, то з формули (13) випливає, що $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, коли $t_1 < t_2$.

Отже, і в цьому випадку задача (1), (2) у просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\alpha,\beta})$ не може мати двох різних розв'язків.

4. Припустимо, що умова (9) виконується. Із формул (3), (6), (7) для розв'язку задачі (1), (2) отримуємо формальне зображення у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \vec{u}_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \sum_{j,q=1}^{mn} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \exp(\mu_q k t) \vec{h}_q \psi_{j,k}, \tag{14}$$

де $\mathrm{col}(\psi_{1,k}, \ldots, \psi_{mn,k}) = \mathrm{col}(\varphi_{1k}^1, \ldots, \varphi_{1k}^m; \varphi_{2k}^1, \ldots, \varphi_{2k}^m; \ldots; \varphi_{nk}^1, \ldots, \varphi_{nk}^m)$, $\Delta_{j,q}(k)$, $j, q = 1, \ldots, mn$, — алгебраїчне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначника $\Delta(k)$.

Збіжність ряду (14), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел k. Про це свідчить наступний приклад.

Приклад 3. Для задачі (1), (2), у якій $n = m = 2$, A_1 — нульова матриця, а матриця A_0 має вигляд

$$A_0 = \begin{pmatrix} -(\alpha^2 + \beta^2) & -\alpha^2\beta^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha \neq -\beta,$$

корені $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ характеристичного рівняння занумеруємо так, що $\mu_1 = -\mu_3 = i\alpha$, $\mu_2 = -\mu_4 = i\beta$. Покладемо $\vec{h}_1 = \vec{h}_3 = \mathrm{col}(-\alpha^2, 1)$, $\vec{h}_2 = \vec{h}_4 = \mathrm{col}(-\beta^2, 1)$. Із формули (8) випливає, що для даної задачі визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = -4(\beta^2 - \alpha^2)^2 \sin(k\alpha(t_2 - t_1)) \sin(k\beta(t_2 - t_1)). \tag{15}$$

За теоремою Хінчина [13, с. 48] для довільної додатної функції $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ існує таке число $\theta > 0$, $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, що нерівність $|k\theta - m\pi| < g(|k|)$ має нескінченну множину розв'язків у цілих числах k, m $(k \neq 0)$. Оскільки при фіксованому k нерівність $|k\theta - m\pi| < g(|k|)$ може мати лише скінченну кількість розв'язків у цілих m, то з теореми Хінчина і того, що $|\sin(k\theta)| = |\sin(k\theta - m\pi)| \leq |k\theta - m\pi|$, де m — ціле число, випливає, що нерівність $|\sin(k\theta)| < g(|k|)$ має безмежну кількість розв'язків у цілих числах k. Вибираючи параметри $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і точки t_1, t_2 так, що $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}\backslash\{-1; 1\}$, $\alpha(t_2 - t_1) = \theta$, з формули (15) отримаємо, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, однак нерівність $|\Delta(k)| \leq 4|\beta^2 - \alpha^2|^2 g(|k|)$ може виконуватися для нескінченної кількості цілих k.

Зауваження. Приклад 3 показує, що існують такі значення елементів матриць у системі (1) і такі значення вузлів інтерполяції в умовах (2), при яких модулі знаменників ряду (14) можуть як завгодно швидко апроксимувати нуль, що може зумовлювати розбіжність цього ряду. Нижче буде встановлено, що множина тих значень параметрів задачі (1), (2), при яких наявне явище, аналогічне до описаного у прикладі 3, має міру нуль (за точними формулюваннями ми відсилаємо до теорем 3, 4). У цьому плані приклад 3 відображає, скоріше, виняткову властивість задачі, аніж загальну.

Теорема 2. *Нехай корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими, виконується умова* (9) *і існують такі дійсні сталі α, β^+, β^-, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *цілих чисел k справджуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq \begin{cases} (1+|k|)^{-\alpha} \exp(-\beta^+ k), & k > 0, \\ (1+|k|)^{-\alpha} \exp(\beta^- k), & k < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}^{\,+}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^+\Lambda^+T+\beta^+} \oplus \overline{W}^{\,-}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^-\Lambda^-T-\beta^-}$, $j = 1, \ldots, n$, то в просторі $C^n([0,T]; \overline{W}_{\xi,\eta})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), *який зображується рядом* (14) *і неперервно залежить від функцій $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Згідно з вибором сталих n^+, n^-, Λ^+, Λ^- виконуються оцінки

$$|\Delta_{j,q}(k)| \cdot \|\exp(\mu_q kt)\|_{C^n[0,T]} \leq \begin{cases} C_1 |k|^n \exp(n^+\Lambda^+ Tk), & k > 0, \\ C_1 |k|^n \exp(n^-\Lambda^- Tk), & k < 0, \end{cases} \quad j, q = 1, \ldots, mn. \tag{17}$$

З нерівностей (16), (17) випливає, що

$$\|\vec{u}_k(t)\|_{C^n[0,T]} \leq \begin{cases} C_2 |k|^{\alpha+n} \exp((\beta^+ + n^+\Lambda^+T)k) \sum\limits_{j=1}^{n} \|\vec{\varphi}_{jk}\|, & k > 0, \\ C_2 |k|^{\alpha+n} \exp((n^-\Lambda^-T - \beta^-)k) \sum\limits_{j=1}^{n} \|\vec{\varphi}_{jk}\|, & k < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Із (18) отримуємо, що

$$\begin{gathered} \|\vec{u}(t,x); C^n([0,T]; \overline{W}_{\xi,\eta})\| \leq \\ \leq C_3 \sum_{j=1}^{n} \left(\|\vec{\varphi}_j^{\,+}; \overline{W}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^+\Lambda^+T+\beta^+}\| + \|\vec{\varphi}_j^{\,-}; \overline{W}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^-\Lambda^-T-\beta^-}\| \right), \end{gathered} \tag{19}$$

де $\vec{\varphi}_j^{\,+} \equiv \vec{\varphi}_j^{\,+}(x)$, $\vec{\varphi}_j^{\,-} \equiv \vec{\varphi}_j^{\,-}(x)$, $j = 1, \ldots, n$,— проекції $\vec{\varphi}_j(x)$ відповідно на простори $\overline{W}^{\,+}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^+\Lambda^+T+\beta^+}$, $\overline{W}^{\,-}_{\xi+\alpha+n,\eta+n^-\Lambda^-T-\beta^-}$. З нерівності (19) дістаємо твердження теореми.

5. Для з'ясування питання про можливість виконання нерівностей (16) нам знадобляться допоміжні твердження.

Введемо необхідні позначення. Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_m) \in C(mn, m)$ покладемо:

$$M_\omega = \mu_{i_1} + \ldots + \mu_{i_m}, \quad h_\omega = \det \| h^q_{i_j} \|^m_{j,q=1}, \quad i_j \in \operatorname{set} \omega = \{i_1, \ldots, i_m\}.$$

Для довільних $\omega_1, \ldots, \omega_r \in C(mn, m)$, $1 \le r \le n-1$, таких, що $\operatorname{set} \omega_j \cap \operatorname{set} \omega_q = \emptyset$, $1 \le j < q \le r$, позначимо

$$W_1 = C(mn, m), \;\; W_{j+1}(\omega_1, \ldots, \omega_j) = \{\omega \in W_1 : \operatorname{set} \omega \cap \operatorname{set} \omega_q = \emptyset, 1 \le q \le j\}, \tag{20}$$

$$P_j(\mu, k; \omega_1, \ldots, \omega_j) = \prod_{\omega \in W_j(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}) \setminus \{\omega_j\}} (\mu - M_\omega k)\,, \tag{21}$$

де $j = 1, \ldots, r$. Зауважимо, що степінь многочлена $P_j(\mu, k; \omega_1, \ldots, \omega_j)$ за змінною μ дорівнює $d_j = C^m_{N_j} - 1$, $N_j = m(n - j + 1)$.

Означення 1. Систему (1) будемо називати системою загального типу, якщо виконуються наступні умови:

$$M_\omega \ne M_\sigma \quad \forall\, \omega, \sigma \in C(mn, m), \;\omega \ne \sigma. \tag{22}$$

Приклад 4. Розглянемо такий пучок систем:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} -i(\alpha - 1) & -i\beta \\ -i & \beta - 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t \partial x} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \vec{0}, \tag{23}$$

де $\vec{u} \equiv \vec{u}(t,x) = \operatorname{col}(u^1(t,x), u^2(t,x))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Для заданого пучка (23) множина коренів $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ співпадає з множиною $\{1, -\alpha, i, -i\beta\}$. Легко перевірити, що в розглядуваному випадку умови (22) виконуються, тобто (23) є пучком систем загального типу.

Позначимо: $\vec{Y} \equiv \operatorname{col}(Y_1, \ldots, Y_\nu) \equiv \operatorname{col}(a^j_{q,r};\, q, r = 1, \ldots, m,\, j = 0, 1, \ldots, n-1)$ — вектор розміру $\nu = m^2 n$, складений з коефіцієнтів системи (1); при цьому порядок слідування коефіцієнтів $a^j_{q,r}$ у векторі $\vec{Y}$ визначається за правилом: $a^{j_1}_{q_1, r_1}$ слідує за $a^j_{q,r}$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць $j_1 - j$, $q_1 - q$, $r_1 - r$ є додатною. Між векторами $\vec{Y}$ та системами (1) існує взаємно-однозначна відповідність, яка полягає у щойно введеному співставленні між компонентами вектора $\vec{Y}$ та елементами матриць A_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, системи (1).

Наступна теорема обгрунтовує назву, введену в означенні 1.

Теорема 3. *Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, які задають системи* (1) *незагального типу, є множиною нульової міри Лебега в $\mathbb{C}^\nu$.*

Доведення. Нехай $\Pi_\nu(\rho) = \{\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_\nu) \in \mathbb{C}^\nu : \max\limits_{1 \le j \le \nu} |Y_j| \le \rho\}$, $\rho \ge 1$, а $\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$ — множина тих векторів $\vec{Y} \equiv \operatorname{col}(a^j_{q,r};\, q, r = 1, \ldots, m,\, j = 0, 1, \ldots, n-1) \in \Pi_\nu(\rho)$, для яких:

1) $a^j_{q,r} = 0$, $q = 2, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n-1$;
2) $a^0_{q,q-1} = 1$, $q = 2, \ldots, m$;
3) $a^0_{q,r} = 0$, $q = 2, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, m$, $r \ne q - 1$.

Нехай $l(\mu,\vec{Y}) \equiv \det \|L(\mu,i,\vec{Y})\| = \mu^{mn} + l_1(\vec{Y})\mu^{mn-1} + \ldots + l_{mn}(\vec{Y})$ — характеристичний визначник системи (1), яка задається вектором $\vec{Y}$, а $\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})$ — корені многочлена $l(\mu,\vec{Y})$. Означимо функцію

$$S(\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})) \equiv \prod_{\substack{\sigma\prec\omega,\\ \sigma,\omega\in C(mn,m)}} (M_\sigma(\vec{Y}) - M_\omega(\vec{Y}))^2.$$

Множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu$, які задають системи (1) незагального типу, співпадає з множиною $\{\vec{Y} \in \mathbb{C}^\nu : S(\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})) = 0\}$.

Очевидно, що S є відмінним від тотожного нуля однорідним симетричним многочленом від коренів $\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})$. З основної теореми теорії симетричних многочленів [14] випливає, що S можна подати у вигляді многочлена від $l_1(\vec{Y}),\ldots,l_{mn}(\vec{Y})$:

$$S(\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})) = S_1(l_1(\vec{Y}),\ldots,l_{mn}(\vec{Y})),$$

$$S_1(l_1(\vec{Y}),\ldots,l_{mn}(\vec{Y})) \equiv \sum_{s=(s_1,\ldots,s_{mn})} \beta_s\, l_1^{s_1}(\vec{Y})\ldots l_{mn}^{s_{mn}}(\vec{Y}),\ \ \beta_s \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

де числа β_s, $s = (s_1,\ldots,s_{mn})$, не можуть одночасно дорівнювати нулеві.

Легко перевірити, що для вектора $\vec{Y} \in \widetilde{\Pi}_\nu(\rho)$, $\rho \geq 1$, коефіцієнти $l_j(\vec{Y})$, $j = 1,\ldots,mn$, обчислюються за формулами

$$l_{n(r-1)+j}(\vec{Y}) = (-1)^{r-1} i^j a_{1,r}^{n-j}, \quad r = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{25}$$

Тоді з (24), (25) випливає, що функція

$$S_1(l_1(\vec{Y}),\ldots,l_{mn}(\vec{Y}))\Big|_{\vec{Y}\in\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)} \equiv \sum_{s=(s_1,\ldots,s_{mn})} \beta_s \prod_{r=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Big((-1)^{r-1} i^j a_{1,r}^{n-j}\Big)^{s_{n(r-1)+j}} \tag{26}$$

є многочленом mn змінних $a_{1,j}^q$, $j = 1,\ldots,m$, $q = 0,1,\ldots,n-1$, що є компонентами вектора $\vec{Y}$, і як многочлен цих змінних відмінна від тотожного нуля. Оскільки коефіцієнти $l_j(\vec{Y})$, $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, $j = 1,\ldots,mn$, є многочленами від $Y_1,\ldots,Y_\nu$, то з формули (24) отримуємо, що функція $S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu)$, визначена рівністю $S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu) = S_1(l_1(\vec{Y}),\ldots,l_{mn}(\vec{Y}))$ є многочленом від $Y_1,\ldots,Y_\nu$, а з того, що $S_2\big|_{\vec{Y}\in\widetilde{\Pi}_\nu(\rho)} \not\equiv 0$ (див. (26)), випливає, що $S_2 \not\equiv 0$ у полікрузі $\Pi_\nu(\rho)$. За лемою 1 із [10] для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : |S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu)| \leq \varepsilon\} \leq C_4\varepsilon^{2/s_0}, \quad C_4 = C_4(\rho), \tag{27}$$

де s_0 — степінь многочлена S_2 за сукупністю змінних $Y_1,\ldots,Y_\nu$. із очевидного включення $\{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu) = 0\} \subset \{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : |S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu)| \leq \varepsilon\}$ та нерівності (27) дістаємо, що для довільного $\varepsilon \in (0,1)$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu) = 0\} \leq C_4\varepsilon^{2/s_0}. \tag{28}$$

Із (28) випливає, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : S_2(Y_1,\ldots,Y_\nu) = 0\} = 0$, а, отже, й $\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^\nu}\{\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho) : S(\mu_1(\vec{Y}),\ldots,\mu_{mn}(\vec{Y})) = 0\} = 0$ для довільного $\rho \geq 1$. Таким чином, для довільного $\rho \geq 1$ множина векторів $\vec{Y} \in \Pi_\nu(\rho)$, які відповідають системам (1) незагального типу, має нульову міру Лебега в $\mathbb{C}^\nu$. Враховуючи, що простір

$\mathbb{C}^\nu$ можна покрити зліченною кількістю полікругів $\Pi_\nu(\rho_N)$, $\rho_N = N$, $N = 1, 2, \ldots$, звідси отримуємо твердження теореми.

Для систем загального типу справедливими є наступні леми.

Лема 1. *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді для довільних наборів* $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1} \in C(mn, m)$ *таких, що* $\operatorname{set}\omega_j \cap \operatorname{set}\omega_q = \emptyset$, $1 \le j < q \le n-1$, *справедливі нерівності*

$$|P_j(M_{\omega_j}k, k; \omega_1, \ldots, \omega_j)| \ge C_5(1+|k|)^{d_j},\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Доведення леми є очевидним, бо з формули (21), на підставі умов (22), випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ і для всіх $j = 1, \ldots, n-1$,

$$|P_j(M_{\omega_j}k, k; \omega_1, \ldots, \omega_j)| = \prod_{\omega \in W_j(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1})\backslash\{\omega_j\}} \left|M_{\omega_j}k - M_\omega k\right| \ge C_5(1+|k|)^{d_j}.$$

Лема 2. *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді знайдуться такі набори* $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C(mn, m)$, *що* $\operatorname{set}\omega_j \cap \operatorname{set}\omega_q = \emptyset$, $1 \le j < q \le n$, $\bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{set}\omega_j = \{1, \ldots, mn\}$, *для яких виконуються нерівності*

$$h_{\omega_j} \ne 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Доведення. Для $q = 1, \ldots, mn$, позначимо $\vec{H}_q = \operatorname{col}(\vec{h}_q, \mu_q\vec{h}_q, \ldots, \mu_q^{n-1}\vec{h}_q)$. Нехай $H = \det(\vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_{mn})$. Оскільки для системи загального типу корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ є простими, то вектори $\vec{H}_q$, $q = 1, \ldots, mn$, є лінійно незалежними [15], і, отже, $H \ne 0$. Використовуючи правило Лапласа для розкриття визначника H дістанемо, що

$$H = \sum_{\substack{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),\\ \omega_1 \in W_1,\, \omega_2 \in W_2(\omega_1), \ldots,\\ \omega_{n-1} \in W_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2})}} \pm \prod_{j=1}^{n} h_{\omega_j} g_{\omega_j}^{j-1}, \tag{29}$$

де W_1, $W_j(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1})$, $j = 2, \ldots, n-1$, — множини, визначені формулами (20), $\omega_n \in C(mn, m)$ — набір, що однозначно визначається за наборами $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ умовою $\operatorname{set}\omega_n \cap \operatorname{set}\omega_j = \emptyset$, $j = 1, \ldots, n-1$; $g_\omega = \prod_{j \in \operatorname{set}\omega} \mu_j$. Із формули (29) і з того, що $H \ne 0$, випливає, що виконується нерівність

$$\sum_{\substack{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),\\ \omega_1 \in W_1,\, \omega_2 \in W_2(\omega_1), \ldots,\\ \omega_{n-1} \in W_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2})}} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}||g_{\omega_j}^{j-1}| \ne 0. \tag{30}$$

Хоча б один з доданків у лівій частині нерівності (30) є відмінним від нуля. Тому знайдуться такі набори $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C(mn, m)$, що $\operatorname{set}\omega_j \cap \operatorname{set}\omega_q = \emptyset$, $1 \le j < q \le n$,

$\bigcup\limits_{j=1}^{n} \operatorname{set}\omega_j = \{1,\ldots,mn\}$, для яких справджується нерівність $\prod\limits_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}||g_{\omega_j}^{j-1}| \neq 0$, а, отже, й нерівності $h_{\omega_j} \neq 0$, $j = 1,\ldots,n$.

6. Вияснимо питання про можливість виконання нерівностей (16).

Теорема 4. *Нехай система* (1) *є системою загального типу. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$ *нерівності* (16) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{Z}$, *якщо* $\beta^+ = -n^-\Lambda^-T$, $\beta^- = -n^+\Lambda^+T$, $\alpha > \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j$, *де* $d_j = C_{N_j}^m - 1$, $N_j = m(n-j+1)$, $j = 1,\ldots,n-1$.

Доведення. Нехай $\omega_j \in C(mn,m)$, $j = 1,\ldots,n$, — набори, знайдені в лемі 2. Нехай $W_j \equiv W_j(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1})$, $P_j(\mu,k) \equiv P_j(\mu,k;\omega_1,\ldots,\omega_{j-1})$, $j = 1,\ldots,n-1$, — множини та многочлени, визначені за наборами $\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ формулами (20), (21); $h_j \equiv h_{\omega_j}$, $j = 1,\ldots,n$. Через $\Delta_\omega^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)$, $\omega \in W_j$, позначимо визначник, який отримується з визначника $\Delta(k)$ викреслюванням перших jm рядків та jm стовпців, номери яких складають множину $\operatorname{set}\omega_1 \cup \ldots \cup \operatorname{set}\omega_{j-1} \cup \operatorname{set}\omega$. Для набору ω_j, $j = 1,\ldots,n-1$, покладемо $\Delta_{\omega_j}^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n) \equiv \Delta^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)$.

Із теореми Лапласа про розклад визначника випливають такі рівності:

$$\Delta^{j-1}(k;t_j,\ldots,t_n) = \sum_{\omega \in W_j} \pm h_\omega \exp(M_\omega k t_j) \Delta_\omega^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n), \tag{31}$$

де $j = 1,\ldots,n-1$, $\Delta^0(k;t_1,\ldots,t_n) \equiv \Delta(k)$. Із формул (31), на основі тверджень леми 1 та леми 2, отримуємо, що для довільного $j = 1,\ldots,n-1$

$$|P_j(\partial/\partial t_j,k)\Delta^{j-1}(k;t_j,\ldots,t_n)| = |h_j||P_j(M_{\omega_j}k,k)|\exp(\operatorname{Re} M_{\omega_j} k t_j)\times$$
$$\times|\Delta^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)| \geq \begin{cases} C_6(1+|k|)^{d_j}\exp(n_{\omega_j}^-\Lambda^-Tk)|\Delta^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)|, k>0, \\ C_6(1+|k|)^{d_j}\exp(n_{\omega_j}^+\Lambda^+Tk)|\Delta^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)|, k<0, \end{cases} \tag{32}$$

де $n_{\omega_j}^-$ (відповідно, $n_{\omega_j}^+$) — кількість коренів з від'ємною (відповідно, додатною) дійсною частиною у множині $\{\mu_q : q \in \operatorname{set}\omega_j\}$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ розглянемо такі множини:

$$E_0(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Delta^0(k;t_1,\ldots,t_n)| < \nu_0\},$$

$$E_j(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Delta^{j-1}(k;t_j,\ldots,t_n)| < \nu_{j-1}, |\Delta^j(k;t_{j+1},\ldots,t_n)| \geq \nu_j\},$$

де $j = 1,\ldots,n-1$,

$$\nu_j \equiv \nu_j(k) = \begin{cases} \widetilde{h}_j(1+|k|)^{-\xi_j}\exp(\eta_j^-\Lambda^-Tk), \ k>0, \\ \widetilde{h}_j(1+|k|)^{-\xi_j}\exp(\eta_j^+\Lambda^+Tk), \ k<0, \end{cases} \qquad j = 0,1,\ldots,n-1,$$

$\xi_j = \sum\limits_{q=j+1}^{n-1}(d_q+\varepsilon_q)$, $\varepsilon_j > 0$, $j = 0,1,\ldots,n-2$, $\xi_{n-1} = 0$, $\eta_j^- = \sum\limits_{q=j+1}^{n} n_{\omega_q}^-$, $\eta_j^+ = \sum\limits_{q=j+1}^{n} n_{\omega_q}^+$, $\widetilde{h}_j = \prod\limits_{q=j+1}^{n}|h_q|$, $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Якщо $\vec{t} \in E_j(k)$, $j = 1,\ldots,n-1$, то з оцінок (32) маємо

$$\big|P_j(\partial/\partial t_j,k)\Delta^{j-1}(k;t_j,\ldots,t_n)\big| \geq \begin{cases} C_6(1+|k|)^{d_j}\exp(n_{\omega_j}^-\Lambda^-Tk)\,\nu_j, \ \ k>0, \\ C_6(1+|k|)^{d_j}\exp(n_{\omega_j}^+\Lambda^+Tk)\,\nu_j, \ \ k<0, \end{cases} \tag{33}$$

де $j = 1, \ldots, n-1$. З нерівностей (33) на підставі твердження леми 2 із [10] одержимо, що $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E_j(k; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \leq$

$$\leq \begin{cases} C_7 |k| \sqrt[d_j]{\dfrac{\nu_{j-1}}{\nu_j (1+|k|)^{d_j} \exp(n^-_{\omega_j} \Lambda^- T k)}} \leq C_8 |k|^{-1-\varepsilon_j/d_j}, \ k > 0, \\ C_7 |k| \sqrt[d_j]{\dfrac{\nu_{j-1}}{\nu_j (1+|k|)^{d_j} \exp(n^+_{\omega_j} \Lambda^+ T k)}} \leq C_8 |k|^{-1-\varepsilon_j/d_j}, \ k < 0, \end{cases} \tag{34}$$

де символ $E_j(k; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)$, $j = 1, \ldots, n-1$, позначає множину $\{t_j \in \in [0,T] : (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) \in E_j(k)\}$. інтегруючи оцінку (34) у кубі $[0,T]^{n-1}$ за змінними $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$, дістанемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_j(k) \leq C_8 T^{n-1} |k|^{-1-\varepsilon}, \ \varepsilon = \min_{1 \leq j \leq n-1} \{\varepsilon_j / d_j\} > 0, \ j = 1, \ldots, n-1. \tag{35}$$

Оскільки $\Delta^{n-1}(k; t_n) = h_{\omega_n} \exp(M_{\omega_n} k t_n)$, то, очевидно, виконується нерівність $|\Delta^{n-1}(k; t_n)| \geq \nu_{n-1}(k)$. Тому $E_0(k) = \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} E_j(k)$ і з нерівностей (35) отримаємо, що

$$\sum_{|k|>0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_0(k) \leq \sum_{|k|>0} \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_j(k) \leq C_9 \sum_{|k|>0} |k|^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

Зі збіжності останнього ряду та леми Бореля-Кантеллі [11, с. 13] випливає, що міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\vec{t}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_0(k)$, $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, дорівнює нулеві. Теорема доведена.

7. Із теорем 2, 4 випливає твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$.

Теорема 5. *Нехай система* (1) *є системою загального типу, нехай* $\vec{\varphi}_j(x) \in \in \overline{W}_{\xi+n+\alpha, \eta+(n^+\Lambda^+ - n^-\Lambda^-)T}$, $j = 1, \ldots, n$, *де* $\alpha > \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j$, $d_j = C^m_{N_j} - 1$, $N_j = m(n-j+1)$, $j = 1, \ldots, n-1$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *в просторі* $C^n([0,T]; \overline{W}_{\xi,\eta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (14) *і неперервно залежить від* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

У випадку, коли всі корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є суто уявними, тобто $\Lambda^+ = \Lambda^- = 0$ (система (1) є гіперболічною), з теореми 5 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай система* (1) *є гіперболічною системою загального типу,* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{H}_{\xi+n+\alpha}$, $j = 1, \ldots, n$, *де* $\alpha > \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j, d_j = C^m_{N_j} - 1$, $N_j = m(n-j+1)$, $j = = 1, \ldots, n-1$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *в просторі* $C^n([0,T]; \overline{H}_\xi)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (14) *і неперервно залежить від* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

8. Розглянемо випадок, коли виконуються співвідношення

$$t_j = (j-1) t_0, \ j = 1, \ldots, n, \ 0 < t_0 \leq T/(n-1), \tag{36}$$

тобто вузли $t_1,\dots,t_n$ є рівновіддаленими. У цьому випадку

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix} h_1^1 & \dots & h_{mn}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m & \dots & h_{mn}^m \\ h_1^1\exp(\mu_1 kt_0) & \dots & h_{mn}^1\exp(\mu_{mn}kt_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m\exp(\mu_1 kt_0) & \dots & h_{mn}^m\exp(\mu_{mn}kt_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^1\exp((n-1)\mu_1 kt_0) & \dots & h_{mn}^1\exp((n-1)\mu_{mn}kt_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^m\exp((n-1)\mu_1 kt_0) & \dots & h_{mn}^m\exp((n-1)\mu_{mn}kt_0) \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Для визначника (37) нам буде зручно використовувати позначення $\Delta^{m,n}(k)$, щоб відобразити його залежність від порядку n та розміру m системи.

Теорема 6. *Нехай корені $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими, виконується умова (9) і нехай існують такі дійсні сталі α, β^+, β^-, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k справджується нерівність*

$$|\Delta^{m,n}(k)|\geq\begin{cases}(1+|k|)^{-\alpha}\exp(-\beta^+k), & k>0,\\ (1+|k|)^{-\alpha}\exp(\beta^-k), & k<0.\end{cases} \tag{38}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j(x)\in\overline{W}^+_{\xi+\alpha+n,\eta+m^+\Lambda^+T+\beta^+}\oplus\overline{W}^-_{\xi+\alpha+n,\eta+m^-\Lambda^-T-\beta^-}$, $m^+=\min\{n^+,mn-m\}$, $m^-=\min\{n^-,mn-m\}$, $j=1,\dots,n$, то в просторі $C^n([0,T];\overline{W}_{\xi,\eta})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), (36) який зображається рядом (14) і неперервно залежить від функцій $\vec{\varphi}_j(x)$, $j=1,\dots,n$.

Доведення теореми випливає з очевидних оцінок

$$|\Delta^{m,n}_{j,q}(k)|\cdot\|\exp(\mu_q kt)\|_{C^n[0,T]}\leq\begin{cases}C_{10}|k|^n\exp(m^+\Lambda^+Tk), & k>0,\\ C_{10}|k|^n\exp(m^-\Lambda^-Tk), & k<0,\end{cases}\quad, \ j,q=1,\dots,mn,$$

$$\|\vec{u}_k(t)\|_{C^n[0,T]}\leq\begin{cases}C_{11}|k|^{\alpha+n}\exp((\beta^++m^+\Lambda^+T)k)\sum\limits_{j=1}^n\|\vec{\varphi}_{jk}\|, & k>0,\\ C_{11}|k|^{\alpha+n}\exp((m^-\Lambda^-T-\beta^-)k)\sum\limits_{j=1}^n\|\vec{\varphi}_{jk}\|, & k<0,\end{cases}$$

де $\Delta^{m,n}_{j,q}(k), j,q=1,\dots,mn,$ — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначника $\Delta^{m,n}(k)$.

9. Для доведення метричної теореми про оцінку знизу модуля визначника $\Delta^{m,n}(k)$ нам знадобиться наступне твердження.

Лема 3. *Для визначника $\Delta^{m,n}(k)$ виконуються рівності*

$$\left.\frac{d^l\Delta^{m,n}(k)}{dt_0^l}\right|_{t_0=0}=\begin{cases}0, & \text{якщо } l=0,1,\dots,Q_{m,n}-1,\\ Q_{m,n}!\,k^{Q_{m,n}}H_{m,n}, & \text{якщо } l=Q_{m,n},\end{cases} \tag{39}$$

де $Q_{m,n}=\frac{mn(n-1)}{2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\vec{H}_q=\mathrm{col}(\vec{h}_q,\mu_q\vec{h}_q,\dots,\mu_q^{n-1}\vec{h}_q)$, $q=1,\dots,mn$, $H_{m,n}=\det(\vec{H}_1,\dots,\vec{H}_{mn})$.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за m.

Встановимо спочатку, що лема є справедливою для $m = 1$. Дійсно, із формули (37) випливає, що

$$\Delta^{1,n}(k) = \det \|h_q^1 \exp((j-1)\mu_q k t_0)\|_{j,q=1}^n = \prod_{q=1}^n h_q^1 \prod_{n\ge j>q\ge 1} \big(\exp(\mu_j k t_0) - \exp(\mu_q k t_0)\big).$$

Використовуючи правило диференціювання добутку $\frac{n(n-1)}{2}$ функцій, дістанемо, що

$$\frac{d^l \Delta^{1,n}(k)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = k^l \sum \frac{l!}{\prod\limits_{n\ge j>q\ge 1} s_{j,q}!} \prod_{n\ge j>q\ge 1} \big(\mu_j^{s_{j,q}} - \mu_q^{s_{j,q}}\big), \tag{40}$$

де підсумовування ведеться за всіма такими $\frac{n(n-1)}{2}$ невід'ємними індексами $s_{j,q}$, $n \ge$ $\ge j > q \ge 1$, що $\sum\limits_{n\ge j>q\ge 1} s_{j,q} = l$. Якщо $l < \frac{n(n-1)}{2}$, то кожен з доданків у формулі (40) перетворюється в нуль, бо з нерівності $\sum\limits_{n\ge j>q\ge 1} s_{j,q} < \frac{n(n-1)}{2}$ випливає, що $s_{j_0,q_0} = 0$ (і тоді $\mu_{j_0}^{s_{j_0,q_0}} = \mu_{q_0}^{s_{j_0,q_0}}$) принаймні для однієї пари j_0, q_0, таких, що $n \ge j_0 > q_0 \ge 1$. Якщо ж $l = \frac{n(n-1)}{2}$, то в сумі (40) ненульовим є лише той доданок, який відповідає таким індексам підсумовування $s_{j,q}$, $n \ge j > q \ge 1$, що $s_{j,q} = 1$, для всіх $j, q : n \ge j > q \ge 1$, тому

$$\frac{d^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta^{1,n}(k)}{dt_0^{\frac{n(n-1)}{2}}}\Bigg|_{t_0=0} = k^{\frac{n(n-1)}{2}} \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)! \prod_{n\ge j>q\ge 1} (\mu_j - \mu_q).$$

Таким чином,

$$\frac{d^l \Delta^{1,n}(k)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l = 0, 1, \ldots, Q_{1,n} - 1, \\ Q_{1,n}!\, k^{Q_{1,n}} H_{1,n}, \text{ якщо } l = Q_{1,n}. \end{cases}$$

Покажемо тепер, що з істинності леми для систем розміру m та порядку n випливає її істинність для систем розміру $m+1$ та порядку n. Дійсно, розкриваючи визначник $\Delta^{m+1,n}(k)$ за правилом Лапласа за мінорами $(m+1)$-го, $2(m+1)$-го, ..., $n(m+1)$-го рядків, дістанемо, що

$$\Delta^{m+1,n}(k) = \sum_{\substack{\omega\in C(mn+n,n),\\ \omega=(i_1,\ldots,i_n)}} (-1)^{S_\omega} \Delta_\omega^{m+1,n}(k) \delta_\omega^{1,n}(k), \tag{41}$$

де $S_\omega = m+1+\ldots+n(m+1)+i_1+\ldots+i_n$, $\Delta_\omega^{m+1,n}(k)$ — визначник, який отримується із визначника $\Delta^{m+1,n}(k)$ викреслюванням $(m+1)$-го, $2(m+1)$-го, ..., $n(m+1)$-го рядків та n стовпців, номери яких утворюють множину $\operatorname{set}\omega = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $\delta_\omega^{1,n}(k)$ — визначник, утворений тими елементами визначника $\Delta^{m+1,n}(k)$, які стоять на перетині $(m+1)$-го, $2(m+1)$-го, ..., $n(m+1)$-го рядків та i_1-го, i_2-го, ..., i_n-го стовпців. Оскільки для набору $\omega \in C(mn+n,n)$ виконується рівність

$$\delta_\omega^{1,n}(k) = h_{i_1}^{m+1} \cdot \ldots \cdot h_{i_n}^{m+1} \cdot \prod_{n\ge j>q\ge 1} \big(\exp(\mu_{i_j} k t_0) - \exp(\mu_{i_q} k t_0)\big),$$

то на основі встановленої бази індукції

$$\frac{d^l \delta_\omega^{1,n}(k)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l = 0, 1, \ldots, Q_{1,n} - 1, \\ \prod\limits_{j=1}^{n} h_{i_j}^{m+1} Q_{1,n}!\, k^{Q_{1,n}} \prod\limits_{n \geq j > q \geq 1} \left(\mu_{i_j} - \mu_{i_q}\right), \text{ якщо } l = Q_{1,n}. \end{cases} \tag{42}$$

Зауважимо, що за припущенням індукції

$$\frac{d^l \Delta_\omega^{m+1,n}(k)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } l = 0, 1, \ldots, Q_{m,n} - 1, \\ Q_{m,n}!\, k^{Q_{m,n}} H_{m,n}^\omega, \text{ якщо } l = Q_{m,n}, \end{cases} \tag{43}$$

де $H_{m,n}^\omega$, $\omega \in C(mn+n, n)$ — визначник, який отримується із визначника $H_{m+1,n}$ викреслюванням $(m+1)$-го, $2(m+1)$-го, …, $n(m+1)$-го рядків та n стовпців, номери яких утворюють множину $\operatorname{set}\omega = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

На основі правила Лейбніца диференціювання добутку двох функцій із формул (42), (43) дістаємо, що при $l \leq Q_{m+1,n}$

$$\frac{d^l\left(\Delta_\omega^{m+1,n}(k)\delta_\omega^{1,n}(k)\right)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = \sum_{j=0}^{l} C_l^j \frac{d^j \Delta_\omega^{m+1,n}(k)}{dt_0^j}\Big|_{t_0=0} \frac{d^{l-j}\delta_\omega^{1,n}(k)}{dt_0^{l-j}}\Big|_{t_0=0} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } l < Q_{m,n}, \\ \sum\limits_{j=Q_{m,n}}^{l} C_l^j \dfrac{d^j \Delta_\omega^{m+1,n}(k)}{dt_0^j}\Big|_{t_0=0} \dfrac{d^{l-j}\delta_\omega^{1,n}(k)}{dt_0^{l-j}}\Big|_{t_0=0}, \text{ якщо } Q_{m,n} \leq l \leq Q_{m+1,n} \end{cases} = \tag{44}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } l < Q_{m+1,n}, \\ C_{Q_{m+1,n}}^{Q_{m,n}} \dfrac{d^{Q_{m,n}} \Delta_\omega^{m+1,n}(k)}{dt_0^{Q_{m,n}}}\Big|_{t_0=0} \dfrac{d^{Q_{1,n}}\delta_\omega^{1,n}(k)}{dt_0^{Q_{1,n}}}\Big|_{t_0=0}, \text{ якщо } l = Q_{m+1,n}. \end{cases}$$

Таким чином, із формул (41), (44) отримуємо, що $\dfrac{d^l \Delta^{m+1,n}(k)}{dt_0^l}\Big|_{t_0=0} = 0$, якщо $l = 0, 1, \ldots, Q_{m+1,n} - 1$. Враховуючи, що $H_{m+1,n} = \sum\limits_{\substack{\omega \in C(mn+n,n),\\ \omega=(i_1,\ldots,i_n)}} (-1)^{S_\omega} H_{m,n}^\omega h^\omega$, і що $Q_{m+1,n} = Q_{m,n} + Q_{1,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, з (41), (44) маємо $\dfrac{d^{Q_{m+1,n}} \Delta^{m+1,n}(k)}{dt_0^{Q_{m+1,n}}}\Big|_{t_0=0} =$

$$= Q_{m+1,n}!\, k^{Q_{m+1,n}} \sum_{\substack{\omega \in C(mn+n,n),\\ \omega=(i_1,\ldots,i_n)}} (-1)^{S_\omega} H_{m,n}^\omega h^\omega = Q_{m+1,n}!\, k^{Q_{m+1,n}} H_{m+1,n}.$$

Лема доведена.

10. Встановимо, коли можуть виконуватися нерівності (38).

Теорема 7. *Нехай корені $\mu_1, \ldots, \mu_{mn}$ характеристичного рівняння є простими. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_0 \in (0, T/(n-1)]$ нерівності (38) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k, якщо $\beta^+ \geq -m^-\Lambda^-T$, $\beta^- \geq m^+\Lambda^+T$, $\alpha > 2N - 1$, де $N = (mn)!/(m!)^n$.*

Доведення. Використаємо правило Лапласа для розкриття визначника $\Delta^{m,n}(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тоді із формули (37) дістанемо, що

$$\Delta^{m,n}(k) = \sum_{\substack{(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}),\\ \omega_1\in W_1,\omega_2\in W_2(\omega_1),\ldots,\\ \omega_{n-1}\in W_{n-1}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2})}} \pm \prod_{j=1}^{n} h_{\omega_j} \exp((j-1)M_{\omega_j} k t_0), \tag{45}$$

де W_1, $W_j(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1})$, $j = 2,\ldots,n-1$, — множини, визначені формулами (20), $\omega_n \in C(mn,m)$ — набір, що однозначно визначається за наборами $\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ умовою $\operatorname{set}\omega_n \cap \operatorname{set}\omega_j = \emptyset$, $j = 1,\ldots,n-1$; $h_\omega = \det \|h^q_{i_j}\|^m_{j,q=1}$, $i_j \in \operatorname{set}\omega$. Із формули (45) випливає, що визначник $\Delta^{m,n}(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$F\left(\frac{d}{dt_0}, k\right)\Delta^{m,n}(k) = 0,$$

де

$$F(\lambda,k) = \prod_{\substack{(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}),\\ \omega_1\in W_1,\omega_2\in W_2(\omega_1),\ldots,\\ \omega_{n-1}\in W_{n-1}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2})}} (\lambda - (M_{\omega_2} + 2M_{\omega_3} + \ldots + (n-1)M_{\omega_n})k).$$

Зазначимо, що для степеня N_F многочлена $F(\lambda,k)$ виконуються нерівності $Q_{m,n} + +1 \le N_F \le N$. Нехай $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,N_F$, — корені многочлена $F(\lambda,k)$, $B_F(k) = = 1 + \max\limits_{1\le j\le N_F} |\lambda_j(k)|$, $\Lambda^-_F(k) = \min\limits_{1\le j\le N_F} \operatorname{Re}\lambda_j(k)$, $\psi_F(k) = \max\limits_{t\in[0,T/(n-1)]} \exp(-\Lambda^-_F(k)t)$,

$$G_{F,\Delta^{m,n}}(k) = \max_{1\le j\le N_F}\left\{B_F^{-j}(k)\left|\frac{d^{j-1}\Delta^{m,n}(k)}{dt_0^{j-1}}\bigg|_{t_0=0}\right|\right\}.$$

Згідно з вибором чисел m^+, m^-, Λ^+, Λ^-, із структури коренів $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,N_F$, випливає, що $B_F(k) \le C_{12}(1+|k|)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$\Lambda^-_F(k) \ge (n-1)m^-\Lambda^- k,\;\; \psi_F(k) \le C_{13}\exp(-m^-\Lambda^- Tk),\;\text{ якщо } k > 0,$$

$$\Lambda^-_F(k) \ge (n-1)m^+\Lambda^+ k,\;\; \psi_F(k) \le C_{14}\exp(-m^+\Lambda^+ Tk),\;\text{ якщо } k < 0.$$

Оскільки $G_{F,\Delta^{m,n}}(k) \ge B_F^{-Q_{m,n}-1}(k)\left|d^{Q_{m,n}}\Delta^{m,n}(k)/dt_0^{Q_{m,n}}\big|_{t_0=0}\right|$, то за лемою 3, з рівностей (39), отримуємо, що

$$G_{F,\Delta^{m,n}}(k) \ge Q_{m,n}!\,|k^{Q_{m,n}}H_{m,n}|B_F^{-Q_{m,n}-1}(k) \ge C_{15}(1+|k|)^{-1}.$$

Розглянемо такі множини:

$$E^+(k) = \{t_0 \in [0,T/(n-1)] :\, |\Delta^{m,n}(k)| < (1+|k|)^{-\alpha}\exp(-\beta^+ k)\},\;\; k > 0.$$

$$E^-(k) = \{t_0 \in [0,T/(n-1)] :\, |\Delta^{m,n}(k)| < (1+|k|)^{-\alpha}\exp(\beta^- k)\},\;\; k < 0.$$

За лемою із [16] отримуємо, що при $\beta^+ \ge -m^-\Lambda^- T$, $\alpha > 2N-1$,

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E^+(k) \le C_{16}B_F(k)\left(\tfrac{(1+|k|)^{-\alpha}\exp(-\beta^+ k)\psi_F(k)}{G_{F,\Delta^{m,n}}(k)}\right)^{1/(N_F-1)} \le\\ \le C_{17}(1+|k|)\left((1+|k|)^{1-\alpha}\exp((-\beta^+ - m^-\Lambda^- T)k)\right)^{1/(N_F-1)} \le\\ \le C_{17}(1+|k|)^{1+(1-\alpha)/(N_F-1)} \le C_{17}(1+|k|)^{-1-\widetilde{\varepsilon}_1},\\ k > 0,\quad \widetilde{\varepsilon}_1 = (\alpha-(2N-1))/(N_F-1) > 0.\end{gathered} \tag{46}$$

Аналогічно, з леми у [16] отримуємо, що при $\beta^- \geq m^+\Lambda^+T$, $\alpha > 2N-1$,

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E^-(k) \leq C_{18}B_F(k)\left(\tfrac{(1+|k|)^{-\alpha}\exp(\beta^- k)\psi_F(k)}{G_{F,\Delta^{m,n}}(k)}\right)^{1/(N_F-1)} \leq \\ \leq C_{19}(1+|k|)\left((1+|k|)^{1-\alpha}\exp((\beta^- - m^+\Lambda^+T)k)\right)^{1/(N_F-1)} \leq \\ \leq C_{19}(1+|k|)^{1+(1-\alpha)/(N_F-1)} \leq C_{19}(1+|k|)^{-1-\widetilde{\varepsilon}_1}, \\ k<0, \quad \widetilde{\varepsilon}_1 = (\alpha-(2N-1))/(N_F-1) > 0.\end{gathered} \tag{47}$$

З нерівностей (46), (47) випливає збіжність рядів $\sum\limits_{k>0}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E^+(k)$, $\sum\limits_{k<0}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E^-(k)$. За лемою Бореля-Кантеллі [11, с. 13] міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел t_0, які належать до нескінченної кількості множин $E^+(k)$, $E^-(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, дорівнює нулеві. Теорема доведена.

11. З теорем 6, 7 отримуємо наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2), (36) для майже всіх чисел $t_0 \in (0, T/(n-1)]$.

Теорема 8. *Нехай* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{W}_{\xi+n+\alpha,\eta+(m^+\Lambda^+-m^-\Lambda^-)T}$, $j=1,\dots,n$, *де* $\alpha > 2N-1$, $N=(mn)!/(m!)^n$, *і нехай корені* $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ *характеристичного рівняння є простими. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_0 \in (0,T/(n-1)]$ *в просторі* $C^n([0,T];\overline{W}_{\xi,\eta})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), (36), *який неперервно залежить від* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j=1,\dots,n$.

Наслідок 2. *Нехай система* (1) *є гіперболічною, і нехай корені* $\mu_1,\dots,\mu_{mn}$ *є простими. Якщо* $\vec{\varphi}_j(x) \in \overline{H}_{\xi+n+\alpha}$, $j=1,\dots,n$, $\alpha > 2N-1$, $N=(mn)!/(m!)^n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_0 \in (0,T/(n-1)]$ *в просторі* $C^n([0,T];\overline{H}_\xi)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), (36), *який неперервно залежить від* $\vec{\varphi}_j(x)$, $j=1,\dots,n$.

Висновок. У роботі встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за x для лінійних систем рівнянь із частинними похідними загального типу (див. означення 1), однорідних за порядком диференціювання; доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників задачі у випадку довільного та рівномірного розміщення вузлів інтерполяції і на їх основі встановлено коректність розглядуваної задачі для майже всіх векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції.

Актуальним залишається питання про коректну розв'язність для майже всіх векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції, багатоточкової задачі для довільних (не обов'язково загального типу) систем рівнянь, однорідних за порядком диференціювання.

1. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ, и их приложения. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
2. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973, № 8. – С. 29–34.
3. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.
4. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. Львів. нац. ун–ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 144–152.
5. *Василишин П. Б.* Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 20 с.
6. *Пташник Б. Й.* Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 8. – С. 709–712.

7. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, No 9. – С. 1236–1249.
8. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для лінійних параболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 20 с.
9. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для систем рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матеріали Відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів Фізико–механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України. – Львів, 2002. – С. 156–162.
10. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 107–118.
11. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – В 2-х ч. Ч. 2. М.: Наука, 1978. – 432 с.
13. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
14. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 446 с.
15. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
16. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

Одержано 28.10.2003