УДК 517.927

Н. М. Щобак (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЗОВАНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

The sufficient and necessary conditions of the existence of solutions for some boundary-value problems containing parameters both in the given differential equation and in the non-linear boundary conditions are proved on the basis of the numerical-analytic method of the succesive approximations.

На основі чисельно-аналітичного методу послідовних наближень наведені необхідні та достатні умови існування розв'язків крайових задач з параметрами як в заданому диференціальному рівнянні, так і в нелінійних крайових умовах.

1. Вступ. Параметризовані крайові задачі (ПКЗ) спочатку вивчались у випадку, коли параметри містилися тільки в диференціальному рівнянні [1, 2].

За допомогою чисельно-аналітичного методу послідовних наближень в [3 – 8] були розглянені різні типи ПКЗ з параметрами в нелінійному диференціальному рівнянні та в лінійних крайових умовах .

ПКЗ вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0, T], \ y, f \in \mathbb{R}^n, \\ g(y(0), y(T), \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad \lambda_1 \in [a_1, b_1], \lambda_2 \in [a_2, b_2], \\ y_1(0) = y_{10}, \ y_2(0) = y_{20} \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda_1), \quad t \in [0, T], \ y, f \in \mathbb{R}^n, \\ g(y(0), y(T), \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad \lambda_1 \in [a_1, b_1], \lambda_2 \in [a_2, b_2], \\ y_1(0) = y_{10}, \ y_2(0) = y_{20}, \end{cases}$$

де параметри входять в диференціальне рівняння, яке є нелінійним, та в нелінійні двоточкові крайові умови, були досліджені в [9, 10].

В [11] дана схема чисельно-аналітичного методу послідовних наближень [3, 4] для наступної нелінійної двоточкової ПКЗ

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \lambda), \ t \in [0, T],$$

$$g(y(0), y(T), \lambda) = 0, \tag{1}$$

$$y_1(0) = \alpha_1 + \lambda \sum_{j=2}^{n} \alpha_j y_j(0),$$

яка містить скалярний параметр як в диференціальному рівнянні, так і в нелінійних крайових умовах.

Припускаємо, що функції $f : [0, T] \times G \times [a, b] \to \mathbb{R}^n, (n \geq 2)$ і $g : G \times G \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ є неперервними, де $G \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена зв'язна обмежена область, $\lambda \in J = [a, b]$ — невідомий скалярний параметр, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — задані коефіцієнти.

За допомогою заміни змінних $y(t) = x(t) + w$, де $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — невідомий параметр (Ω вибираємо так, щоб $D + \Omega \subset G$), $x \in D$ — замкнена, обмежена, ПКЗ (1) зводиться в [11] до еквівалентної сім'ї крайових задач з лінійними крайовими умовами

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda), \ t \in [0, T],$$
$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \tag{2}$$
$$x_1(0) = \alpha_1 + \lambda \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [x_j(0) + w_j] - w_1$$

та нелінійною системою визначальних алгебраїчних рівнянь

$$g(x(0) + w, -B^{-1}Ax(0) + w, \lambda) = 0. \tag{3}$$

В [11] припускається для ПКЗ (1), тобто для ПКЗ (2)–(3), виконання наступних умов:

A) функція $f(t, y, \lambda)$ є неперервною в $[0, T] \times G \times J$ і задовольняє умові Ліпшіца:

$$|f(t, u, \lambda) - f(t, v, \lambda)| \leq K \, |u - v| \, ,$$

де $|f(t, y, \lambda)| = (|f_1(t, y, \lambda)|, \ldots, |f_n(t, y, \lambda)|)$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in J$, $\{u, v\} \subset G$, $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$;

B) є непорожньою множина

$$D_\beta = \{y \in \mathbb{R}^n : B(y, \beta(y)) \subset G\} \, ,$$

де

$$\beta(y) = \frac{T}{2}\delta_G(f) + \left|(B^{-1}A + I_n)y\right| ,$$

$$\delta_G(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,y,\lambda)\in[0,T]\times G\times J} f(t, y, \lambda) - \min_{(t,y,\lambda)\in[0,T]\times G\times J} f(t, y, \lambda)\right],$$

де I_n — n-вимірна одинична матриця, $B(y, \beta(y))$ — куля радіуса $\beta(y)$ з центром в точці y;

C) спектральний радіус $r(K)$ матриці K з умови **A)** задовольняє нерівність

$$r(K) < \frac{10}{3T};$$

D) визначена підмножина $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ таким чином

$$U = \left\{u = (u_2, u_3, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : z \in D_\beta\right\} ,$$

де

$$z = \left(\alpha_1 + \lambda \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [u_j + w_j] - w_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\right).$$

Доведено [11], що послідовність функцій

$$\begin{gathered} x_{m+1}(t, w, u, \lambda) = z + \textstyle\int_0^t f(s, x_m(s, w, u, \lambda) + w, \lambda)ds - \\ -\tfrac{t}{T}\textstyle\int_0^T f(s, x_m(s, w, u, \lambda) + w, \lambda)ds - \tfrac{t}{T}\left[B^{-1}A + I_n\right] z, \end{gathered} \tag{4}$$

де $m = 0, 1, 2, \ldots$; $x_0(t, w, u, \lambda) = z \in D_\beta$, $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda \in [a, b]$ — параметр, який міститься в (1), z визначається умовою **D)**, рівномірно збігається:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, w, u, \lambda) = x^*(t, w, u, \lambda)$$

в області

$$(t, w, u, \lambda) \in [0, T] \times \Omega \times U \times [a, b].$$

Гранична функція $x^*(t, w, u, \lambda)$ є розв'язком „збуреної" нелінійної ПКЗ

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda) + \Delta(w, u, \lambda),$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0,$$

$$x_1(0) = \alpha_1 + \lambda \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [x_j(0) + w_j] - w_1,$$

де

$$\Delta(w, u, \lambda) = -\frac{1}{T}\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z + \int_0^T f(s, x(s) + w, \lambda) ds\right]. \tag{5}$$

В [11] показано, що функція $y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*) + w^*$ буде розв'язком ПКЗ (1) тоді і тільки тоді, коли триплет $\{w^*, u^*, \lambda^*\}$ задовольняє систему визначальних рівнянь

$$\Delta(w, u, \lambda) = -\frac{1}{T}\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z + \int_0^T f(s, x^*(s, w, u, \lambda) + w, \lambda) ds\right] = 0, \tag{6}$$

$$g\left(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda\right) = 0, \tag{7}$$

де z визначається умовою **D)**.

Дана стаття містить подальші розширення досліджень, розпочатих в [11]. Встановлено достатні та необхідні умови для існування розв'язку нелінійної ПКЗ (1).

2. Існування достатніх умов. Позначимо $\Delta_m(w, u, \lambda)$ наближене до (6) визначальне рівняння

$$\Delta_m(w, u, \lambda) = -\frac{1}{T}\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z + \int_0^T f(s, x_m(s, w, u, \lambda) + w, \lambda) ds\right] = 0, \tag{8}$$

де $x_m(s, w, u, \lambda)$ обчислюється за формулою (4).
Тоді система (6)–(7) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \Delta_m(w, u, \lambda) = 0, \\ g\left(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda\right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай для нелінійної ПКЗ* (2)–(3) *виконуються умови* **A)**–**D)** *і, крім того:*

E) *існує випукла замкнена область*

$$H_1 = \Omega_1 \times U_1 \times J_1 \subset \Omega \times U \times J, \tag{10}$$

така, що для деякого $m \geq 1$ наближена визначальна система (9) *має в* (10) *єдиний розв'язок* $(w, u, \lambda) = (w_m, u_m, \lambda_m)$, *індекс якого відмінний від нуля;*

F) *на границі* ∂H_1 *області* H_1 *має місце нерівність*

$$\inf_{(w,u,\lambda)\in\partial H_1} |\Delta_m(w, u, \lambda)| > \frac{10}{27}\, TKW(w, u, \lambda), \tag{11}$$

де

$$W(w, u, \lambda) = Q^{m-1} \left(I_n - Q\right)^{-1} \left[Q\delta_G(f) + K \left|\left(B^{-1}A + I_n\right) z\right|\right],$$
$$Q = \frac{3T}{10} K.$$

Тоді для задачі (2)–(3) *існує розв'язок, тобто* $x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*)$. *Причому, початкове значення при* $t = 0$ *цього розв'язку*

$$x^*(0, w^*, u^*, \lambda^*) = z,$$

де $\quad w^* \in \Omega_1, \quad u^* \in U_1, \quad \lambda^* \in J_1,$

$$z = \left(\alpha_1 + \lambda^* \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [u_j^* + w_j^*] - w_1^*, u_2^*, u_3^*, \ldots, u_n^*\right).$$

Доведення. Оцінимо різницю $|\Delta(w, u, \lambda) - \Delta_m(w, u, \lambda)|$. Взявши до уваги нерівність (див. [11])

$$|x^*(t, w, u, \lambda) - x_m(t, w, u, \lambda)| \leq \bar{\alpha}_1(t) W(w, u, \lambda) = \epsilon(x^*(t, w, u, \lambda), x_m(t, w, u, \lambda)),$$

де, згідно [4],

$$\bar{\alpha}_1(t) = \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{t}{T}\right) \leq \frac{5}{9} T,$$

і, використовуючи умову Ліпшіца **A)**, з рівностей (6) і (8) матимемо наступну оцінку:

$$\begin{gathered} |\Delta(w, u, \lambda) - \Delta_m(w, u, \lambda)| = \\ = \left|\tfrac{1}{T} \int_0^T \left[f(s, x^*(s, w, u, \lambda) + w, \lambda) - f(s, x_m(s, w, u, \lambda) + w, \lambda)\right] ds\right| \leq \\ \leq \tfrac{1}{T} K W(w, u, \lambda) \int_0^T \bar{\alpha}_1(s) ds = \tfrac{10}{27}\, TKW(w, u, \lambda) = \epsilon\left(\Delta(w, u, \lambda), \Delta_m(w, u, \lambda)\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Грунтуючись на нерівностях (11), (12), аналогічно як в Теоремах 3.1; 17.1 з [3], можемо довести, що векторні поля $\Delta(w, u, \lambda)$, $\Delta_m(w, u, \lambda)$ є гомотопними. Це означає, що точне визначальне рівняння (6), а тому і визначальна система (6)–(7) ПКЗ (2)–(3) (тобто ПКЗ (1)) має в області H_1 хоча б один розв'язок $w = w^*$, $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$.

Згідно [11], можна зробити висновок, що ПКЗ (2)–(3) має хоча б один розв'язок $x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*)$. Причому,

$$x^*(0, w^*, u^*, \lambda^*) = z = \left(\alpha_1 + \lambda^* \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [u_j^* + w_j^*] - w_1^*, u_2^*, u_3^*, \ldots, u_n^*\right),$$

де $w^* \in \Omega_1$, $u^* \in U_1$, $\lambda^* \in J_1$.

Зауваження. Очевидно, що функція $y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*) + w^*$ є розв'язком ПКЗ (1).

3. Існування необхідних умов.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* **A)**–**D)**, *тоді для будь-яких триплетів*

$$(w^{'}, u^{'}, \lambda^{'}),\ (w^{''}, u^{''}, \lambda^{''}) \in \Omega \times U \times J \tag{13}$$

мають місце наступні оцінки

$$\left|x^*(t, w^{'}, u^{'}, \lambda^{'}) - x^*(t, w^{''}, u^{''}, \lambda^{''})\right| \leq$$
$$\leq \left[I_n + \bar{\alpha}_1(t) K \left(I_n - Q\right)^{-1}\right] \left[\left|z^{'} - z^{''}\right| + b_1(z^{'}, z^{''})\right] + \bar{\alpha}_1(t) K \left(I_n - Q\right)^{-1} \left|w^{'} - w^{''}\right|, \tag{14}$$

де

$$b_1(z^{'}, z^{''}) = \left[B^{-1}A + I_n\right] \left|z^{'} - z^{''}\right|;$$

$$z^{'} = \left(\alpha_1 + \lambda^{'} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [u_j^{'} + w_j^{'}] - w_1^{'}, u_2^{'}, u_3^{'}, \ldots, u_n^{'}\right);$$

$$z^{''} = \left(\alpha_1 + \lambda^{''} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [u_j^{''} + w_j^{''}] - w_1^{''}, u_2^{''}, u_3^{''}, \ldots, u_n^{''}\right).$$

Доведення. На основі (4) маємо:

$$x_1(t, w^{'}, u^{'}, \lambda^{'}) - x_1(t, w^{''}, u^{''}, \lambda^{''}) =$$
$$= \left(z^{'} - z^{''}\right) + \int_0^t \left[f\left(s, z^{'} + w^{'}, \lambda^{'}\right) - f\left(s, z^{''} + w^{''}, \lambda^{''}\right)\right] ds -$$
$$- \tfrac{t}{T} \int_0^T \left[f\left(s, z^{'} + w^{'}, \lambda^{'}\right) - f\left(s, z^{''} + w^{''}, \lambda^{''}\right)\right] ds + \tfrac{t}{T} \left[B^{-1}A + I_n\right] \left(z^{''} - z^{'}\right).$$

Використовуючи умову Ліпшіца, аналогічно, як в Лемі 17.1 із [3], з останньої рівності отримаємо

$$\left|x_1(t, w^{'}, u^{'}, \lambda^{'}) - x_1(t, w^{''}, u^{''}, \lambda^{''})\right| \leq$$
$$\leq \left[I_n + K\alpha_1(t)\right] \left|z^{'} - z^{''}\right| + K\alpha_1(t) \left|w^{'} - w^{''}\right| + b_1(z^{'}, z^{''}).$$

Аналогічно

$$\left|x_2(t, w^{'}, u^{'}, \lambda^{'}) - x_2(t, w^{''}, u^{''}, \lambda^{''})\right| \leq$$
$$\leq \left[I_n + K\alpha_1(t) + K^2\alpha_2(t)\right] \left|z^{'} - z^{''}\right| + \left[K\alpha_1(t) + K^2\alpha_2(t)\right] \left|w^{'} - w^{''}\right|$$
$$+ \left[I_n + K\alpha_1(t)\right] b_1(z^{'}, z^{''}),$$

де

$$b_1(z^{'}, z^{''}) = \left[B^{-1}A + I_n\right] \left|z^{'} - z^{''}\right|;$$

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds;$$

$$\alpha_0(t)=1,\ \ \alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна записати

$$\left|x_m(t,w',u',\lambda')-x_m(t,w'',u'',\lambda'')\right|\le$$

$$\le\left[\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(t)K^i\right]\left|z'-z''\right|+\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)K^i\right]\left|w'-w''\right|+\left[\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i(t)K^i\right]b_1(z',z''),\quad (15)$$

Використовуючи оцінку Леми 2.4 з [4]

$$\alpha_{m+1}(t)\le\left(\frac{3}{10}T\right)^m\bar{\alpha}_1(t),$$

де $\bar{\alpha}_1(t)=\frac{10}{9}\alpha_1(t)$, і умову **F)**, тобто те, що $\lambda(Q)<1$, де $Q=\frac{3T}{10}K$, та переходячи до границі при $m\to\infty$, з нерівності (15) випливає оцінка (14), що і потрібно було довести.

Лема 2. *Нехай для нелінійної ПКЗ* (1) *виконуються умови* **A)**–**D)**. *Тоді функція* $\Delta(w,u,\lambda)$ *вигляду* (5) *визначена і неперервна в області* $\Omega\times U\times J$, *і для будь-яких триплетів* (13) *виконується наступна нерівність*

$$\left|\Delta(w',u',\lambda')-\Delta(w'',u'',\lambda'')\right|\le$$

$$\le\frac{b_1(z',z'')}{T}+\left[K+\frac{10}{27}K^2T\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left[\left|z'-z''\right|+\left|w'-w''\right|+b_1(z',z'')\right]\quad (16)$$

$$=\varepsilon\left(\Delta(w',u',\lambda'),\Delta(w'',u'',\lambda'')\right).$$

Доведення. Згідно [11] для всіх $(w,u,\lambda)\in\Omega\times U\times J$ границя функції (4) є неперервною функцією. Тому при $(w,u,\lambda)\in\Omega\times U\times J$ функція $\Delta(w,u,\lambda)$ також неперервна і обмежена в даній області.

Враховуючи (5), матимемо

$$\Delta(w',u',\lambda')-\Delta(w'',u'',\lambda'')=-\frac{1}{T}\left[B^{-1}A+I_n\right]\left(z'-z''\right)-$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T\left[f\left(s,x(s,w',u',\lambda')+w',\lambda'\right)-f\left(s,x(s,w'',u'',\lambda'')+w'',\lambda''\right)\right]ds.$$

За допомогою безпосередніх обчислень можемо отримати

$$\left|\Delta(w',u',\lambda')-\Delta(w'',u'',\lambda'')\right|=\frac{b_1(z',z'')}{T}+$$
$$+K\left[\left|z'-z''\right|+b_1(z',z'')\right]+\frac{K^2}{T}\left(I_n-Q\right)^{-1}\left[\left|z'-z''\right|+b_1(z',z'')\right]\int_0^T\bar{\alpha}_1(t)dt+$$
$$+\frac{K^2}{T}\left(I_n-Q\right)^{-1}\left|w'-w''\right|\int_0^T\bar{\alpha}_1(t)dt+K\left|w'-w''\right|.$$

Враховуючи рівність $\int_0^T\bar{\alpha}_1(t)dt=\frac{10}{27}T^2$, з останньої нерівності випливає

$$\left|\Delta(w',u',\lambda')-\Delta(w'',u'',\lambda'')\right|=\frac{b_1(z',z'')}{T}+K\left[\left|z'-z''\right|+b_1(z',z'')\right]+$$
$$+\frac{10}{27}K^2T\left(I_n-Q\right)^{-1}\left[\left|z'-z''\right|+b_1(z',z'')\right]+\frac{10}{27}K^2T\left(I_n-Q\right)^{-1}\left|w'-w''\right|+K\left|w'-w''\right|.$$

Групуючи доданки в останньому співвідношенні, отримаємо потрібну нам нерівність (16).

Наступне твердження дає необхідні умови існування розв'язку ПКЗ (2)– (3) (або ПКЗ (1)).

Теорема 2. *Нехай, для ПКЗ* (2)–(3) *виконуються умови* **A)**–**D)**. *Для того, щоб в деяку область*

$$H_2 = \Omega_2 \times U_2 \times J_2 \subset \Omega \times U \times J,$$

входив триплет (w^*, u^*, λ^*) *даного розв'язку*

$$x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, w^*, u^*, \lambda^*)$$

ПКЗ (2)–(3) (*або, що теж саме, ПКЗ* (1)) *необхідно, щоб для кожного* m *і довільного триплету* $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \in H_2$ *виконувалась наступна нерівність*

$$\Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \leq$$
$$\leq \sup_{(w,u,\lambda)\in H_2} \left\{ \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T \left(I_n - Q\right)^{-1} \right] \left[|\bar{z} - z| + |\bar{w} - w| + b_1(\bar{z}, z) \right] \right\} +$$
$$+\varepsilon \left(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \right), \tag{17}$$

де $b_1(z', z'') = \left[B^{-1}A + I_n\right] \left|z' - z''\right|$, *а вектор* $\varepsilon \left(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \right)$ *задається правою частиною* (12).

Доведення. Нехай $w = w^*$, $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$ задовольняють систему визначальних рівнянь (6)–(7), тобто $x^*(t, w^*, u^*, \lambda^*)$ є розв'язком ПКЗ (2)–(3).

Запишемо нерівність (16) для триплетів $(w', u', \lambda') = (\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ та $(w'', u'', \lambda'') = (w, u, \lambda)$.

Тоді

$$\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \leq \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T \left(I_n - Q\right)^{-1} \right] \left[|\bar{z} - z| + |\bar{w} - w| + b_1(\bar{z}, z) \right].$$

З (12) для $(w, u, \lambda) = (\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ матимемо

$$\Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \leq \Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) + \varepsilon \left(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}) \right).$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, отримаємо потрібне співвідношення (17), що і потрібно було довести.

1. *Лучка А. Ю.* Применение итерационных процессов к краевым задачам дифференциальных уравнений с параметрами // Докл. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – №10. – С. 22–27.
2. *Fečkan M.* Parametrized singular boundary-value problems // J. Math. Anal. Appl. – 1994. – **188**. – P. 417–425.
3. *Самойленко А. М., Ронто М. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.– К.: Наукова думка, 1992. – 279 с.
4. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore: World Scientific, 2000. – 455 p.
5. *Ронто Н. И., Король И. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №8. – С. 1031–1043.

6. *Ronto M.* On numerical-analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1996. – **36**, №2. – P. 125–132.
7. *Ronto M.* On some existence results for parametrized boundary-value problems // Publ.Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1997. –**37**. – P. 95–103.
8. *Ronto M., Tégen M.* Numerical-analytic methods for investigating three point boundary-value problems with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1999. – **40**.– P. 67–77.
9. *Rontó M.* On non-linear boundary-value problems containing parameters // Archivum Mathematicum. – Brno, 2000. – **36**. – P. 585–593.
10. *Rontó M.* On the investigation of parametrized non-linear boundary-value problems // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 4409–4420.
11. *Ronto M., Shchobak N.* On the investigation of some parametrized non-linear boundary value problems // Шості Боголюбовські читання: Тез. допов. конф. (Чернівці, 26-30 серп. 2003 р.). – Київ, 2003. – С. 295.

Одержано 29.09.2003