УДК 519.7

О. Б. Кулацька, О. Ю. Червак (Ужгородський нац. ун-т)

ЛЕКСИКОГРАФІЧНА ЗАДАЧА ПРО РАНЕЦЬ У ЗВ'ЯЗКУ З ПОБУДОВОЮ ВІДТИНАНЬ В АЛГОРИТМАХ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

In the given article the method of beefing-up of scissoring Dantzig in algorithms Gomory of integer programming is esteemed.

В даній статті розглядається метод підсилення відтинання Данціга в алгоритмах Гоморі цілочислового програмування.

Метод відтинань для розв'язання цілочислової задачі лінійного програмування може бути реалізований різними алгоритмами, кожен з яких визначається способом побудови відтинань. В кожній конкретній ситуації існує множина правильних відтинань [1], на якій можна визначити відношення "сили" [2], за яким або два будь-які відтинання вважаються "рівносильними", або одне з них "сильніше" за друге, або вони непорівнянні. В даній роботі разглядаються алгоритми Гоморі, які базуються на двоїстому симплексному алгоритмі, в яких будуються відтинання, порівнянні з відтинанням Данціга [3]. Підсилення цього відтинання зводиться до розв'язання лексикографічної задачі про ранець [4, 5]. Розглядається задача цілочислового лінійного програмування:

$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

$$x_j \text{ — ціле},\ j = 0, 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Припустимо, що задача (1)–(4) розв'язується алгоритмом типу Гоморі, який базується на лексикографічному двоїстому симплексному алгоритмі. Нехай на будь-якому кроці цього алгоритму одержана наступна лексикографічно оптимальна канонічна форма, відповідний оптимальний базисний розв'язок якої не задовольняє умову цілочисловості (4):

$$x_i = t_{i0} + \sum_{j \in N} t_{ij}(-x_j),\ i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

N — множина індексів небазисних змінних. $\widehat{x} = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n) = (t_{00}, t_{10}, ..., t_{n0})$ — відповідний оптимальний базисний розв'язок, що визначається цією канонічною формою (5); $l = \min\{i \in \{0, 1, ..., n\} | \ \widehat{x}_i \text{ — неціле}\}$, якщо задача (1)–(4) розв'язується за першим алгоритмом Гоморі, або $l = \min\{i \in \{0, 1, ..., n\} | \ \widehat{x}_i < 0\}$, якщо ця задача розв'язується за третім алгоритмом Гоморі. Відтинанням Данціга є нерівність вигляду

$$\sum_{j \in N} x_j \geq 1. \tag{6}$$

Зазначимо, в даному конкретному випадку припускається, що задача (1)–(4) розв'язується першим або третім алгоритмом Гоморі [1], тобто вважається, що змінні x_j, $j \in N$, також повинні задовольняти умову цілочисловості (4). Позначимо через D^{l+1} множину цілочислових точок в просторі $\mathbb{R}^{l+1}$ змінних $x_0, x_1, ..., x_l$; $\bar{t}^{l+1} = (\bar{t}_0, \bar{t}_1, ..., \bar{t}_l)$ — лексикогрічно найбільша точка множини D^{l+1}, яка задовольняє умовам (3) і (4), і яка лексикографічно небільша за точку $\widehat{x}^{l+1} = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_l)$. Якщо задача (1)–(4) розв'язується за першим алгоритмом Гоморі, то $\bar{t}^{l+1} = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_{l-1}, [\widehat{x}_l])$, а якщо вона розв'язується за третім алгоритмом Гоморі , то $\bar{t}^{l+1} = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_{l-1}, 0)$. (Тут $[a]$ — ціла частина числа a.)

Розглянемо скалярну функцію

$$x_{-1} = \sum_{j \in N} (-x_j), \tag{7}$$

векторну функцію (зі значеннями в $\mathbb{R}^{l+2}$)

$$\bar{x}^{l+2} = \bar{t}_0^{l+2} + \sum_{j \in N} \bar{t}_j^{l+2} (-x_j), \tag{8}$$

з координатами $x_{-1}, x_0, ..., x_l$, визначеними за формулами (5) і (7), а також векторне лексикографічне обмеження

$$\bar{t}_0^{l+1} + \sum_{j \in N} \bar{t}_j^{l+1} (-x_j) \geq^L \bar{t}^{l+1}, \tag{9}$$

де $\bar{t}_j^{l+1} = (t_{0j}, t_{1j}, ..., t_{lj})$, $j \in \{0\} \cup N$. За функцією (8) і обмеженням (9) побудуємо лексикографічну задачу про ранець [5]:

$$\max{}^L \sum_{j \in N} \bar{t}_j^{l+2} x_j, \tag{10}$$

$$\sum_{j \in N} \bar{t}_j^{l+1} x_j \leq^L \bar{t}_0^{l+1} - \bar{t}^{l+1}, \tag{11}$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ j \in N. \tag{12}$$

Нехай $\bar{x}^N = \{\bar{x}_j^N,\ j \in N\}$ — оптимальний розв'язок задачі (10)–(12). Тоді вірна наступна теорема.

Теорема. *Нерівність вигляду*

$$\sum_{j \in N} x_j \geq \sum_{j \in N} \bar{x}_j^N \tag{13}$$

є правильним відтинанням, не слабшим за відтинання (6), *тобто*

$$\sum_{j \in N} \bar{x}_j^N \geq 1. \tag{14}$$

Доведення. Задача (10)–(12) еквівалентна задачі.

$$\min{}^L \left(\bar{t}_0^{l+2} + \sum_{j \in N} \bar{t}_j^{l+2} (-x_j) \right), \tag{15}$$

$$\vec{t}_0^{\,l+1} + \sum_{j\in N} \vec{t}_j^{\,l+1}(-x_j) \geq^L \vec{t}^{\,l+1}, \tag{16}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j \in N. \tag{17}$$

Отже, $\bar{x}_{-1} = \sum_{j\in N}(-\bar{x}_j)$ є мінімумом функції (7), при обмеженнях (16) і (17), тобто максимумом функції $-x_{-1} = \sum_{j\in N} x_j$. Так як, $\vec{t}_0^{\,l+1} \neq \vec{t}^{\,l+1}$, то $\bar{x}_{-1} < 0$, а точніше, $\bar{x}_{-1} \leq -1$. Отже, виконується нерівність (14), тобто нерівність (13) тягне за собою нерівність (6), тобто нерівність (13) є відтинанням.

Умова правильності відтинання (13) випливає з визначення вектора $\vec{t}^{\,l+1}$ і з постановки задачі (15)–(17). Теорема доведена.

Таким чином, ця теорема дає можливість зменшити число кроків цих двох алгоритмів Гоморі при розв'язуванні задачі (1)–(4). При цьому, очевидно, використання правильного відтинання (14) зберігає цілочисловість коефіцієнтів канонічних форм, які будуються в третьому алгоритмі.

1. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. *Вотяков А. А.* Целочисленное программирование, сравнение отсечений // Экономика и мат. методы. – 1972. – **8**, №1. – С. 107–116.
3. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщение и применение. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
4. *Червак Н. К.* Алгоритмы линейно-упорядоченного поиска для некоторых классов задач оптимизации. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Инст. кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР. – К., 1986. – 17 с.
5. *Кулацька О. Б.,Червак О. Ю., Червак Ю. Ю.* Лінійна задача лексикографічної оптимізації псевдобульової функції з одним лексикографічним обмеженням // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 58–68.

Одержано 8.09.2003