УДК 512.547.25

О. А. Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО НЕЗВІДНІ МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДАНОГО СТЕПЕНЯ СКІНЧЕННОЇ p-ГРУПИ НАД НАПІВПЕРВІСНИМ КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Let R be a commutative semiprime local ring of characteristic p (p is a prime). It has been proved, that the number of nonequivalent irreducible matrix R-representations of finite p-group G of order $|G| > 2$ of arbitrary greater then one degree is infinite if residue class ring of ring R is infinite.

Нехай R — комутативне напівпервісне локальне кільце характеристики p (p — просте число). Показано, що число нееквівалентних незвідних матричних R-зображень скінченної p-групи G порядку $|G| > 2$ наперед заданого більшого ніж одиниця степеня нескінченне, якщо поле лишків кільця R нескінченне.

Добре відомо [1], що довільне матричне зображення скінченної групи G незвідне над дедекіндовою областю R тоді і тільки тоді, коли воно незвідне над її полем відношень F, а число незвідних нееквівалентних F-зображень групи G не перевищує порядок групи G. Якщо F — поле алгебраїчних чисел з кільцем цілих величин R, то за теоремою Жордана-Цассенхауза множина F-еквівалентних зображень групи G розпадається на скінченне число класів R-еквівалентних зображень групи G (див. також [2, 3]). П. М. Гудивок та Є. Я. Погоріляк [4, 5] показали, що над нетеровим факторіальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень скінченної p-групи H порядку $|H| > 1$ довільного наперед заданого степеня $n > 1$. В [6–8] з'ясовується, коли множина степенів всіх незвідних матричних зображень скінченної p-групи над комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p^s скінченна. В [9] з'ясовано коли є скінченною множина нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над комутативним артіновим локальним кільцем характеристики p^s ($s > 0$), яке містить ненульовий нільпотентний елемент.

В роботі вияснється, коли є скінченною множина всіх нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи G порядку $|G| > 1$ над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики p, кільце класів лишків якого нескінченне.

Нехай R — комутативне кільце з одиницею. Далі через $\operatorname{Rad} R$ будемо позначати радикал Джекобсона кільця R, $\operatorname{rad} R$ — первісний радикал кільця R, R^* — мультиплікативну групу кільця R, $\det M$ — детермінант квадратної матриці M над комутативним кільцем, $\operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ — діагональна матриця порядку n з діагональними елементами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\operatorname{Ann} a = \{x \in R | ax = 0\}$ — анулятор елемента $a \in R$ у кільці R.

Теорема 1. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$ і R — комутативне нетерове локальне кільце характеристики p, яке не є цілісним, з нескінченним полем лишків і $\operatorname{rad} R = \{0\}$. Існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних R-зображень групи G довільного наперед заданого парного степеня n.*

Доведення. Очевидно, досить розглянути випадок, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку p. Нехай u і v — два елементи кільця R такі, що $uv = 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. З [8] випливає, що відображення Γ_λ виду $a \to \Gamma_\lambda(a) = E + S(\lambda)$, де E — одинична матриця порядку n, $S(\lambda) = uS_1 + vS_2(\lambda)$ — квадратна матриця порядку n над кільцем R,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

є незвідним R-зображенням групи G для будь-якого $\lambda \in R^*$. Тут v^2q_1, $v^2q_2, \dots, v^2q_l$ — мінімальна система твірних ідеалу $v^2 \operatorname{Rad} R$ ($q_i \in R$; $i = 1, \dots, l$; $l > 0$).

Припустимо, що зображення Γ_λ еквівалентне зображенню $\Gamma_{\lambda'}$, де $\lambda, \lambda' \in R^*$, $\lambda \not\equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Тоді для деякої матриці $C \in \mathrm{GL}(n, R)$

$$uC^{-1}S_1C + vC^{-1}S_2(\lambda)C = C^{-1}\Gamma_\lambda(a)C = \Gamma_{\lambda'}(a) = uS_1 + vS_2(\lambda'). \tag{1}$$

З (1) випливає, що $u^2C^{-1}S_1C = u^2S_1$, $v^2C^{-1}S_2(\lambda)C = v^2S_2(\lambda')$. Звідси одержимо, що

$$u^2S_1C = u^2CS_1, \tag{2}$$

$$v^2S_2(\lambda)C = v^2CS_2(\lambda'). \tag{3}$$

Нехай $C = ||c_{ij}||$, ($c_{ij} \in R$; $i, j = 1, \dots, n$). З (2) одержимо $u^2c_{2i-1\,2i-1} = u^2c_{2i\,2i}$ ($i = 1, \dots, \frac{n}{2}$). Тоді $c_{2i-1\,2i-1} \equiv c_{2i\,2i} \pmod{\operatorname{Rad} R}$ ($i = 1, \dots, \frac{n}{2}$). З (3) одержимо $v^2\lambda c_{nn} = v^2\lambda' c_{11}$, $v^2c_{i1} \in v^2q_1R$ ($i = 2, \dots, n$), $v^2q_1c_{2i\,2i} = v^2q_1c_{2i+1\,2i+1}$ ($i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$). Звідси $c_{11} \in R^*$, $c_{11} \equiv c_{ii} \pmod{\operatorname{rad} R}$ ($i = 2, \dots, n$). Тоді $\lambda c_{11} \equiv \lambda' c_{11} \pmod{\operatorname{Rad} R}$, $\lambda \equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$, що неможливо. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 2$ і R — комутативне нетерове локальне кільце характеристики p, яке не є цілісним, з нескінченним полем лишків і* $\operatorname{rad} R = \{0\}$. *Існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних R-зображень групи G довільного наперед заданого степеня $n > 1$.*

Доведення. Очевидно, досить розглянути випадок, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку $|G| > 2$, n — непарне число. Нехай u і v — два елементи кільця R такі, що $uv = 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. Легко бачити, що відображення Γ_λ виду

$$a \to E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v\lambda \\ u & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & vq_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & vq_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & vq_1 & 0 \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця порядку n, є R-зображенням групи G для будь-якого $\lambda \in R$. Тут v^2q_1, $v^2q_2, \dots, v^2q_l$ — мінімальна система твірних ідеалу $v^2 \operatorname{rad} R$ ($q_i \in R$; $i = 1, \dots, n$; $l > 0$).

Аналогічно як і при доведенні теореми 1 можна показати, що зображення Γ_λ є незвідним зображенням групи G для будь-якого $\lambda \in R^*$ а для λ, $\lambda' \in R^*$, $\lambda \not\equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$ зображення Γ_λ і $\Gamma_{\lambda'}$ не є еквівалентними. Теорема доведена.

Твердження 1. *Нехай $G = \langle a \rangle$ — скінченна циклічна група порядку 2 і R — комутативне локальне кільце характеристики 2, $\operatorname{rad} R = \{0\}$, $\operatorname{Rad} R = uR + vR$, $u, v \in R$, $u, v \neq 0$, $uv = 0$. Всі матричні R-зображення групи G довільного непарного степеня $n > 1$ звідні.*

Доведення. Нехай Γ — матричне R-зображення групи G степеня n, $\Gamma(a) = E+M$, де E — одинична матриця порядку n над кільцем R, M — деяка квадратна матриця того ж порядку над кільцем R. Очевидно, $M^2 = 0$. Якщо M містить хоча б один оборотний елемент, то деякий стовпчик X матриці M містить оборотний елемент. Тому X є першим стовпчиком деякої матриці $C \in \mathrm{GL}(n, R)$. Отже, перший стовпчик матриці MC, як і $C^{-1}MC$, рівний нулю. Тоді зображення Γ звідне.

Нехай $M = uA+vB$, де A, B — деякі квадратні матриця порядку n над кільцем R. Тоді $0 = u^3A^2 = uA^2$, $0 = v^3B^2 = vB^2$. Позначимо через $\overline{T} = \|t_{ij} + \operatorname{Ann} u\|$ матрицю над кільцем $R/\operatorname{Ann} u$, де $T = \|t_{ij}\|$ — деяка матриця над кільцем R. Очевидно, $R/\operatorname{Ann} u = R/vR$ — локальна область головних ідеалів. Тоді для деяких квадратних матриць C, D порядку n над кільцем R таких, що $\overline{C}$, $\overline{D} \in \mathrm{GL}(n, R/vR)$, $\overline{C}\,\overline{A}\,\overline{D} = \operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0]$; ($\alpha_i \in R/vR$; $i = 1, \ldots, r$; $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Очевидно, C, $D \in \mathrm{GL}(n, R)$. Оскільки у полі відношень кільця R/vR $\overline{A}^2 = 0$, то $r = \operatorname{rank} \overline{A} < \frac{n}{2}$. Крім того, в кільці R/vR

$$\overline{AD} = \overline{A}\,\overline{D} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1r} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nr} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{ij} \in R/vR$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$). Тоді в кільці R

$$uAD = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \ldots & \alpha'_{1r} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \ldots & \alpha'_{nr} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

де $\alpha'_{ij} \in uR$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$). Нехай матриця B_0 одержана з матриці BD відкиданням перших r стовпців. Позначимо тепер через $\overline{T} = \|t + \operatorname{Ann} v\|$ матрицю над кільцем $R/\operatorname{Ann} v = R/uR$, де $T = \|t_{ij}\|$ — деяка матриця над кільцем R. Над полем відношень кільця R/uR $\overline{B}^2 = 0$, тому $\operatorname{rank} \overline{B} < \frac{n}{2}$. Отже, в полі відношень кільця R/uR $r_0 = \operatorname{rank} \overline{B_0} < \frac{n}{2}$. Аналогічно як і для матриці A можна показати, що для деякої матриці $D_0 \in \mathrm{GL}(n - r, R)$

$$\overline{B_0 D_0} = \overline{B_0}\,\overline{D_0} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1r_0} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nr_0} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\beta_{ij} \in R/uR$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r_0$). Тоді в кільці R

$$vBD \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_{11} & \ldots & \beta'_{1r} & \beta'_{1\,r+1} & \ldots & \beta'_{1\,r+r_0} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta'_{n1} & \ldots & \beta'_{nr} & \beta'_{1\,r+1} & \ldots & \beta'_{1\,r+r_0} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\beta'_{ij} \in R/uR$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r + r_0)$, E — одинична матриця порядку n над кільцем R. Очевидно,

$$D' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, R).$$

Останній стовпчик матриці $uADD'$ та $vBDD'$ рівний нулю, бо $r + r_0 < n$. Отже, останній стовпчик матриці MDD' та $(DD')^{-1}\Gamma(a)DD'$ також рівний нулю. Тому зображення Γ звідне над кільцем R. Лема доведена.

1. *Curtis C. W., Reiner I.* Methods of representation theory. – New York: John Willems & Sons Inc, 1981. — V. 1. — 820 p.
2. *Maranda J. M.* On the equivalennce of representations of finite groups of automorphisms of modules over Dedekind domain // Canad. J. Math. — 1955. – **7**. – P. 401–404.
3. *Roggenkamp K. W.* R-orders in a split algebra have finitely many non-isomorphic irreducible lattice as soon as R has finite class number // Canad. J. Math. — 1971. – **14**. – P. 405–409.
4. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О модулярных представлениях конечных групп над областями целосности // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 78–86.
5. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородский национальний университет, 2003. – 119 с.
6. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С., Лихтман А. И.* О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, №1. – С. 81–89.
7. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
8. *Тилищак О. А.* Про незвідні зображення скінченних p-груп над деякими локальними кільцями характеристики p // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 104–110.
9. *Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченної p-групи над комутативним локальним кільцем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 108–114.

Одержано 11.09.2003