УДК 519.6

В. Я. Рибак, Ю. Ю. Рубіш (Ужгородський нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ВИДУ ЗВИЧАЙНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

The possibility of usage of asymptotic method of solving for one class of linear differential equations of the second order and the estimation of such solutions is shown in the paper.

Стаття висвітлює можливість застосування асимптотичного методу розв'язування для одного класу лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, а також дає оцінки таких розв'язків.

Асимптотичні методи для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку досліджені досить повно [1–4] . Пропонована стаття у певній мірі конкретизує клас рівнянь, до яких можна застосувати асимптотичний метод, та подає кількісні оцінки розв'язків.

1. Загальні положення. Розглядається задача Коші для рівняння

$$y'' + \omega^2(x)y = 0, \quad y = y(x); \tag{1}$$

$$x \in [a, b], \quad a \geq 0, \quad b \leq \infty, \quad \omega(x) > 0. \tag{2}$$

Більш загальне рівняння

$$v'' + 2h(x)v' + g(x)v = 0$$

заміною $v = y \cdot \exp\left(-\int\limits_a^x h(t)dt\right)$ зводиться до (1) :

$$y'' + (g - h^2 - h')y = 0 \quad .$$

Використаємо до (1) підстановку (відому як підстановка Ліувілля)

$$y = \omega^{-1/2} \cdot \exp\left(\alpha \int\limits_a^x \lambda(t)dt\right), \tag{3}$$

де α — корінь рівняння $\alpha^2 + 1 = 0$;

$\lambda(x)$ — невідома функція. Початкове рівняння (1) при цьому перетворюється у рівняння Ріккаті відносно $\lambda(x)$.

$$-\frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega} + \frac{3}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + \alpha\omega\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right) - \lambda^2 + \omega^2 = 0. \tag{4}$$

Введемо функцію $u(x)$, яка зв'язує λ і ω .

$$u = \lambda/\omega. \tag{5}$$

Тепер (4) набуває такого вигляду:

$$u^2 - 1 + \phi(x) - \frac{\alpha}{\omega}u' = 0, \quad u' = du/dx. \tag{6}$$

Тут прийнято позначення

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega^3} - \frac{3}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega^2}\right)^2. \tag{7}$$

Коли $\omega(x)$ — монотонна функція і якщо виконується умова (2), тоді рівняння (6) має розв'язки і ці розв'язки можна шукати послідовними наближеннями, використовуючи, наприклад, метод ВБК [6] . Монотонність функції $\omega(x)$ забезпечує обмеженість її першої та другої похідних — $\omega'(x)$ та $\omega''(x)$ відповідно.

Якщо прийняти нову незалежну змінну

$$\xi = \int\limits_a^x \omega(t)dt, \tag{8}$$

то рівняння (6) ще більше спрощується:

$$u^2 - 1 + \phi(\xi) - \alpha \cdot \dot{u} = 0, \quad \dot{u} = du/d\xi, \tag{6a}$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\ddot{\omega}}{\omega} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2; \quad \dot{\omega} = d\omega/d\xi. \tag{7a}$$

Послідовні наближення у практичному аспекті завжди реалізуються невеликим числом спроб, а це означатиме, що рівняння (6) або (6а) буде виконуватись наближено. Тому загальна практична задача пошуку інтегралів рівняння (1) доповнюється такими вимогами:
1) встановити, якою повинна бути функція $\omega(x)$, щоб послідовні наближення швидко збігалися; 2) мати надійні оцінки точності наближених розв'язків.

Коли

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0 \tag{9}$$

і крім того [5]

$$\left|\int\limits_a^\infty \omega(x)\phi(x)dx\right| = \left|\int\limits_0^\infty \phi(\xi)d\xi\right| < \infty \quad , \tag{10}$$

тоді для достатньо великих x замість (1) можна розглядати рівняння

$$\frac{d^2\tilde{z}}{d\xi^2} + \tilde{z} = 0, \quad \tilde{z}(x) = \tilde{y} \cdot \omega^{-1/2}(x), \tag{11}$$

розв'язки якого

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &= C_1\omega(x)^{-1/2} \cdot \sin\int\limits_a^x \omega(t)dt' \\ \tilde{y}_2(x) &= C_2\omega(x)^{-1/2} \cdot \cos\int\limits_a^x \omega(t)dt, \quad C_1, \quad C_2 = const, \end{aligned} \tag{12}$$

описують асимптотичну поведінку $y(x)$. А умови (2), (9) та (10) разом із вимогою монотонності $\omega(x)$ встановлюють загальні межі придатності асимптотичного методу розв'язування.

2. Основні результати. Очевидно, що існує багато функцій $\omega(x)$, які відповідають згаданим вище властивостям. Для одного, досить поширеного у прикладних задачах, класу функцій можливість побудови асимптотичних розв'язків (12) регламентує

Теорема 1. *Нехай* $\omega(x)$ *має зображення*

$$\omega(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{\alpha+i} > 0, \quad x \in [a,b], \quad c_n \neq 0, \tag{13}$$

де n *— натуральне обмежене число,* $\alpha \in R$.

Тоді для виконання (9) *і* (10) *повинно бути*

$$\alpha + n > -1. \tag{14}$$

Доведення. Зважаючи на те, що $x \to \infty$, надаємо (13) та її похідним "асимптотичного" вигляду:

$$\omega(x) = c_n x^{\alpha+n} \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{c_n} x^{-i} = c_n x^{\alpha+n} \left(1 + O(1/x)\right);$$

$$\omega'(x) = c_n(\alpha+n) x^{\alpha+n-1} \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{c_n} \frac{\alpha+n-i}{\alpha+n} x^{-i} = c_n(\alpha+n) x^{\alpha+n-1} \left(1 + O(1/x)\right);$$

$$\omega''(x) = c_n(\alpha+n)(\alpha+n-1) x^{\alpha+n-2} \left(1 + O(1/x)\right).$$

Обчислюємо асимптотичне значення $\phi(x)$ за (7) .

$$\phi(x) \sim -\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+2)}{4c_n^2 x^{2\alpha+2n+2}} \left(1 + O(1/x)\right). \tag{15}$$

для того щоб $\phi(x)$ прямувала до нуля при $x \to \infty$, повинно бути

$$2\alpha + 2n + 2 > 0,$$

звідки і одержуємо (14).

Покажемо, що при цьому виконується і (10).

$$\lim_{x\to\infty} \left| \int_a^x \omega(t)\phi(t)dt \right| \sim \lim_{x\to\infty} \left| \int_a^x \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+2)}{4c_n t^{\alpha+n+2}} dt \right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left| \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+2)}{4c_n(\alpha+n+1)} \left(\frac{1}{a^{\alpha+n+1}} - \frac{1}{x^{\alpha+n+1}} \right) \right| < \infty.$$

Теорема доведена.

Наслідок 1. *Для виконання умов* (9) *та* (10) *функція* $\omega(x)$ *на* $[a,b]$ *повинна спадати повільніше, ніж гіпербола* $q(x) = c_n/x$.

Цей висновок одразу випливає із (13) та (14), якщо прийняти $\alpha = 0$. Для порівняння $q(x)$ та $\omega(x)$ надамо їм однакові значення на початку інтервалу і дещо узагальнимо $q(x)$.

$$q(x) = \frac{a+c}{x+c} \omega(a), \tag{16}$$

де $c = const$, яка може приймати такі значення:

$$\begin{array}{l} c > 0, \text{ якщо } a = 0; \\ c \geq 0, \text{ якщо } a > 0. \end{array} \tag{17}$$

Наслідок 2. *Щоб $\omega(x)$ спадала на $[a,b]$ повільніше, ніж гіпербола (16), повинні виконуватись певні граничні співвідношення для обидвох функцій, а саме:*

$$\omega(x) - \omega(a) < q(x) - q(a). \tag{18}$$

Звідси після елементарних перетворень отримуємо умову, якій мусить відповідати $\omega(x)$ на $[a,b]$:

$$\frac{\omega(x)}{\omega(a)} > \frac{a+c}{x+c}, \quad x > a. \tag{19}$$

3. Оцінка точності асимптотичних розв'язків. Для побудови розв'язків (1) скористаємося методом ВБК для рівняння Ріккаті (6а). Нехай

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \beta^i, \tag{20}$$

$$u^2 = 1 - \beta \cdot \phi + \beta\alpha \cdot \dot{u}, \tag{21}$$

де $\beta = 1$ — параметр, який служить для виділення окремих послідовних наближень.

Підставляючи (20) у (21) і прирівнюючи вирази при однакових степенях β, знаходимо:

$$u_0 = 1; \quad u_1 = -\frac{\phi}{2}; \quad u_2 = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2;$$

$$u_3 = \frac{1}{4}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{\phi}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3;$$

$$u_4 = \frac{\alpha}{8}\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{3}{8}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \frac{2\alpha}{3}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 - \frac{5}{8}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 \tag{22}$$

і т. д.

Можна помітити, що кожне наступне наближення має вищий порядок малості від попереднього. Із збереженням належної точності можна стверджувати, що

$$\frac{2}{\alpha}\frac{u_{n+1}}{u_n} \cong \frac{\phi^{(n)}(\xi)}{\phi^{(n-1)}(\xi)} \quad < 1,$$

тобто, ряд (20) збігається з огляду на (13) та (15).

Записуємо тепер вираз для $\alpha\lambda(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha\lambda(\text{x}) = \alpha\omega\left(1 - \frac{\phi}{2} + \tfrac{1}{4\omega}\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{\omega}\tfrac{d}{dx}\frac{\phi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \ldots\right) + \\ + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dx}\frac{\phi}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\tfrac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{\omega}\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{\omega}\tfrac{d}{dx}\frac{\phi}{2}\right)\right] + \tfrac{2}{3}\tfrac{d}{dx}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \ldots \end{aligned} \tag{23}$$

Зважаючи на (9), зберігаємо у (23) лише ті складові, які можуть створювати відчутний вплив на $\alpha\lambda(x)$ на початку проміжка [a,b] (відкидаємо члени, що порівняльні із $\phi^2(x)$).

$$\alpha\lambda(x) = \alpha\omega\left(1 - \frac{\phi}{2} + O(\phi^2)\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi}{2} + O(\phi^2)\right). \tag{23a}$$

На підставі (3) записуємо розв'язки розглядуваного рівняння (1), опускаючи члени із вищим порядком малості.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{\frac{\phi(x)-\phi(a)}{4}}}{\omega(x)^{1/2}} \cdot \sin\left(\int\limits_a^x \omega(t)dt - \Delta\varphi\right); \\ y_2 &= \frac{e^{\frac{\phi(x)-\phi(a)}{4}}}{\omega(x)^{1/2}} \cdot \cos\left(\int\limits_a^x \omega(t)dt - \Delta\varphi\right), \end{aligned} \tag{24}$$

де $\Delta\varphi = \int\limits_a^x \omega(t)\frac{\phi(t)}{2}dt$ — поправка на фазу коливань.

Звичайно, знак рівності у формулах (24) треба розуміти умовно, а самі формули трактувати як такі, що значно точніші від асимптотичних розв'язків (12). Лише у такому контексті вирази (24) надалі будемо вважати точними розв'язками.

А тепер проведемо порівняння розв'язків (24) із асимптотичними зображеннями (14). Якщо позначити через $A(x)$ та $\tilde{A}(x)$ їх амплітуди, то відносна амплітудна похибка має оцінку

$$|\delta A| = \left|\frac{A(x)}{\tilde{A}(x)} - 1\right| \leq \frac{1}{4}\left|\phi(x) - \phi(a)\right|. \tag{25}$$

Абсолютна похибка фази коливань

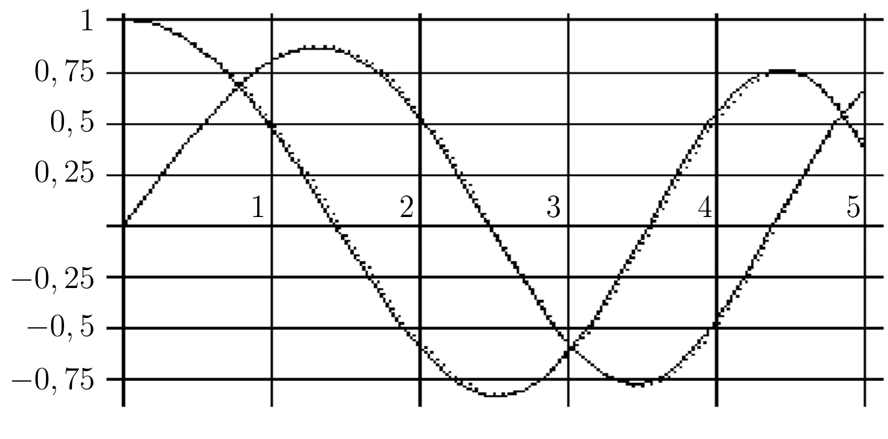
$$|\Delta\varphi| \leq \frac{1}{2}\int\limits_a^x \omega(t)\left|\phi(t)\right| dt. \tag{26}$$

Оцінки (25) та (26) дозволяють встановити відхилення асимптотичних зображень від точних розв'язків диференціального рівняння (1) і зробити таким чином обгрунтований вибір на користь першого або другого методів.

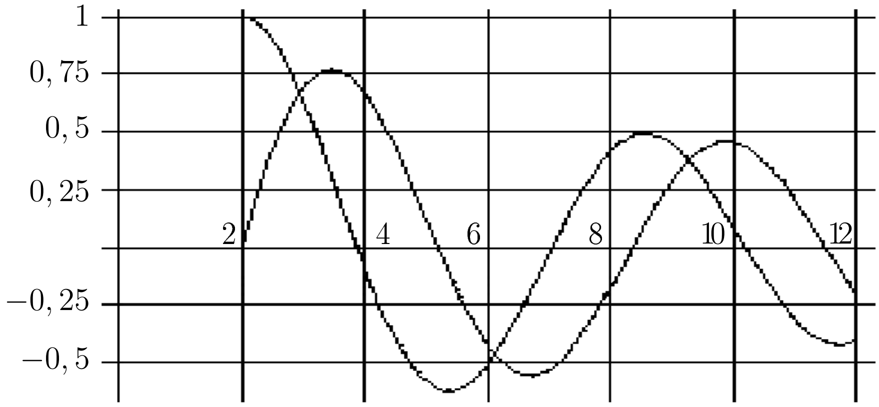
На закінчення покажемо приклади розв'язування відомих [6] диференціальних рівнянь точним (у строгому розумінні) та асимптотичним методами. Для об'єктивного порівняння зводимо всі розв'язки до однакових початкових умов у точці $x = a$, а саме:

$$\begin{aligned} v_1(a) = 0; &\quad v_1'(a) = 1; \\ v_2(a) = 1; &\quad v_2'(a) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

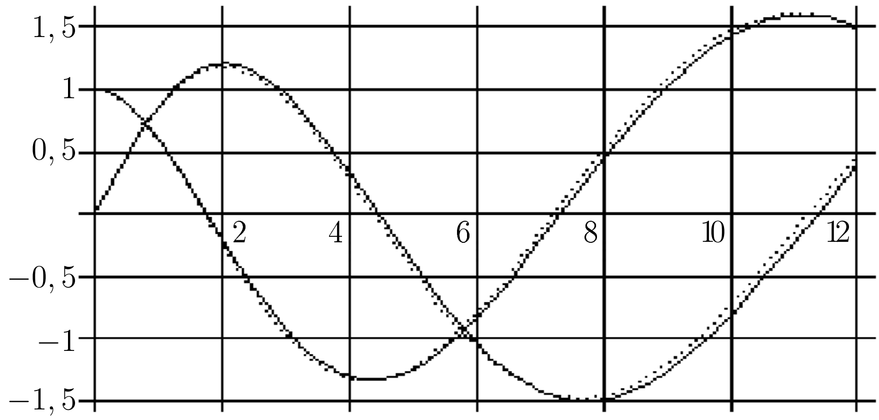
$$v_{1,2}(x) = B_{1,2}y_1(x) + C_{1,2}y_2(x), \quad B_{1,2},\, C_{1,2} = const. \tag{28}$$



Мал. 1. Розв'язки рівняння $y'' + (1 + 0.5x)y = 0$
Асимптотичні розв'язки зображено пунктиром.



Мал. 2. Розв'язки рівняння $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$



Мал. 3. Розв'язки рівняння $(1 + 0,5x)y'' + y = 0$

Обчислення $|\delta A|$ та $|\Delta\varphi|$ стосуються $x \to \infty$.

Подаємо рівняння, які ілюструють асимптотичний та точний методи розв'язування.

1) $y'' + (1 + 0,5x)y = 0; \quad y = y(x); \quad a = 0;$ (29)

$$\omega(x) = (1 + 0,5x)^{1/2}; \quad \phi(x) = -\frac{5}{64}\frac{1}{(1 + 0,5x)^3}; |\delta A| < 0,02; \quad |\Delta\varphi| < 0,05\text{рад}.$$

Точний та асимптотичний розв'язки $v_1(x)$ та $v_2(x)$ зображені на мал. 1.

2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0; \quad a = 2; \quad \nu = 3/4$ (див. мал. 2) (30)

$$y = x^{-1/2}z(x); \quad z'' + \omega^2(x)z = 0; \quad \omega(x) = \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right)^{1/2};$$

$$\phi(x) = -\frac{3}{2}\frac{\nu^2 - 1/4}{x^4\left(1 - \frac{\nu^2-1/4}{x^2}\right)^2} - \frac{5}{4}\frac{(\nu^2 - 1/4)^2}{x^6\left(1 - \frac{\nu^2-1/4}{x^2}\right)^3}; \quad |\delta A| < 0,01; \quad |\Delta\varphi| < 0,01.$$

3). $(1 + 0,5x)y'' + y = 0; \quad a = 0$ (мал. 3). (31)

$$\omega(x) = (1 + 0,5x)^{-1/2}; \quad \phi(x) = \frac{3}{64}\frac{1}{1 + 0,5x}; \quad |\delta A| < 0,012; \quad |\Delta\varphi| < 0,09.$$

На мал. 1..3 асимптотичні розв'язки виконані пунктиром. На початку інтервала [a,b] обидва зображення (точне та асимптотичне) збігаються за рахунок спільних початкових умов (27). При збільшенні x помітні певні розбіжності розв'язків, які залежать від $\phi(x)$ і які зникають для достатньо великих x. Можна помітити, що на їх незбіжність відчутно впливає похибка фази $|\Delta\varphi|$.

4. Висновки. 1. Для диференціального рівняння (1) окреслено нижню межу функції $\omega(x)$, при якій розв'язок (1) можна подавати в асимптотичному вигляді.

2. Даються оцінки асимптотичних розв'язків за амплітудою і фазою коливань, що дозволяє обгрунтовано застосовувати асимптотичні методи в конкретних випадках.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958.
2. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983.
4. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальних уравнений. – М.: Наукова думка, 1966.
5. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.

Одержано 9.11.2004