УДК 519.21

Г. І. Сливка (Ужгородський нац. ун-т)

КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

The boundary-value problem of the mathematic physics of round membrane's vibration where the initial conditions are jointly $SSub_{\varphi}(\Omega)$ random fields is analyzed in the work. The method of Fourier is justificated for the such problem. The random series with representing the solving are investigated.

У роботі розглядається крайова задача математичної фізики про коливання круглої мембрани, коли початкові умови є сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Обґрунтовано метод Фур'є для такої задачі. Досліджені випадкові ряди, які зображують розв'язок.

У роботі розглянуто крайову задачу математичної фізики про коливання круглої мембрани, коли початкові умови є сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Отримано умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку такої задачі. Основним завданням роботи є використання методу В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка при обґрунтуванні застосування методу Фур'є до крайової задачі математичної фізики із випадковими початковими умовами для гіперболічного рівняння, а також дослідження властивостей його розв'язку.

Подібні задачі для коливання прямокутної та круглої мембрани, коли початкові умови є строго субгауссовими випадковими початковими умовами, розглядались в [1,2], рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку з сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадковими початковими умовами досліджувалося в [3].

Розглянемо задачу про вільні коливання круглої однорідної мембрани радіуса R, якщо в початковий момент часу положення та швидкість її точок є деякі випадкові поля, а край мембрани нерухомо закріплений [4]. Дана задача приводить до розв'язування наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$u\left|_{t=0}\right.=\xi\left(x,y\right),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta\left(x,y\right),$$

$$u|_{x^2+y^2=R^2}=0.$$

Взявши центр мембрани за початок координат і перейшовши в рівнянні коливання мембрани до полярних координат, отримаємо задачу: в області $B=\{(t,\rho,\varphi):0\le t\le T,\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u\left(t,\rho,\varphi\right)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u\left(t,\rho,\varphi\right)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u\left(t,\rho,\varphi\right)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u\left(t,\rho,\varphi\right)}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

що задовольняє початкові умови

$$u\left(0,\rho,\varphi\right)=\xi(\rho,\varphi),\ \frac{\partial u\left(0,\rho,\varphi\right)}{\partial t}=\eta(\rho,\varphi), \tag{2}$$

$$0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

крайову умову

$$u\left(t,R,\varphi\right)=0,\ 0\le t\le T. \tag{3}$$

Початкові умови $(\xi(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$ і $(\eta(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$ є сумісно $SSub_\varphi(\Omega)$ випадкові поля [3,6].

Як і в детермінованому випадку розв'язок шукається у вигляді

$$u(t,\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\check a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi, \tag{4}$$

де

$$\hat a_{nk}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\xi(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n=0,1,2\ldots;$$

$$\check a_{nk}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\xi(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\pi\int\limits_0^R\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n=0,1,2\ldots;$$

$$\hat b_{nk}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\eta(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos^2 n\varphi d\rho d\varphi},\ n=0,1,2\ldots;$$

$$\check b_{nk}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R\eta(\rho,\varphi)\rho J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi d\rho d\varphi}{\sqrt{\lambda_{nk}}R\pi\int\limits_0^R\rho J_n^2\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)d\rho},\ n=0,1,2\ldots;$$

$\sqrt{\lambda_{nk}}=\frac{\nu_{nk}}{R}$, ν_{nk} — власні значення крайової задачі

$$z''(\rho)+\frac{1}{\rho}z'(\rho)+(\lambda-\mu^2(\rho^2))z(\rho)=0,$$

$$z(R)=0,\ |z(0)|<\infty,$$

які визначаються асимптотичними рівностями (див. [5])

$$\nu_{nk}\cong k\pi+\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Власним значенням відповідають власні функції

$$z_k(\rho)=CJ_n\left(\frac{\nu_k}{R}\rho\right),\ k=1,2,3,\ldots,$$

C — деяка стала , $J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$ — функції Бесселя першого роду n-го порядку. Нехай $D=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,T]$, а $C(D)$ — простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним банаховим простором.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) існують неперервні з ймовірністю одиниця похідні $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2}, \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}, \frac{\partial^2\xi}{\partial\rho\partial\xi}, \frac{\partial\eta}{\partial\rho}, \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}$;

2) для всіх $0 \le t \le T,\ 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ *ряд* (4) *і ряди*

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nk}}\left(-\hat{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{nk}}\left(-\check{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{nk}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{nk}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t + \check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

де згідно [7]

$$J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) = \frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\left(J_{n-1}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) + J_{n+1}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right),$$

$$J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) = \frac{\lambda_{nk}}{4}\left(J_{n-2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) - 2J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right) + J_{n+2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right),$$

збігаються рівномірно за ймовірністю. Тоді з ймовірністю одиниця функція $u(t,\rho,\varphi)$, *що зображена у вигляді ряду* (4), *буде двічі неперервно диференційовним розв'язком задачі* (1)–(3).

Доведення. Оскільки існують підпослідовності частинних сум рядів з умови 2), які збігаються рівномірно з ймовірністю одиниця в $C(D)$, то дана теорема доводиться як і в детермінованому випадку.

Перетворимо функції $J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$, $J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)$, використавши інтегральне перетворення функції Бесселя першого роду цілого порядку [7]

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta,\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{6}$$

Отримаємо

$$J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2\pi}\left[\int\limits_0^\pi \cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n-1)\theta\right)d\theta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^\pi \cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n+1)\theta\right)d\theta\right]=\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2\pi}\int\limits_0^\pi\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n-1)\theta\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n-1)\theta\right)\right]d\theta=\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2\pi}\int\limits_0^\pi\left[2\cos\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+\theta+\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta-\theta}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+\theta-\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta+n\theta+\theta}{2}\right]d\theta=\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)\cos\theta d\theta,$$

$$J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=\tfrac{\lambda_{nk}}{4\pi}\left[\int\limits_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n-2)\theta\right)d\theta-\right.$$
$$\left.-2\int\limits_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta+\int\limits_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n+2)\theta\right)d\theta\right]=$$
$$=\tfrac{\lambda_{nk}}{4\pi}\int\limits_0^\pi\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n-2)\theta\right)-2\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-(n+2)\theta\right)\right]=\tfrac{\lambda_{nk}}{4\pi}\int\limits_0^\pi\left[\left(-2\sin\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+2\theta+\sqrt{\lambda_{nk}}\sin\theta-n\theta}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\sin\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+2\theta-\sqrt{\lambda_{nk}}\sin\theta+n\theta}{2}\right)-\left(-2\sin\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta-2\theta+\sqrt{\lambda_{nk}}\sin\theta-n\theta}{2}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\sin\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+2\theta-\sqrt{\lambda_{nk}}\sin\theta+n\theta}{2}\right)\right]d\theta=\tfrac{\lambda_{nk}}{2\pi}\int\limits_0^\pi\left[-\sin\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+\theta\right)\sin\theta+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta-\theta\right)\sin\theta\right]d\theta=-\tfrac{\lambda_{nk}}{2\pi}\int\limits_0^\pi\left[\left(2\sin\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+\theta-\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta+n\theta+\theta}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\cos\tfrac{\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta+\theta+\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta-\theta}{2}\right)\sin\theta\right]d\theta=-\tfrac{\lambda_{nk}}{\pi}\int\limits_0^\pi\sin^2\theta\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta.$$

Отже

$$J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)\cos\theta d\theta, \tag{7}$$

$$J_n''\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)=-\frac{\lambda_{nk}}{\pi}\int_0^\pi\sin^2\theta\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta. \tag{8}$$

Позначимо для $k\ge 1,\ n\ge 0$

$$S_{n_1k_1}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{n_1k_1}^{(0_2)}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\check a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S_{n_1k_1}^{(1_1)}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(\hat a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S_{n_1k_1}^{(1_2)}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(\check a_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check b_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S_{n_1k_1}^{(2_1)}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\sqrt{\lambda_{nk}}\left(-\hat a_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat b_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S^{(2_2)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\lambda_{nk}\left(-\check{a}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S^{(3_1)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_0}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S^{(3_2)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J'_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S^{(4_1)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_0}n^2\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S^{(4_2)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n^2\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S^{(5_1)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\lambda_{nk}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S^{(5_2)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\lambda_{nk}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi,$$

$$S^{(6_1)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi,$$

$$S^{(6_2)}_{n_1k_1}=\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\check{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\check{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J''_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi.$$

Теорема 2. *Нехай випадкові поля $\xi(\rho,\varphi)$, $\eta(\rho,\varphi)$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3) в області D, що зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (4) достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *існували неперервні з ймовірністю одиниця похідні $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho\partial\xi}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}$;*

2) *для всіх $\rho\in[0,R]$, $\varphi\in[0,\pi]$, $t\in[0,T]$ збігалися ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\sqrt{\lambda_{ml}}\,\Big(E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\check{b}_{nk}\check{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t-2E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}nm\,\Big(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} nm\left(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{nk}}\sqrt{\lambda_{ml}}\left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t-2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J'_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} nm\left(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J'_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J'_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} n^2m^2\left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} n^2m^2\left(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{nk}\lambda_{ml}\left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{nk}\lambda_{ml}\left(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+\right.$$
$$\left.+E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\right)\times$$
$$\times J''_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J''_m(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\cos n\varphi\cos m\varphi,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(E\breve{a}_{nk}\breve{a}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\sqrt{\lambda_{ml}}t+$$
$$+E\breve{b}_{nk}\breve{b}_{ml}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t+2E\breve{a}_{nk}\breve{b}_{ml}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\sin\sqrt{\lambda_{ml}}t\Big)\times$$
$$\times J_n''(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho)J_m''(\sqrt{\lambda_{ml}}\rho)\sin n\varphi\sin m\varphi;$$

3) для $n\geq 1,\ k=0,1,\ldots 6,\ i=1,2$

$$\sup_{\substack{|\rho-\rho_1|\leq h\\|\varphi-\varphi_1|\leq h\\|t-t_1|\leq h}}\left(E\left|S_n^{(k_i)}(t,\rho,\varphi)-S_n^{(k_i)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sigma_k(h),$$

де $\sigma_k(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції, такі що* $\sigma_k(h)\to 0$ *при* $h\to 0$ *і виконується умова*

$$\int\limits_{0+}\Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)}\right)d\varepsilon<\infty,$$

де $\Psi(u)=\frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *— обернена до функції* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 4.2 роботи [3]

Теорема 3. *Нехай випадкові поля* $(\xi(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$, $(\eta(\rho,\varphi),\ \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi])$ *є сумісно строго* $Sub_\varphi(\Omega)$.

$$B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=B_{0000}(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=E\xi(\rho,\varphi)\xi(\bar\rho,\bar\varphi),$$

$$R(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=R_{0000}(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)=E\eta(\rho,\varphi)\eta(\bar\rho,\bar\varphi).$$

Для того щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1)–(3) *в області* D, *що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду* (4), *достатньо, щоб виконувались умови:*

1) існували неперервні частинні похідні

$$B_{1010}=\frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho^2\partial\bar\rho^2},\ B_{0202}=\frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\varphi^2\partial\bar\varphi^2},\ B_{1212}=\frac{\partial^4 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho\partial\bar\rho\partial\varphi\partial\bar\varphi},$$

$$R_{1010}=\frac{\partial^2 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\rho\partial\bar\rho},\ R_{0202}=\frac{\partial^2 B(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)}{\partial\varphi\partial\bar\varphi},$$

і для достатньо малих h *виконувались нерівності:*

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\leq h\\|\varphi-\bar\varphi|\leq h}}\left(B_z(\rho,\varphi,\rho,\varphi)-B_z(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)-2B_z(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_z}{|\ln h|^\delta},$$

$$\sup_{\substack{|\rho-\bar\rho|\leq h\\|\varphi-\bar\varphi|\leq h}}\left(R_z(\rho,\varphi,\rho,\varphi)-R_z(\bar\rho,\bar\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)-2R_z(\rho,\varphi,\bar\rho,\bar\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C_{z_1}}{|\ln h|^\delta},$$

де $\delta>1-\frac{1}{p}$; $z=(0000);\ (1010);\ (0202);\ (1212)$; $z_1=(0000);\ (1010);\ (0202)$, $C_z>0,\ C_{z_1}>0;$

2) збігалися наступні ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[|E\hat{a}_{nk}\hat{a}_{ml}|+|E\hat{b}_{nk}\hat{b}_{lm}|+2|E\hat{a}_{nk}\hat{b}_{ml}|\right]<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[|E\check{a}_{nk}\check{a}_{ml}|+|E\check{b}_{nk}\check{b}_{lm}|+2|E\check{a}_{nk}\check{b}_{ml}|\right]<\infty;$$

3) для довільних $\delta>1-\frac{1}{p}$ і $|h|<1$ виконувалися наступні умови

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)^2\left[\left(E(\hat{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\hat{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right)<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)^2\left[\left(E(\check{a}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E(\check{b}_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right)<\infty.$$

Доведення. Умова 1) даної теореми забезпечує виконання умови 1) теореми 2. Умова 2) випливає з умови 2) тієї ж теореми, якщо врахувати, що

$$\left|J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)d\theta\right|\le$$
$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\sin\theta-n\theta\right)\right|d\theta\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\le 1.$$

Розглянемо

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(E\left|\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi\right.\right.-$$
$$-\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(\hat{a}_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1+\hat{b}_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\right)J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\ )^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi\right.-$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi\right.-$$
$$\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.$$

Використовуючи інтегральне представлення функції Бесселя першого роду цілого порядку (6), можна зробити оцінки

$$\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|=$$
$$=\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi\right.-$$
$$\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi_1\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi\right.\right.-$$

$$
\begin{gathered}
-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right]d\theta\Big|\le \\
\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi- \\
-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\Big|\,d\theta\le \\
\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big[\Big|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\Big|+\Big|\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)- \\
-\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\Big|+\left|\cos n\varphi_1-\cos n\varphi_1\right|\Big]\,d\theta\le \\
\le\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\left|\sin\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(t-t_1)}{2}\right|+\left|\sin\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}(\rho-\rho_1)\sin\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{n(\varphi-\varphi_1)}{2}\right|\right]d\theta.
\end{gathered}
$$

Використаємо асимптотичне представлення значень λ_{nk} (5) і рівність $|\sin uv|\le$ $\le\frac{\left(ln\left(|v|+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(|ln|u||\right)^{\delta}}$, $\delta>0$ (див. [2]), тоді

$$
\begin{gathered}
\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\le \\
\le\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{\left|\ln|t-t_1|\right|^{\delta}}\right|+\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{\left|\ln|\rho-\rho_1|\right|^{\delta}}\right|+\left|\frac{\left(\ln\left|\frac{n}{2}\right|+e^{\delta}\right)^{\delta}}{\left|\ln|\varphi-\varphi_1|\right|^{\delta}}\right|\right]d\theta\le \\
\le 2\left(2\frac{\left(\ln\left(\left(\frac{k+n}{2}\right)\frac{\pi}{R}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}+\frac{\left(\ln\left(\frac{n}{2}+e^{\delta}\right)\right)}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\right)\le \\
\le\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(\left(2\ln\left(\left(\frac{k+n}{2}\right)\frac{\pi}{R}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}+\left(\ln\left(\frac{n}{2}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}\right)\le \\
\le\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\le \\
\le\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).
\end{gathered}
$$

Аналогічно можна знайти

$$
\begin{gathered}
\left(E\left|S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le \\
\le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right. \\
\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+ \\
+\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right. \\
\left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|\le \\
\le\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right). \\
\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin n\varphi_1\right|\le \\
\le\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).
\end{gathered}
$$

Отже

$$
\left(E\left|S_{nk}^{(0_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{C_{0_1}}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},
$$

де

$$
C_{0_1}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(E\hat{a}_{nk}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(E\hat{b}_{nk}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).
$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(0_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(0_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{C_{0_2}}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_{0_2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}+(E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times\left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta}+(\ln n)^{\delta}\right).$$

Розглянемо

$$\begin{gathered}\left(E\left|S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\\ \le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}\left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.\\ \left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|+\\ +\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\cos n\varphi-\right.\\ \left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\cos n\varphi_1\right|.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left(E\left|S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\\ \le\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\check{a}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi-\right.\\ \left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|+\\ +\sum_{k=1}^{k_1}\sum_{n=0}^{n_1}n\left(E\left(\check{b}_{nk}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\right)\sin n\varphi-\right.\\ \left.-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\right)\sin n\varphi_1\right|.\end{gathered}$$

Використовуючи представлення (7) можна записати

$$\begin{gathered}\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|=\\ =\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi-\right.\\ \left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\right)\cos n\varphi_1\right|=\\ =\left|\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.\right.\\ \left.\left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right]d\theta\right|\le\\ \le\frac{\sqrt{\lambda_{nk}}}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\cos\theta\right|\left|\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi-\right.\\ \left.-\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1\cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\sin\theta-n\theta\right)\cos n\varphi_1\right|d\theta\le\\ \le\frac{2(k+n)}{R\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(\left(2\ln\left(k+n\right)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).\end{gathered}$$

Аналогічно можна знайти

$$\begin{gathered}\left|\sin\sqrt{\lambda_{nk}}tJ_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho\right)\cos n\varphi-\sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1J_n'\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1\right)\cos n\varphi_1\right|\le\\ \le\frac{2(k+n)}{R\left|\ln|h|\right|^{\delta}}\left(\left(2\ln\left(k+n\right)\right)^{\delta}+\left(\ln n\right)^{\delta}\right).\end{gathered}$$

Отже

$$\left(E\left|S_{nk}^{(3_1)}(t,\rho,\varphi)-S_{nk}^{(3_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{C_{3_1}}{\left|\ln|h|\right|^{\delta}},$$

де

$$C_{3_1} = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) \left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \times \left((2\ln{(k+n)})^{\delta} + (\ln n)^{\delta} \right).$$

$$\left(E \left| S_{nk}^{(3_2)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(3_2)}(t_1,\rho_1,\varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_{3_2}}{|\ln |h||^{\delta}},$$

де

$$C_{3_2} = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) \left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} \right] \times \left((2\ln{(k+n)})^{\delta} + (\ln n)^{\delta} \right).$$

Розглянемо

$$\left(E \left| S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho_1,\varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(E\left(\hat{a}_{nk}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \right) \cos n\varphi - \right.$$
$$\left. - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \right| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} \left(E\left(\hat{b}_{nk}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\sqrt{\lambda_{nk}}t \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \right) \cos n\varphi - \right.$$
$$\left. - \sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \right) \cos n\varphi_1 \right|.$$

$$\left(E \left| S_{nk}^{(6_2)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(6_2}(t,\rho_1,\varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} n \left(E\left(\check{a}_{nk}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \right) \sin n\varphi - \right.$$
$$\left. - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \right) \sin n\varphi_1 \right| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n=0}^{n_1} n \left(E\left(\check{b}_{nk}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin\sqrt{\lambda_{nk}}t \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \right) \sin n\varphi - \right.$$
$$\left. - \sin\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \left(J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \right) \sin n\varphi_1 \right|.$$

Використовуючи представлення (8) можна записати

$$\left| \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \cos n\varphi - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 J_n'' \left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \cos n\varphi_1 \right| =$$
$$= \left| \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t \left(-\tfrac{\lambda_{nk}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \sin\theta - n\theta \right) \right) \cos n\varphi - \right.$$
$$\left. - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \left(-\tfrac{\lambda_{nk}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \sin\theta - n\theta \right) \right) \cos n\varphi_1 \right| =$$
$$= \left| -\tfrac{\lambda_{nk}}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \left[\cos\sqrt{\lambda_{nk}}t \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \sin\theta - n\theta \right) \cos n\varphi - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \sin\theta - n\theta \right) \cos n\varphi_1 \right] d\theta \right| \leq$$
$$\leq \tfrac{\lambda_{nk}}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sin^2\theta \right| \left| \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho \right) \sin\theta - n\theta \right) \cos n\varphi - \right.$$
$$\left. - \cos\sqrt{\lambda_{nk}}t_1 \cos\left(\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\rho_1 \right) \sin\theta - n\theta \right) \cos n\varphi_1 \right| d\theta \leq$$
$$\leq \frac{2(k+n)^2\pi}{R\,|\ln|h||^{\delta}} \left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta} + (\ln n)^{\delta} \right).$$

Тоді

$$\left(E \left| S_{nk}^{(6_1)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(6_1)}(t_1,\rho_1,\varphi_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_{6_1}}{|\ln |h||^{\delta}},$$

де

$$C_{6_1} = \frac{2\pi}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)^2\left[(E\hat{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\hat{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right] \times \left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta} + (\ln n)^{\delta}\right).$$

$$\left(E\left|S_{nk}^{(6_2)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(6_2}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C_{6_2}}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C_{6_2} = \frac{2\pi}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)^2\left[(E\check{a}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}} + (E\check{b}_{nk}^2)^{\frac{1}{2}}\right] \times \left(2\left(\ln(k+n)\right)^{\delta} + (\ln n)^{\delta}\right).$$

Оцінки для $\left(E\left|S_{nk}^{(i_j)}(t,\rho,\varphi) - S_{nk}^{(i_j)}(t_1,\rho_1,\varphi_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $i = 1;2;4;5$, $j = 1;2$ можна отримати аналогічно.

Отже, виконання умови 3 даної теореми забезпечує виконання умови 3 теореми 2.

У роботі отримано умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку задачі про вільні коливання круглої мембрани, коли початкові умови є сумісно $SSub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Отримані результати мають теоретичне та практичне застосування при вивченні рівнянь математичної фізики з випадковими початковими умовами. Вони можуть використовуватися при моделюванні розв'язку даного рівняння на комп'ютерах.

1. *Сливка Г. І.* Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. науки. – 2002. – Вип. 4. – С. 31-37.
2. *Сливка Г. І.* Крайова задача математичної фізики з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. науки. – 2002. – Вип. 5. – С. 172–178.
3. *Козаченко Ю. В., Сливка Г. І.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірн. та матем. статистика. – 2003. – Вип. 69. – С. 63–78.
4. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 333 с.
5. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.
6. *V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. Providence, Rhode: AMS, 2000. – 289 p.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – 334 с.

Одержано 9.11.2004