УДК 512.643

П. М. Гудивок, О. В. Якима (Ужгородский нац. ун-т)

ПРО ПОДІБНІСТЬ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

We show that the problem of classification of arbitrary square matrices up to similarity over non-regular commutative ring with a unit is wild.

Доводиться, що задача описання з точністю до подібності довільних квадратних матриць над нерегулярним комутативним кільцем з одиницею дика.

Позначатимемо символом (Π, R) задачу описання квадратних матриць з точністю до подібності над комутативним кільцем R з одиницею. П. М. Гудивок [1] показав, що задача (Π, R) дика, якщо кільце R локальне або цілісне і не є полем. Для деяких локальних кілець і областей цілісності аналогічний результат був одержаний в [2–10].

Називаємо кільце R регулярним, якщо для всякого $r \in R$ існує таке $x \in R$, що $r^2x = r$. Через $radR$ позначимо первісний радикал кільця R.

Теорема 1. *Нехай R — нерегулярне комутативне кільце. Тоді задача* (Π, R) *дика.*

Доведення. Припустимо, що для всякого $a \in R\backslash(R^{*}\cup\{0\})$ виконується співвідношення: $Ra + \mathrm{Ann}_R\, a = R$ (R^{*} — мультиплікативна група кільця R). Тоді $\mathrm{rad}\, R = \{0\}$. Дійсно, нехай a — нільпотентний елемент, $1 = r_1 a + r_2$, $(r_1 \in R, r_2 \in \mathrm{Ann}_R\, a)$. Тоді, якщо n — степінь нільпотентності елемента a, то $a^{n-1} = r_1 a^n + r_2 a^{n-1} = 0$, що неможливо. Тепер, так як $\mathrm{rad}\, R = \{0\}$, то $Ra \cap \mathrm{Ann}_R\, a = \{0\}$ для всякого $a \in R\backslash(R^{*}\cup\{0\})$. Зафіксуємо a. Тоді $1 = r_1 a + r_2$, $r_2 a = 0$. Отже, $r_2 = r_1 a r_2 + r_2^2 = r_2^2$, тобто r_2 — ідемпотент ,що не співпадає ані з нулем, ані з одиницею. Тоді, очевидно, $1 - r_2$ породжує Ra і є теж ідемпотентом. З цього слідує, що всякий ненульовий головний ідеал кільця R породжується ідемпотентом, тобто R — регулярне кільце, що суперечить умовам теореми. Отже, робимо висновок про існування елемента $a \in R\backslash(R^{*}\cup\{0\})$, для якого $Ra + \mathrm{Ann}_R\, a$ є власним ідеалом кільця R. Нехай P — максимальний ідеал кільця R, що містить $Ra + \mathrm{Ann}_R\, a$. Розглянемо матриці такого вигляду:

$$T(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & aA & 0 & aE \\ aB & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де E — одинична матриця порядку n, A, B — довільні $n \times n$-матриці з елементами над R, n — довільне натуральне число.

Нехай матриці $T(A,B)$ і $T(A',B')$ подібні. Тоді знайдеться така оборотна матриця C з множини $M(4n, R)$ всіх $4n \times 4n$-матриць з елементами із кільця R, що

$$T(A,B)C = CT(A',B'). \tag{2}$$

Запишемо матрицю C у вигляді: $C = \|C_{ij}\|$, де C_{ij} — $n\times n$-матриця $(i, j = 1, \ldots, 4)$. Із (1) і (2) випливає, що

$$C_{21} = aC_{14}B', C_{23} = C_{12}, C_{24} = aC_{13}, \tag{3}$$

$$C_{31} = aC_{24}B', C_{34} = aC_{23}, C_{32} = C_{21} + aC_{23}A', \tag{4}$$

$$C_{22} = C_{11} + aC_{13}A', C_{33} = C_{22}, aAC_{24} + aC_{44} = aC_{33}, \tag{5}$$

$$aAC_{21} + aC_{41} = aC_{34}B', aAC_{23} + aC_{43} = C_{32}, \tag{6}$$

$$aAC_{22} + aC_{42} = C_{31} + aC_{33}A', aBC_{11} = aC_{44}B', \tag{7}$$

$$aBC_{12} = C_{41} + aC_{43}A', aBC_{13} = C_{42}, aBC_{14} = aC_{43}. \tag{8}$$

Зауважимо, що згідно вищедоведеного, з рівності $a(x+ay) = 0 (x, y \in R)$ випливає: $x \in Ra + \operatorname{Ann}_R a \subset P$.

Звідси і із (3) – (8) одержуємо:

$$C_{21} \equiv C_{24} \equiv C_{32} \equiv C_{34} \equiv C_{41} \equiv C_{42} \equiv 0 \pmod P, \tag{9}$$

$$C_{31} \equiv 0 \pmod{a^2R}, \tag{10}$$

$$C_{44} \equiv C_{33} \equiv C_{22} \equiv C_{11} \pmod P, \tag{11}$$

$$AC_{11} \equiv C_{33}A' \pmod P, BC_{11} \equiv C_{44}B' \pmod P. \tag{12}$$

Враховуючи (9)–(12), дістаємо, що матриця C_{11} — оборотна за модулем P і

$$\begin{cases} AC_{11} \equiv C_{11}A' \pmod P, \\ BC_{11} \equiv C_{11}B' \pmod P. \end{cases}$$

Отже, задача (Π, R) включає задачу описання з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над полем R/P (n — довільне натуральне число). Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай R — комутативне нетерове кільце з одиницею. Задача* (Π, R) *дика тоді і тількм тоді, коли R — нерегулярне кільце.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай R — регулярне нетерове кільце. Як відомо ([11], гл. 3, §5, твердження 2), нетерове регулярне кільце є цілком звідним, тобто, лівий регулярний R-модуль ${}_RR$ представляється у вигляді прямої суми: ${}_RR = {}_R M_1 \oplus \ldots \oplus {}_R M_s$, де M_i — незвідний лівий R-модуль, $i = 1, \ldots, s$, s — натуральне число. Очевидно, M_i — ідеал кільця R_i, отже $M_i = Re_i$, де e_i — ідемпотент кільця R $(i = 1, \ldots, s)$. В силу незвідності модуля M_i, кільце Re_i не містить ненульових власних ідеалів. Отже, Re_i — поле $(i = 1, \ldots, s)$. Таким чином, R можна представити у вигляді прямого добутку $R \cong F_1 \times \ldots \times F_s$ скінченної кількості полів $F_1, \ldots, F_s$. Не обмежуючи загальності надалі утотожнюватимемо R з прямим добутком $F_1 \times \ldots \times F_s$. Нехай $A, B \in \mathrm{M}(n, R)$, $A = \|(a_{ij1}, \ldots, a_{ijs})\|$, $B = \|(b_{ij1}, \ldots, b_{ijs})\|$ $(a_{ijk} \in F_k, b_{ijk} \in F_k; i, j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, s)$. Легко бачити, що матриці A і B еквівалентні над R тоді і тільки тоді, коли для кожного $k \in \{1, \ldots, s\}$ F_k-матриці $A_k = \|a_{ijk}\|$ і $B_k = \|b_{ijk}\|$ еквівалентні над F_k. Тоді задача (Π, R) дика тоді і тільки тоді, коли, принаймні, одна з задач (Π, F_k) $(k = 1, \ldots, s)$ є дикою. Так як F_k — поле, то (Π, F_k) не дика $(k = 1, \ldots, s)$. Отже, (Π, R) не є дикою.

Достатність випливає з теореми 1. Теорему доведено.

Нехай $A, B, A', B' \in \mathrm{M}(n, R)$. Пари матриць (A, B) і (A', B') називаються еквівалентними, якщо існують такі матриці $C, D \in \mathrm{GL}(n, R)$, що $AC = DA', BC = DB'$. Будемо позначати задачу описання пар матриць з точністюдо еквівалентності над R через $(2\mathcal{E}, R)$. Задача $(2\mathcal{E}, R)$ розв'язана у випадку, коли R — поле ([12], гл. XII, §5, теорема 5). В [1] показано, що задача $(2\mathcal{E}, R)$ дика, якщо кільце R локальне або цілісне і не є полем.

Теорема 3. *Нехай R – комутативне кільце з одиницею. Тоді справедливі наступні твердження.*

1) Якщо R нерегулярне, то задача $(2\mathcal{E}, R)$ дика.

2) Якщо R нетерове, то задача $(2\mathcal{E}, R)$ дика тоді і тільки тоді, коли R — нерегулярне кільце.

Доведення. 1) легко слідує з теореми 1.

2) *Необхідність.* Нехай R — регулярне кільце. Як було показано в доведенні теореми 2, R ізоморфне прямому добутку скінченної кількості полів: $R \cong F_1 \times \ldots \times F_s$. Так як задача $(2\mathcal{E}, F_i)$ не дика $(i = 1, \ldots, s)$, то задача $(2\mathcal{E}, R)$ також не дика. Отже, з дикості задачі $(2\mathcal{E}, R)$ випливає, що R — нерегулярне кільце.

Достатність легко випливає з теореми 1. Теорему доведено.

1. *Гудивок П. М.* Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами // Сб. “Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры”. – К.: Ин-т матем. АН Украины. – 1993. – С. 431-437.
2. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1964. – **28**, №4. – С. 875–910.
3. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.
4. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов // Матем. сб., К.: Наукова думка. – 1976. – С. 275–277.
5. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произведения групп над полными доскретно нормированными кольцами // ДАН СССР. – 1977. – **237**, №1. – С. 25–27.
6. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
7. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – **266**. – P. 1–22.
8. *Гудивок П. М., Погориляк В. И.* Представления конечных p-групп над локальными кольцами положительной характеристики // ДАН УРСР. Сер. А. – 1989. – №2. – С. 5–8.
9. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6. – С. 753–765.
10. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми P-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – К.: Ин-т матем. АН Украины. – 1993. – С. 5–14.
11. *Ламбек И.* Кольца и модули. – М.: Мир. – 1971. – 280 с.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука. – 1988. – 550 с.

Одержано 12.10.2004