УДК 512.547.25

О. А. Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО НЕЗВІДНІ МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ 2-ГРУПИ ДАНОГО СТЕПЕНЯ НАД НАПІВПЕРВІСНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Let R be a commutative semiprime local ring of characteristic 2, which contain nonprime annihilator of some element of the ring R. It has been proved, that the number of nonequivalent irreducible matrix R-representations of nontrivial finite 2-group of arbitrary greater then one degree is infinite if residue class ring of ring R is infinite.

Нехай R — комутативне напівпервісне локальне кільце характеристики 2, яке містить неголовний анулятор деякого елемента кільця R. Показано, що число нееквівалентних незвідних матричних R-зображень скінченної нетривіальної 2-групи наперед заданого більшого ніж одиниця степеня нескінченне, якщо поле лишків кільця R нескінченне.

Добре відомо [1], що довільне матричне зображення скінченної групи G незвідне над дедекіндовою областю R тоді і тільки тоді, коли воно незвідне над її полем відношень F, а число незвідних нееквівалентних F-зображень групи G не перевищує порядок групи G. Якщо R — кільце цілих чисел скінченного розширення F поля $\mathbb{Q}$, то за теоремою Жордана-Цассенхауза множина F-еквівалентних зображень групи G розпадається на скінченне число класів R-еквівалентних зображень групи G (див. також [2, 3]). П. М. Гудивок та Є. Я. Погоріляк [4, 5] показали, що над нетеровим факторіальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень скінченної p-групи H порядку $|H| > 1$ довільного наперед заданого степеня $n > 1$. В [10] вияснено, коли є скінченною множина нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня скінченної p-групи над комутативним артіновим локальним кільцем характеристики p^s ($s > 0$). В [9] показано, що над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем з нескінченним полем лишків число нееквівалентних незвідних матричних зображень скінченної p-групи G порядку $|G| > 1$ наперед заданого степеня $n > 1$ нескінченне, якщо $|G| > 2$ або число n непарне.

В роботі вияснясться, коли є скінченною множина всіх нееквівалентних незвідних матричних зображень наперед заданого степеня довільної скінченної 2-групи над комутативним нетеровим локальним напівпервісним нецілісним кільцем характеристики 2, кільце класів лишків якого нескінченне.

Нехай R — комутативне кільце з одиницею. Далі через $\operatorname{Rad} R$ будемо позначати радикал Джекобсона кільця R, $\operatorname{rad} R$ — первісний радикал кільця R, R^* — мультиплікативну групу кільця R, $\det M$ — детермінант квадратної матриці M над комутативним кільцем, $\operatorname{Ann} a = \{x \in R | ax = 0\}$ — анулятор елемента $a \in R$ у кільці R.

Теорема 1. *Нехай $G = \langle a \rangle$ — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, R — комутативне нетерове локальне кільце характеристики 2 з нескінченним полем лишків, $\operatorname{rad} R = \{0\}$ і для деякого ненульового елемента $u \in R$ $\operatorname{Ann} u$ містить не головний ідеал. Існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних R-зображень групи G довільного наперед заданого степеня $n > 1$.*

Доведення. Очевидно теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2. З [9] випливає, що досить розглянути випадок, коли n — непарне число. Нехай v, $w \in \operatorname{Ann} u$, $v \notin wR$, $w \notin vR$. Припустимо спочатку, що $v^2 \notin vwR + w^2R$, $w^2 \notin v^2R + vwR$. Розглянемо відображення Γ_λ вигляду $a \to \Gamma_\lambda(a) =$

$= E + S(\lambda)$, де E — одинична матриця порядку n, $S(\lambda)$ — квадратна матриця порядку n над кільцем R,

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} vw & w^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda u \\ v^2 & vw & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ vw & w^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, Γ_λ є R-зображенням групи G для будь-якого $\lambda \in R^*$.

Припустимо, що зображення Γ_λ звідне. Тоді для деякої матриці $C \in GL(n, R)$

$$C^{-1}S(\lambda)C = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де A, B — квадратні матриці над кільцем R відповідно порядків r і $n-r$ $(1 \le r < n)$.

Нехай α, β, γ, $\delta \in R$, $\alpha u + \beta v^2 + \gamma vw + \delta w^2 = 0$. Тоді $\alpha u^2 = 0$, $(\alpha u)^2 = 0$, $\alpha u = 0$, $\alpha \in \operatorname{Rad} R$. Крім того $\beta v^2 + \gamma vw + \delta w^2 = 0$ і β, $\delta \in \operatorname{Rad} R$. Звідси і з (1) одержимо

$$C^{-1}M_iC \equiv \begin{pmatrix} A_i & D_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \pmod{\operatorname{Rad} R} \quad (i = 1, 2, 3),$$

де

$$M_1 = M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де A_i, B_i — квадратні матриці над кільцем R відповідно порядків r і $n-r$ $(i = 1, 2, 3)$ Легко показати, що

$$N_1 = N_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = N_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $N_1 = N_1(\lambda) = (M_1(\lambda)M_2)^{\frac{n-3}{2}} M_1(\lambda)M_3$, $N_2 = N_2(\lambda) = M_1(\lambda) + M_2 + M_3 + \lambda^{-1}N_1(\lambda)$. Тоді

$$C^{-1}N_iC \equiv \begin{pmatrix} A_i' & D_i' \\ 0 & B_i' \end{pmatrix} \pmod{\operatorname{Rad} R} \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

де A_i', B_i' — квадратні матриці над кільцем R відповідно порядків r і $n-r$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, одна із матриць A_1 або B_1 складаються з необоротних елементів. Нехай це буде матриця A_1. Із (2) одержуємо:

$$N_iC \equiv C \begin{pmatrix} A_i' & D_i' \\ 0 & B_i' \end{pmatrix} \pmod{\operatorname{Rad} R} \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Позначимо: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in R)$, $C_i = (c_{i1}, \ldots, c_{ir})$ $(i = 1, \ldots, n)$. З (3) дістаємо, що $C_2 \equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$, $C_1 = C_2A_2$, $C_i = C_{i+1}A_2$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, $\lambda C_n = C_1A_2$. Отже, $C_i \equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Значить, $\det C \equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Одержане протиріччя показує, що зображення Γ_λ незвідна над кільцем R.

Припустимо, що зображення Γ_λ еквівалентне зображенню $\Gamma_{\lambda'}$, де λ, $\lambda' \in R^*$, $\lambda \not\equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Тоді для деякої матриці $C \in GL(n, R)$ $C^{-1}\Gamma_\lambda(a)C = \Gamma_{\lambda'}(a)$. Тому $C^{-1}M_1(\lambda)C \equiv M_1(\lambda') \pmod{\operatorname{Rad} R}$, $C^{-1}M_iC \equiv M_i \pmod{\operatorname{Rad} R}$ $(i = 2, 3)$. Тоді, $C^{-1}(M_1(\lambda) + M_2 + M_3)C \equiv M_1(\lambda') + M_2 + M_3 \pmod{\operatorname{Rad} R}$ і $\lambda \equiv \det(M_1(\lambda) + M_2 + M_3) \equiv \det(M_1(\lambda') + M_2 + M_3) \equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$, що неможливо.

Припустимо тепер, що $v^2 \in vwR + w^2R$. Нехай $v^2 = kvw + lw^2$ $(k, l \in R)$. Якщо $l \equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$, то покладемо $v_1 = v + mw$, де $m \in R$, $m \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$, $m \not\equiv k \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Тоді $v = v_1 + mw$ і $v_1^2 + m^2w^2 = kv_1w + kmw^2 + lw^2$, $v_1^2 = kv_1w + (m^2 + km + l)w^2$, $m^2 + km + l \equiv m(m+k) \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Отже, не зменшуючи загальності будемо вважати, що $l \in R^*$.

Розглянемо відображення Γ_λ вигляду $a \to \Gamma_\lambda(a) = E + S(\lambda)$, де E — одинична матриця порядку n, $S(\lambda)$ — квадратна матриця порядку n над кільцем R,

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} v & w & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda u \\ kv + lw & v & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ v & w & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, Γ_λ є R-зображенням групи G для будь-якого $\lambda \in R^*$.

Припустимо, що зображення Γ_λ звідне. Тоді для деякої матриці $C \in GL(n, R)$

$$C^{-1}S(\lambda)C = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де A, B — квадратні матриці над кільцем R відповідно порядків r і $n-r$ $(1 \le r < n)$.

Нехай α, β, $\gamma \in R$, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Тоді $\alpha u^2 = 0$, $(\alpha u)^2 = 0$, $\alpha u = 0$, $\alpha \in \operatorname{Rad} R$. Крім того $\beta v + \gamma w = 0$ і $\gamma \in \operatorname{Rad} R$. Звідси і з (4) одержимо

$$C^{-1}M_iC \equiv \begin{pmatrix} A_i & D_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \pmod{\operatorname{Rad} R} \quad (i = 1, 2, 3),$$

де

$$M_1 = M_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де A_i, B_i — квадратні матриці над кільцем R відповідно порядків r і $n-r$ $(i = 1, 2)$ Легко показати, що

$$N_1 = N_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = N_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ l & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $N_1 = N_1(\lambda) = (M_1(\lambda)M_2)^{\frac{n-1}{2}}$, $N_2 = N_2(\lambda) = M_1(\lambda) + M_2 + \lambda^{-1}N_1(\lambda)$. Тоді зображення Γ_λ незвідне.

Припустимо, що зображення Γ_λ еквівалентне зображенню $\Gamma_{\lambda'}$, де λ, $\lambda' \in R^*$, $\lambda \not\equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Тоді для деякої матриці $C \in GL(n, R)$ $C^{-1}\Gamma_\lambda(a)C = \Gamma_{\lambda'}(a)$. Тому $C^{-1}M_1(\lambda)C \equiv M_1(\lambda') \pmod{\operatorname{Rad} R}$, $C^{-1}M_2C \equiv M_2 \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Тоді, $C^{-1}(M_1(\lambda) + {+M_2})C \equiv (M_1(\lambda') + M_2) \pmod{\operatorname{Rad} R}$ і $\lambda \equiv l^{-1}\det(M_1(\lambda) + M_2) \equiv l^{-1}\det(M_1(\lambda') + {+M_2}) \equiv \lambda' \pmod{\operatorname{Rad} R}$, що неможливо. Теорема доведена.

1. *Curtis C. W., Reiner I.* Methods of representation theory. – New York: John Willems & Sons Inc, 1981. — V. 1. — 820 p.
2. *Maranda J. M.* On the equivalennce of representations of finite groups of automorphisms of modules over Dedekind domain // Canad. J. Math. — 1955. – **7**. – P. 401–404.
3. *Roggenkamp K. W.* R-orders in a split algebra have finitely many non-isomorphic irreducible lattice as soon as R has finite class number // Canad. J. Math. — 1971. – **14**. – P. 405–409.
4. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О модулярных представлениях конечных групп над областями целосности // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 78–86.
5. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородский национальний университет, 2003. – 119 с.
6. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С., Лихтман А. И.* О представлениях конечных групп над кольцом классов вычетов по модулю m // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, №1. – С. 81–89.
7. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
8. *Тилищак О. А.* Про незвідні зображення скінченних p-груп над деякими локальними кільцями характеристики p // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 104–110.
9. *Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченної p-групи над напівпервісним комутативним локальним кільцем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 156–159.
10. *Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченної p-групи над комутативним локальним кільцем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 108–114.

Одержано 9.11.2004