УДК 519.7

О. Ю. Червак, Ю. Ю. Червак (Ужгородський нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНА І ПАРЕТІВСЬКА ЗАДАЧІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

The multicriterion choice in set of alternatives of any nature wich be compared using numerical estimates is done in the article.

В роботі йдеться про багатокритеріальний вибір в множині альтернатив будь-якої природи, які порівнюються за допомогою числових оцінок.

В роботі йдеться про багатокритеріальний вибір в множині альтернатив будь-якої природи, які порівнюються за допомогою числових оцінок; нехай $c_k(x)$, $k = 1, 2, ..., q$ – функції оцінок, інакше, скалярні критеріальні функції. Узагальнені лексикографічна і паретівська задачі формулюються як задачі векторної оптимізації, порядки віддачі переваги в яких визначаються за допомогою опуклих конусів в просторі критеріїв R^q [1]; $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_q(x))^L$ – векторна критеріальна функція. Опуклий конус визначає бінарне відношення транзитивного порядку на R^q. Відношення, що визначає порядок в першій задачі, назвемо його узагальненим лексикографічним порядком, задається конусом Λ як множиною точок (векторів) $u = (u_1, u_2, \ldots, u_q)^T$, які задовольняють лексикографічній нерівності $\lambda u >^L 0$, де $\lambda \equiv \{\lambda_{ij}\}$ є невиродженою матрицею q-го порядку. (Верхній індекс T означає операцію транспонування. $>^L$ – знак відношення "лексикографічно більше"в субординації ранжирування R_g, в якій 1-а компонента вектора має найвищий ранг і ранг k-ої компоненти вищий за ранг l-ої компоненти, якщо і тільки якщо $k < l$.) Позначимо це відношення через $>^\lambda$, що читається "λ – лексикографічно більше". Відношення, що визначає порядок в другій задачі, назвемо його узагальненим паретівським порядком, задається конусом Π як множиною точок, які задовольняють паретівській нерівності $\pi u >^P 0$, де $\pi \equiv \{\pi_{ij}\}$ є невиродженою матрицею. ($>^P$ – знак відношення "паретівськи більше яке не залежить від упорядкування компонент вектора, так як визначається субординацією R_v попарної рівної важливості цих компонент) Альтернатива y краща за альтернативу x в узагальненому лексикографічному порядку віддачі переваги, якщо і тільки якщо $c(y) >^\lambda c(x)$, що означає $c(y) - c(x) \in \Lambda$, тобто $\lambda c(y) >^L \lambda c(y)$. y краща x в узагальненому паретівському порядку віддачі переваги, якщо і тільки якщо $c(y) >^\pi c(x)$, що означає $c(y) - c(x) \in \Pi$, тобто $\pi c(y) >^P \pi c(x)$.

Нехай X – допустима множина альтернатив в узагальнених лексикографічній і паретівській задачах, які запишемо коротко:

$$\max{}^\lambda c(x), \;\; x \in X; \tag{1}$$

$$\mathrm{opt}^\pi c(x), \;\; x \in X. \tag{2}$$

$\widehat{x} \in X$ – оптимальний розв'язок задачі (1), якщо і тільки якщо не існує $y \in X$, така що $c(y) >^L c(\widehat{x})$; множину оптимальних розв'язків цієї задачі позначимо $\widehat{X}^\lambda$. $\widehat{x} \in X$ – оптимальний розв'язок задачі (2), якщо і тільки якщо не існує $y \in X$, така що $c(y) >^\pi c(\widehat{x})$; множину оптимальних розв'язків цієї задачі позначимо $\widehat{X}^\pi$. В подальшому, розглядаються умови, при яких узагальнений лексикографічний порядок є надпорядком узагальненого паретівського порядку за правилом віддачі переваги, тобто умови, при яких $\widehat{X}^\lambda \subset \widehat{X}^\pi$ [1].

За теоремою 3.2 [1], узагальнений лексикографічний порядок є надпорядком узагальненого паретівського порядку в R^q за правилом віддачі переваги, якщо і тільки якщо $\Pi \in \Lambda$, тобто якщо і тільки якщо з відношення $\pi u >^P 0$ випливає відношення $\lambda u >^L 0$ або, інакше, з відношення

$$v >^P 0 \tag{3}$$

випливає відношення

$$\gamma v >^L 0, \tag{4}$$

де $\gamma = \lambda\pi^{-1}$, π^{-1} – матриця, обернена до π. Якщо $\lambda = \pi$, то γ одинична матриця, отже, тоді з відношення (3) випливає відношення (4), так як лексикографічний порядок в будь-якій субординації ранжирування R_g $(i_1, i_2, \dots, i_q)$ (в якій i_1-а компонента вектора має найвищий ранг, а ранг i_k-ої компоненти вищий за ранг i_2-ої компоненти, якщо і тільки якщо $k > l$) є надпорядком паретівського порядку.

Означення 1. *Матриця π називається матрицею паретівського перетворення, якщо і тільки якщо вона зберігає паретівський порядок*:

$$\pi u >^P 0, \tag{5}$$

якщо і тільки якщо виконується відношення

$$u >^P 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Якщо існує перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_q)$ індексів $1, 2, \dots, q$, така що*

$$\pi_{i_k, j} > 0, \text{якщо } k = j, \;\; \pi_{i_k, j} > 0, \text{якщо } k \neq j, \tag{7}$$

або, інакше, якщо π є діагональною матрицею (з точністю до нумерації рядків) з додатними елементами на головній діагоналі, то π є матрицею паретівського перетворення.

Доведення. Якщо виконуються умови (7), то, за правилом множення матриці на вектор, i_k-а компонента вектора πu $(k = 1, 2, \dots, q)$, яку позначимо $(\pi u)_{i_k}$, обчислюється за формулою $(\pi u)_{i_k} = \pi_{i_k, k} \cdot u_k$, де $\pi_{i_k, k} > 0$. Так як $(\pi u)_i = 0$, якщо і тільки якщо $u_k = 0$, і $(\pi u)_{i_k} > 0$, якщо і тільки якщо $u_k > 0$, то умова (5) виконується, якщо і тільки якщо виконується умова (6). Теорема доведена.

Таким чином, якщо π матриця паретівського перетворення, то множина оптимальних розв'язків задачі (2) співпадає з множиною оптимальних розв'язків паретівської задачі, так як, за означенням 1, паретівський і узагальнений паретівський – еквівалентні порядки в R^q.

Означення 2. [1]. *Матриця λ називається матрицею лексикографічного перетворення в субординації R_g, якщо і тільки якщо вона зберігає лексикографічний порядок в цій субординації*:

$$\lambda u >^L 0, \tag{8}$$

якщо і тільки якщо виконується відношення

$$u >^L 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Якщо існує перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_q)$ індексів $1, 2, \dots, q$, така що*

$$\lambda_{i_k, j} > 0, \text{якщо } k = j, \;\; \lambda_{i_k, j} > 0, \text{якщо } k < j, \;\; \lambda_{i_k, j} - \text{будь-яке, якщо } k > j, \tag{10}$$

або, інакше, якщо λ є нижньою трикутною матрицею (з точністю до нумерації рядків) з додатними елементами на головній діагоналі, то λ є матрицею лексикографічного перетворення в субординації R_g.

Доведення. Якщо виконуються умови (10), то, за правилом множення матриці на вектор, компоненти вектора λu, позначимо їх $(\lambda u)_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, обчислюються за формулами

$$(\lambda u)_{i_1} = \lambda_{i_1,1} \cdot u_1, \text{де } \lambda_{i_1,1} > 0,$$

$$(\lambda u)_{i_k} = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{i_k,j} \cdot u_j + \lambda_{i_k,k} \cdot u_k, \text{де } \lambda_{i_k,k} > 0,\ k = 2, 3, \ldots, q. \tag{11}$$

Нехай виконується умова (8), тобто або

$$(\lambda u)_{i_1} > 0, \tag{12}$$

або існує t, $2 \leq t \leq q$, такий що

$$(\lambda u)_{i_1} = 0,\ k = 2, 3, \ldots, t-1, (\lambda u)_{i_t} > 0. \tag{13}$$

Тоді, $u_1 > 0$, якщо і тільки якщо виконується умова (12), і $u_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, t-1$, $u_t > 0$, якщо і тільки якщо виконуються умови (13). Теорема доведена.

Таким чином, якщо λ матриця лексикографічного перетворення в субординації R_g, то множина оптимальних розв'язків задачі (1) співпадає з множиною оптимальних розв'язків лексикографічної задачі в цій субординації, так як, за означенням 2, лексикографічний і узагальнений лексикографічний – еквівалентні порядки в R^q.

Нехай $>_i^L$ – знак відношення "лексикографічно більша"в субординації ранжирування R_g $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$. Матрицю λ можна назвати матрицею лексикографічного перетворення в цій субординації, якщо і тільки якщо з відношення $\lambda u >_i^L 0$ випливає відношення $u >_i^L 0$. Але, очевидно, шляхом перенумерації компонент векторів, лексикографічний порядок в субординації $R_g(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ може бути зведений до порядку в субординації R_g. Одначе, слід мати на увазі, що в різних субординаціях ранжирування лексикографічні задачі багатокритеріальної оптимізації на одній і тій множині допустимих альтернатив X мають, в загальному, різні оптимальні розв'язки. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що лексикографічні задачі визначаються в субординації R_g.

Теорема 3. *Якщо π матриця паретівського перетворення і λ матриця лексикографічного перетворення, то узагальнений лексикографічний порядок є надпорядком узагальненого паретівського порядку за правилом віддачі переваги.*

Доведення. За означенням 1, з відношення (5) випливає відношення (6), з якого випливає відношення (9). За означенням 2, з відношення (9) випливає відношення (8). Отже, з відношення (5) випливає відношення (8). Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо γ матриця паретівського або лексикографічного перетворення, то узагальнений лексикографічний порядок є надпорядком узагальненого паретівського порядку за правилом віддачі переваги.*

Доведення. Зазначимо, якщо γ матриця паретівського перетворення, тоді вона є і матрицею лексикографічного перетворення. Розглянемо відношення (3). З нього випливає відношення $v >^L 0$, з якого випливає відношення (4). Отже з відношення (3) випливає відношення (4). Теорема доведена.

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.

Одержано 8.12.2004