УДК 512.6+512.8

В. В. Бондаренко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ПРО СПРЯЖЕНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОРЯДКУ 2 В ГРУПІ УНІТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

In this paper we study conjugacy classes of the groups of unitriangular matrices over a field of characteristic 2 that contain (or, equivalently, consist of) elements of order 2.

У статті вивчаються класи спряжених елементів груп унітрикутних матриць над полем характеристики 2 у випадку, коли вони складаються із елементів порядку 2.

Вивченню класів спряжених елементів матричних груп присвячено багато робіт; відносно цієї тематики для груп унітрикутних матриць (а саме такі групи розглядаються у цій статті) див. напр., роботи [1–6] та посилання, що містяться в них. У цій статті вивчаються класи спряжених елементв груп унітрикутних матриць над полем характеристики 2.

На протязі всієї статті k позначає поле характеристики 2, а k^* — множину його оборотніх елементів: $k^* = k \setminus 0$. $\mathbf{UT}_n(k)$ $(n > 1)$ позначає групу верхніх унітрикутних матриць над полем k. Порядком матриці $A \in \mathbf{UT}_n(k)$ ми називаємо найменше $p > 0$, таке, що $A^p = 0$; якщо такого p не існує, то A — матриця нескінченного порядку.

Для натуральних чисел p і q, де $p \geq q$, покладемо $[p, q] = \{p, p+1, \ldots, q\}$, $[p, q]^2 = [p, q] \times [p, q]$ і позначимо через $[p, q]^2_<$ підмножину в $[p, q]^2$, що складається із елементів (i, j), таких, що $i < j$.

Надалі множина $[p, q]^2_<$ буде зустрічатися, як правило, при $p = 1, q = n$. Елементи із $[1, n]^2_<$ (лінійно) впорядкуємо наступним чином:

$$(n-1, n) \prec (n-2, n-1) \prec (n-2, n) \prec \ldots \prec (1, 2) \prec \ldots \prec (1, n).$$

Іншими словами, $(i, j) \prec (s, t)$ для різних пар (i, j) та (s, t) тоді і лише тоді, коли або $i \geq s$, або $i = s$ і $j < t$.

Для неодиничної матриці $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$, із $\mathbf{UT}_n(k)$ позначимо через $\mu(A)$ пару $(p, q) \in [1, n]^2_<$, таку, що $a_{pq} \neq 0$ і $a_{ij} = 0$ при $(i, j) \prec (p, q)$.

Через $E(n)$ будемо позначати одиничну матрицю розміру $n \times n$, а через $I_{ij}(n)$ — матрицю розміру $n \times n$, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на решті місць стоять нульові елементи. Часто замість $E(n)$ та $I_{ij}(n)$ ми будемо писати просто E та I_{ij} (особливо це стосується випадків, коли ясно, про яке n іде мова).

Нехай P — підмножина в $[1, n]^2_<$. Елемент $x = (i, j) \in [1, n]^2_<$ назвемо P-ізольованим, якщо для довільного елементу $y = (p, q) \in P$, $y \neq x$, множина $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ порожня (зрозуміло, що $y = x$ може мати місце лише в тому випадку, коли $x \in P$). Позначимо через $\mathcal{I}_n$ сукупність всіх підмножин $P \subset [1, n]^2_<$, $P \neq \varnothing$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P-ізольованим.

Нехай $X \in \mathcal{I}_n$ і λ — деяке відображення із X в k^*; замість $\lambda((i, j))$ будемо писати $\lambda(i, j)$. Ми зіставляємо парі (X, λ) матрицю $M(X, \lambda) \in \mathbf{UT}_n(k)$ наступним чином:

$$M(X, \lambda) = E(n) + \sum_{(i,j) \in X} \lambda(i, j) I_{ij}(n).$$

Легко бачити, що $(M(X, \lambda))^2 = E(n)$.

У цій статті ми доведемо наступну теорему, яка описує повну систему представників класів спряжених елементів групи $\mathbf{UT}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{(k)}$, що складаються із елементів порядку **2**.

Теорема. 1) *Нехай K — клас спряжених елементів групи $\mathbf{UT}_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2. Тоді існують X та λ, такі, що $M(X,\lambda) \in K$.*

2) *Нехай K_1, K_2 — класи спряжених елементів в $\mathbf{UT}_n(k)$, що містять відповідно елементи $M(X_1,\lambda_1)$ і $M(X_2,\lambda_2)$. Якщо $(X_1,\lambda_1) \neq (X_2,\lambda_2)$, то $K_1 \neq K_2$.*

Теорема може бути доведеною з використанням одного із результатів роботи [7]. Ми приведемо пряме доведення.

Доведемо спочатку твердження 1). Доведення будемо проводити індукцією по n. База індукції — це випадок $n = 2$. Твердження в цьому випадку очевидне: довільна матриця A із $\mathbf{UT}_2(k)$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(X,\lambda),$$

де $X = \{(1,2)\}$ і $\lambda(1,2) = a$.

Нехай тепер $n > 2$. Зафіксуємо в класі K матрицю A і нехай $\mu(A) = (p,q)$. Відмітимо, що коли ми виписуємо матрицю A в явному вигляді, то її елемент, що стоїть на перетині p-го рядка та q-го стовпця, ми записуємо жирним шрифтом.

Щоб ідея доведення була більш зрозумілою, ми розглянемо спочатку частинні випадки $n = 3,4,5$ (виписуючи всі матриці в явному вигляді).

Розглянемо спочатку випадок $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $(p,q) = (2,3)$, то із $A^2 = E$ випливає, що $a_{12} = 0$, і ми маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

і, отже, матриця A спряжена з матрицею $M(X,\lambda)$, де $X = \{(2,3)\}$ і $\lambda(2,3) = a_{23}$.

Якщо $(p,q) = (1,2)$, то із $A^2 = E$ випливає, що $a_{23} = 0$, і ми маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

і, отже, матриця A спряжена з матрицею $M(X,\lambda)$, де $X = \{(1,2)\}$ і $\lambda(1,2) = a_{12}$.

Нарешті, якщо $(p,q) = (1,3)$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(X,\lambda),$$

де $X = \{(1,3)\}$ і $\lambda(1,2) = a_{13}$.

Таким чином, в усіх випадках A спряжена із $M(X,\lambda)$, де $X = (p,q)$ і $\lambda(p,q) = a_{pq}$.

Розглянемо тепер випадок $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $(p,q) = (3,4)$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a'_{13} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $a'_{13} = a_{13} - a_{12}a_{24}/a_{34}$. Оскільки остання матриця має порядок 2 (бо порядок два має матриця A), то $a'_{13} = a_{23} = 0$ і значить матриця A спряжена з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

яка у випадку, коли $a_{12} = 0$, дорівнює матриці $M(X,\lambda)$ при $X = (3,4)$ і $\lambda(3,4) = a_{34}$, а у випадку, коли $a_{12} \neq 0$, — матриці $M(X,\lambda)$ при $X = \{(1,2),(3,4)$ і $\lambda(1,2) = a_{12}$, $\lambda(3,4) = a_{34}$.

Якщо $(p,q) = (2,3)$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{24}}{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{24}}{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{24}}{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a'_{14} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $a'_{14} = a_{14} - a_{13}a_{24}/a_{23} - a_{13}a_{24}/a_{23} + a_{13}a_{23}a_{24}/a_{23}^2$. Оскільки остання матриця має порядок 2, то $a_{12} = 0$ і значить матриця A спряжена з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

яка у випадку, коли $a'_{14} = 0$, дорівнює матриці $M(X, \lambda)$ при $X = (2,3)$ і $\lambda(2,3) = a_{23}$, а у випадку, коли $a'_{14} \neq 0$, — матриці $M(X, \lambda)$ при $X = \{(2,3), (1,4)$ і $\lambda(2,3) = a_{23}$, $\lambda(1,4) = a'_{14}$.

Якщо $(p, q) = (2, 4)$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{14}}{a_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{14}}{a_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{14}}{a_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{14}}{a_{24}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки остання матриця має порядок 2, то $a_{12} = 0$ і значить матриця A спряжена з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

яка у випадку, коли $a_{13} = 0$, дорівнює матриці $M(X, \lambda)$ при $X = (2,4)$ і $\lambda(2,4) = a_{24}$, а у випадку, коли $a_{13} \neq 0$, — матриці $M(X, \lambda)$ при $X = \{(1,3), (2,4)$ і $\lambda(1,3) = a_{13}$, $\lambda(2,4) = a_{24}$.

Якщо $(p, q) = (1, 2)$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & -\frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

і, отже, матриця A спряжена з матрицею $M(X, \lambda)$, де $X = \{(1,2)\}$ і $\lambda(1,2) = a_{12}$.

Якщо $(p,q) = (1,3)$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{14}}{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a_{13}} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{14}}{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{14}}{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a_{13}} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{14}}{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a_{12}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

і, отже, матриця A спряжена з матрицею $M(X, \lambda)$, де $X = \{(1,3)\}$ і $\lambda(1,3) = a_{13}$.

Нарешті, якщо $(p,q) = (1,4)$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a_{14}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(X, \lambda),$$

де $X = \{(1,4)\}$ і $\lambda(1,4) = a_{14}$.

Розглянемо, нарешті, випадок $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що в цьому випадку ми не будемо доводити до кінця кожний із нових випадків (як при $n = 3,4$), а будемо їх зводити до випадку $n = 3$.

Нехай спочатку $(p,q) = (4,5)$. Тоді маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_{15}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_{25}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{35}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_{15}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_{25}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{35}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_{15}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_{25}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{35}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a_{15}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_{25}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{35}}{a_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a'_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a'_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де a'_{14} і a'_{24} — деякі елементи. Оскільки остання матриця має порядок 2 (бо порядок два має матриця A), то $a'_{14} = a'_{24} = a_{34} = 0$ і, отже, матриця A спряжена з матрицею

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Викреслимо із A' 4-й і 5-й рядки та 4-й і 5-й стовпці і позначимо отриману матрицю через $\overline{A'}$. Якщо $A' = 0$, то $A = M(X, \lambda)$, де $X = \{(4,5)\}, \lambda(4,5) = a_{45}$. Якщо ж $A' \neq 0$, то згідно (розглянутого вище) випадку $n = 3$ матриця $\overline{A'}$ спряжена з матрицею $M(Y, \gamma)$ для деяких Y і γ. Іншими словами, існує матриця

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = M(Y, \gamma).$$

Легко бачити, що тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & 0 \\ 0 & 1 & s_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = M(X, \lambda),$$

де $X = Y \cup \{(4,5)\}$ і $\lambda(s,t) = \gamma(s,t)$ при $(s,t) \in Y$, $\lambda(4,5) = a_{45}$.

Нехай $(p,q) = (3,4)$. Тоді маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_{35}}{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_{35}}{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_{35}}{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{14}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_{24}}{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{35}}{a_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a'_{13} & 0 & a'_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a'_{25} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де a'_{13}, a'_{15} і a'_{25} — деякі елементи. Оскільки остання матриця має порядок 2, то $a'_{13} = a_{23} = 0$ і, отже, матриця A спряжена з матрицею

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & a'_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a'_{25} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Викреслимо із A' 3-й і 4-й рядки та 3-й і 4-й стовпці і позначимо отриману матрицю через $\overline{A'}$. Якщо $A' = 0$, то $A = M(X, \lambda)$, де $X = \{(3,4)\}, \lambda(3,4) = a_{34}$. Якщо ж $A' \neq 0$, то згідно (розглянутого вище) випадку $n = 3$ матриця $\overline{A'}$ спряжена з матрицею $M(Y, \gamma)$ для деяких Y і γ. Іншими словами, існує матриця

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a'_{15} \\ 0 & 1 & a'_{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = M(Y, \gamma).$$

Легко бачити, що тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 & a'_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a'_{25} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a_{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = M(X, \lambda),$$

де $X = Y \cup \{(3,4)\}$ і $\lambda(s,t) = \gamma(s,t)$ при $(s,t) \in Y$, $\lambda(3,4) = a_{34}$.

Випадки, коли $(p,q) = (3,5), (2,3), (2,4), (2,5)$ розглядаються аналогічним чином:

a) спочатку переходимо до матриці A', яка спряжена до матриці A і така, що p-і та q-і рядки матриці $A' - E$ є нульовими;

b) потім переходимо до матриці $\overline{A'}$ яка (згідно вже розглянутого випадку $n = 3$) спряжена до деякої матриці $M(Y, \gamma)$;

c) нарешті показуємо, що матриця A' (а значить і A) спряжена до матриці $M(X, \lambda)$, де $X = Y \cup \{(p,q)\}$ і $\lambda(s,t) = \gamma(s,t)$ при $(s,t) \in Y$, $\lambda(p,q) = a_{pq}$.

А випадки, коли $(p,q) = (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$ розглядаються таким же чином, як відповідні випадки при $n = 4$.

У випадку, коли $n > 5$, твердження 1) теореми доводиться по тій же схемі, що і у випадках $n = 4, 5$. Більш точно, випадок $\mu(A) = (1,q)$ розглядається таким же чином, як відповідний випадок для $n = 4$, а у випадку $\mu(A) = (p,q)$, $p \neq 1$, різниця в доведенні полягає лише в тому, що при розгляді кроку b) замість випадку $n = 3$ треба користуємося нашим індуктивним припущенням, а саме твердженням 1) при $m = n - 2$.

Перед тим, як перейти до другої частини теореми, сформулюємо два прості твердження (які є вірними для поля довільної характеристики).

Лема. *Нехай* $A = (a_{ij})$ *і* $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *— неодиничні спряжені матриці із* $\mathbf{UT}_n(k)$. *Тоді*

a) $\mu(A) = \mu(B)$, *і якщо при цьому* $\mu(A) = (p, q)$, *то* $a_{pq} = b_{pq}$;

b) *матриці* $A - E$ *і* $B - E$ *мають однаковий ранг.*

Шляхом безпосереднього множення матриць легко довести, що $\mu(SAS^{-1}) = \mu(A)$; звідси випливає твердження a) леми. Твердження b) леми випливає із того, що коли $SAS^{-1} = B$, то $S(A - E)S^{-1} = B - E$.

Переходимо тепер до доведення твердження 2) теореми. Нам потрібно довести, що матриці $M(X, \lambda)$ і $M(X', \lambda')$ спряжені тоді і лише тоді, коли $(X, \lambda) = (X', \lambda')$ (тобто коли ці матриці рівні).

Це твердження, як і твердження 1), будемо доводити індукцією по n. Випадок $n = 2$ очевидний: із рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(для довільних $s_{12}, a \in k$) маємо, що матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(X, \lambda)$$

та

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(X, \lambda')$$

(тут $X = \{(1, 2)\}$, $\lambda(1, 2) = a$, $\lambda'(1, 2) = a'$) спряжені тоді і лише тоді, коли $\lambda = \lambda'$, або, що те саме, $(X, \lambda) = (X, \lambda')$.

Щоб ідея доведення була більш зрозумілою, ми розглянемо спочатку частинні випадки $n = 3$ і $n = 4$ (виписуючи всі матриці в явному вигляді).

Якщо $n = 3$, то згідно розглянутого вище для матриці виду $M(X, \lambda)$ можливі такі випадки:

$$M_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $a \neq 0$. І згідно твердження a) леми дві такі матриці $M_i(a)$ і $M_j(b)$ спряжені тоді і лише тоді, коли вони рівні (іншими словами, $i = j$ і $a = b$), що і треба було довести.

Якщо $n = 4$, то згідно розглянутого вище для матриці виду $M(X, \lambda)$ можливі такі випадки:

$$M_1(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_5(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_6(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_7(a) = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_8(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_9(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $a, b \neq 0$.

Якщо M і M' — дві спряжені матриці такого типу, то згідно твердження a) леми $M = M'$, коли $M = M_i(a), M' = M_i(a')$, $i = 1, 3, 5, 7, 8, 9$. Значить, знову ж таки згідно твердження a) леми, залишилося розглянути такі варіанти:

4.1) $M = M_1(a), M' = M_2(a,b)$;

4.2) $M = M_2(a,b), M' = M_2(a,b')$;

4.3) $M = M_3(a), M' = M_4(a,b)$;

4.4) $M = M_4(a,b), M' = M_4(a,b')$;

4.5) $M = M_5(a), M' = M_6(a,b')$;

4.6) $M = M_6(a,b), M' = M_6(a,b')$.

Але згідно твердження a) леми варіанти 4.1), 4.3) і 4.5) неможливі, і тому нам треба розглянути лише випадки 4.2), 4.4) і 4.6).

Розглянемо спочатку випадок 4.2). Нехай матриці $M = M_2(a,b)$ і $M' = M_2(a,b')$ спряжені. Це означає, що існує матриця

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

І згідно розглянутого вище випадку $n = 2$ елементи b і b' рівні між собою, а це означає, що $M = M'$, що і треба було довести.

Розглянемо тепер випадок 4.4).

Нехай матриці $M = M_4(a,b)$ і $M' = M_4(a,b')$ спряжені. Це означає, що існує матриця

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо рівність

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

І згідно розглянутого вище випадку $n = 3$ елементи b і b' рівні між собою, а це означає, що $M = M'$, що і треба було довести.

Розглянемо нарешті випадок 4.6). Нехай матриці $M = M_4(a,b)$ і $M' = M_4(a,b')$ спряжені, тобто

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця рівність еквівалентна наступній рівності:

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із скалярних рівностей, що відповідають парам $(1,3)$ і $(2,4)^{*)}$ випливає відповідно, що $s_{12} = 0$ і $s_{34} = 0$. А значить остання матрична рівність має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 1 & \boldsymbol{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_{13} & s_{14} \\ 0 & 1 & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$^{*)}$Скалярна рівність, що відповідає парі (i,j) — це рівність $x_{ij} = y_{ij}$, де x_{ij} (відповідно y_{ij}) — елемент матриці $X = (x_{ij})$ (відповідно елемент матриці $Y = (y_{ij})$), яка стоїть в лівій (відповідно правій) частині матричної рівності.

звідки випливає, що

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s_{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остання матрична рівність еквівалентна рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s_{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а тоді згідно розглянутого вище випадку $n = 2$ елементи b і b' рівні між собою, а це означає, що $M = M'$, що і треба було довести.

Розглянемо тепер випадок, коли $n > 4$. В цьому випадку твердження 2) теореми доводиться по тій же схемі, що і у випадках $n = 3, 4$; різниця полягає лише в тому, що замість випадку $n = 2, 3$ треба користуватися нашим індуктивним припущенням.

Отже, нехай матриці $M = M(X, \lambda) = (m_{ij}), i, j = 1, 2 \dots n$, і $M' = M(X', \lambda') = (m'_{ij})$, $i, j = 1, 2 \dots n$, спряжені. Тоді згідно твердження b) леми $|X| = |X'|$ і, якщо $|X| = 1$, то $M = M'$; зокрема, $M = M'$, якщо $\mu(M) = (1, q)$ або $\mu(M') = (1, q)$ (бо тоді згідно твердження a) леми $X = X' = \{(1, q)\}$).

Таким чином, можна вважати, що $|X| = |X'| > 1$ (і тоді $\mu(M) \neq (1, q)$, $\mu(M') \neq (1, q)$). Тоді множини $Y = X \cap [1, n-1]^2_<$, $Y' = X' \cap [1, n-1]^2_<$, $Z = X \cap [2, n]^2_<$ та $Z' = X' \cap [2, n]^2_<$ непусті. Покладемо $\alpha = \lambda|_Y$, $\alpha' = \lambda'|_Y$, $\beta = \lambda|_Z$, $\beta' = \lambda'|_Z$.

Нехай

$$M(X, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(X', \lambda') = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1,n-1} & a'_{1n} \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & \boldsymbol{a'_{2,n-1}} & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3,n-1} & a'_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$M(Y, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(Y,\alpha')=\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1,n-2} & a'_{1,n-1}\\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2,n-2} & a'_{2,n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3,n-1} & a'_{3,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n-1,n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(Z,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ 0 & 1 & a_{24} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M(Z,\beta')=\begin{pmatrix} 1 & a'_{13} & a'_{14} & \dots & a'_{1,n-1} & a'_{1n}\\ 0 & 1 & a'_{24} & \dots & a'_{2,n-1} & a'_{2n}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3,n-2} & a'_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $M=M(X,\lambda)$ і $M'=M(X',\lambda')$ спряжені, то існує матриця

$$S=\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1,n-1} & s_{1n}\\ 0 & 1 & s_{23} & \dots & s_{2,n-1} & s_{2n}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & s_{3,n-1} & s_{3,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

така, що

$$SM(X,\lambda)S^{-1}=M(X',\lambda'). \tag{1}$$

Із (1) випливають, очевидно, рівності

$$TM(Y,\alpha)T^{-1}=M(Y',\alpha'), \tag{2}$$

$$RM(Z,\beta)R^{-1}=M(Z',\beta'), \tag{3}$$

де

$$T=\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1,n-2} & s_{1,n-1}\\ 0 & 1 & s_{23} & \dots & s_{2,n-2} & s_{2,n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & s_{3,n-2} & s_{3,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_{n-1,n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{13} & s_{14} & \dots & s_{1,n-1} & s_{1n} \\ 0 & 1 & s_{24} & \dots & s_{2,n-1} & s_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & s_{3,n-1} & s_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно індукційного припущення із рівностей (2), (3) випливає, що

$$M(Y, \alpha) = M(Y', \alpha'), \tag{4}$$

$$M(Z, \beta) = M(Z', \beta'). \tag{5}$$

Із рівностей (4), (5) маємо, що $a_{ij} = a'_{ij}$ для довільних i, j, таких, що $(i, j) \neq (1, n)$. І значить залишилося довести, що $a_{1n} = a'_{1n}$.

Із леми маємо, що або $a_{1n} = 0$ і $a'_{1n} = 0$, або $a_{1n} \neq 0$ і $a'_{1n} \neq 0$. У першому випадку зразу ж маємо, що $a_{1n} = a'_{1n}$. У другому випадку $a_{ij} = a'_{ij} = 0$ при $i = 1$, $j = 2, \dots, n-1$ і при $i = 2, \dots, n-1, j = n$. Тоді, записавши матричну рівність (1) у вигляді

$$SM(X, \lambda) = M(X', \lambda')S$$

і розглядаючи її скалярну рівність, що відповідає парі $(1, n)$, маємо, що $a_{1n} + s_{1n} = s_{1n} + a'_{1n}$, звідки $a_{1n} = a'_{1n}$, шо і треба було довести.

Теорема доведена.

1. *Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Циткин А. И.* Классы сопряженных элементов унитреугольной группы // Кибернетика. – 1990. – №1. – С. 40–48.
2. *Vera-Lopez A., Arregi J. M.* Conjugacy classes in Sylow p-subgroups of $GL(n, q)$ // IV Glasgow Math. J. – 1994. – **36**. – P. 91–96.
3. *Isaacs I. M., Dikran Karaguezian.* Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. – 1998. – **202**. – P. 704–711.
4. *Robinson, Georrrey R.* Counting conjugacy classes of unitriangular groups associated to finite-dimensional algebras // J. Group Theory. – 1998. – №1. – P. 271–274.
5. *Vera-Lopez A., Arregi J. M.* Conjugacy classes in unitriangular matrices // Linear Algebra Appl. – 2003. – **370**. – P. 85–124.
6. *Vera-Lopez A., Arregi J. M.* Computing in unitriangular matrices over finite fields // Linear Algebra Appl. – 2004. – **387**. – P. 193–219.
7. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear algebra Appl. – 2003. – **365**. – P. 45–90.

Одержано 19.09.2005