УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ

In the contains estimates of the rate of convergence to the normal law that generalise same results of for variables not identically distribyted.

В роботі містяться оцінки швидкості збіжності до нормального закону, що узагальнюють деякі результати для різно розподілених випадкових величин.

Використанню псевдомоментів у граничних теоремах присвячена велика кількість робіт, інформацію про які можна знайти в [1]. Крім того, в [1] відзначається (стор. 38) можливість використання псевдомоментів різної структури. У роботі [2] одержана досить загальна оцінка швидкості збіжності до нормального закону. Її узагальненням на випадок різно розподілених випадкових величин присвячені роботи [3], [4], [5]. У розглядуваній роботі ми узагальнюємо результати [5], послаблючи вимоги на порядок псевдомоментів. При цьому, як наслідок, узагальнюються результати роботи [6]. У випадку різно розподілених випадкових величин у роботах [4] і [5] використовуються псевдомоменти різної структури, а в даній роботі – аналогічні до введених у [5].

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин з $M\xi_k = 0, D\xi_k = \sigma_k^2\,(0 < \sigma_k^2 < +\infty)$, функціями розподілу $F_k\,(x)$, характеристичними функціями $f_k\,(t)$, $\Phi\,(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\Phi_n\,(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{B_n}$, де $B_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$, $\bar{\sigma}_k = \min\,(1, \sigma_k)\,, \bar{B}_n^2 = \bar{\sigma}_1^2 + \cdots + \bar{\sigma}_n^2$, $\sigma = \min\limits_{1\le k\le n} \bar{\sigma}_k$, $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n\,(x) - \Phi\,(x)|$.

Теорема. *Нехай θ_k — величина, для якої при деякому $s \in [0, r]\,, 2 < r \le 3$, для всіх дійсних t виконується нерівність*

$$\omega_k\,(t) = \left| f_k\,(t) - e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} \right| \le \theta_k \min\left(|t|^s\,, |t|^r\right). \tag{1}$$

Тоді існує стала $A\,(s, r)$ така, що для всіх $n \ge 2$

$$\rho_n \le \frac{A\,(s,r)}{\bar{B}_n^{r-2}\sigma^{s+2+\delta}} \max\left(\bar{\theta}_n, \bar{\theta}_n^{\alpha}\right), \tag{2}$$

де $\bar{\theta}_n = \frac{1}{\bar{B}_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k$, $\sigma = \min\limits_{1\le k\le n} \bar{\sigma}_k$, $\delta = \begin{cases} 1, & 0 \le s < 1, \\ 0, & 1 \le s \le r, \end{cases}$ $\alpha = \min\left(1, \frac{n}{sn+1}\right)$.

При $n = 1$ і $s > 0$

$$\rho_1 \le \frac{1}{s} A_1\,(s, r)\, \frac{\max\left(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_1^{\frac{1}{s+1}}\right)}{\bar{\sigma}_1}.$$

Оскільки

$$\omega_k\,(t) \le \kappa_k\,(r)\, \frac{|t|^r}{2^{2r-5}}, \quad \kappa_k\,(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1}\,|H_k\,(x)|\,dx,$$

$$\omega_k\,(t) \le \kappa_{k0}\,(r) \min\left(|t|\,, \frac{|t|^r}{2^{2r-5}}\right), \quad \kappa_{k0}\,(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max\left(1,\, |x|^{r-1}\right)|H_k\,(x)|\,dx,$$

$$\omega_k(t) \le \nu_{k0}(r) \min\left(1, \frac{|t|^r}{6^{r-2}}\right), \quad \nu_{k0}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |dH_k(x)|,$$

то, покладаючи в умові теореми $\theta_k = \kappa_k(r), s = r$; $\theta_k = \kappa_{k0}(r), s = 1$ і $\theta_k = \nu_{k0}(r), s = 0$ і враховуючи, що $\rho_1 \le \nu_{10}(r)$, одержимо наступний наслідок.

Наслідок. *Для всіх* $n \ge 1$

$$\rho_n \le \frac{A(3,r)}{\bar{B}_n^{r-2}\sigma^{r+2}} \max\left(\frac{1}{\bar{B}_n^2}\sum_{k=1}^n \kappa_k(r), \left(\frac{1}{\bar{B}_n^2}\sum_{k=1}^n \kappa_k(r)\right)^{\frac{n}{rn+1}}\right),$$

$$\rho_n \le \frac{A(1,r)}{\bar{B}_n^{r-2}\sigma^3} \max\left(\frac{1}{\bar{B}_n^2}\sum_{k=1}^n \kappa_{k0}(r), \left(\frac{1}{\bar{B}_n^2}\sum_{k=1}^n \kappa_{k0}(r)\right)^{\frac{n}{n+1}}\right),$$

$$\rho_n \le \frac{A(0,r)}{\bar{B}_n^{r-2}\sigma^3}\frac{1}{\bar{B}_n^2}\sum_{k=1}^n \nu_{k0}(r).$$

Відзначимо, що із даного наслідку випливають результати [4], [2].

Доведення теореми.

Для доведення використаємо нерівність (наслідок із [7], стор. 299)

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^X \left|\prod_{k=1}^n f_k(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X}, \tag{3}$$

в якій покладемо $X = TB_n$, де $T = \left(\bar{\theta}_n\right)^{-p} c^{\frac{r+2}{2(r-2)}}$, $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ — деяка стала, вибір якої визначимо пізніше,

$$p = \begin{cases} \frac{1}{r-2}, & \bar{\theta}_n \ge 1; \\ \min\left(1, \frac{n}{sn+1}\right), & \bar{\theta}_n < 1. \end{cases}$$

Оскільки для довільного дійсного t ([5])

$$e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} - 1 \le \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c}\bar{\sigma}_k^2 \min\left(c, t^2\right), \tag{4}$$

тому

$$|f_k(t)| \le e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} + \omega_k(t) \le \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c}\bar{\sigma}_k^2 \min\left(c, t^2\right) + \omega_k(t)\right\}, \tag{5}$$

$$e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} = 1 + e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} - 1 \le \exp\left\{e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2}} - 1\right\} \le \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c}\bar{\sigma}_k^2 \min\left(c, t^2\right)\right\}, \tag{6}$$

а

$$\exp\left\{\frac{1 - e^{-\frac{c}{2}}}{c}\bar{\sigma}_k^2 \min\left(c, t^2\right)\right\} \le e^{\frac{c}{2}}. \tag{7}$$

Тут враховується, що функція $\frac{1-e^{-t}}{t}$ є спадною при $t > 0$ і $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$.

Покладемо $T_1 = \sqrt{c}$, $T_2 = \min(T_1, T)$. Якщо $T_2 = T_1$ (в цьому випадку $\bar{\theta}_n \le c^{\frac{2}{p(r-2)}}$), то при $|t| \le T_1 B_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k |t|^r}{B_n^r} = \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 \frac{|t|^r}{B_n^r} \le \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 (T_1)^{r-2} \le$$

$$\le \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 c^{\frac{2}{p(r-2)} + \frac{r-2}{2}} \le c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right), \tag{8}$$

а при $T_1 B_n \le |t| \le T B_n$ (оскільки $\bar{\theta}_n \le c^{\frac{2}{p(r-2)}} < 1$, то $p = \min\left(1, \frac{n}{sn+1}\right)$ і $p \le \frac{n}{sn+1}$ або $n(1 - sp) \ge p$ і $1 - sp > 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k |t|^s}{B_n^s} \le \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 \frac{|t|^s}{B_n^s} \le \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 T^s = \bar{B}_n^2 \left(\bar{\theta}_n\right)^{1-sp} c^{\frac{r+2}{2(r-2)} s} \le$$

$$\le \bar{B}_n^2 c^{\frac{2(1-sp)}{p(r-2)} + \frac{(r+2)s}{2(r-2)}} \le \bar{B}_n^2 c^{\frac{2}{p(r-2)} + \frac{s}{2}} \le \bar{B}_n^2 c^2 = c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right). \tag{9}$$

Нехай $T_2 = T \left(\bar{\theta}_n \ge c^{\frac{2}{p(r-2)}}\right)$. Тоді при $|t| \le T B_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k |t|^r}{B_n^r} \le \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2} T^{r-2} = \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 \left(\bar{\theta}_n\right)^{1-(r-2)p} c^{\frac{r+2}{2}}.$$

Оскільки при $\bar{\theta}_n \ge 1$ $p = \frac{1}{r-2}$, то $\left(\bar{\theta}_n\right)^{1-(r-2)p} = 1$, а при $\bar{\theta}_n < 1$ $p = \min\left(1, \frac{n}{sn+1}\right) \le 1$ і $1 - (r-2)p \ge 1 - (r-2) = 3 - r \ge 0$, то $\left(\bar{\theta}_n\right)^{1-(r-2)p} < 1$. Тому

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 c^2 \le c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right). \tag{10}$$

Із (8)–(10) випливає, що при $|t| \le T B_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right). \tag{11}$$

Нехай $\psi_{ni}(t) = \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_k^2}{2B_n^2}} \prod_{k=i+1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$, $i = 1, 2, ..., n$, при $n \ge 2$ і $\psi_{ni}(t) = 1$ при $n = 1$ $\left(\prod_{k=1}^{0} a_k = 1, \prod_{k=n+1}^{n} a_k = 1\right)$.

Із (5), (6)

$$|\psi_{ni}(t)| \le \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \left(\bar{\sigma}_1^2 + \cdots + \bar{\sigma}_{i-1}^2\right) \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \left(\bar{\sigma}_{i+1}^2 + \cdots + \bar{\sigma}_n^2\right) \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + \sum_{k=i+1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c} \left(\bar{B}_n^2 - \bar{\sigma}_i^2\right) \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + \sum_{k=i+1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\}. \tag{12}$$

Тоді із (11) і (7) при $n \geq 2$ і $|t| \leq TB_n$

$$|\psi_{ni}(t)| \leq e^{\frac{c}{2}} \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}}-1}{c}\,\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right)\right\} \leq$$

$$\leq e^{\frac{c}{2}} \exp\left\{-c_1\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right)\right\}, \tag{13}$$

де $c_1 = \frac{1-e^{-\frac{c}{2}}}{c} - c$ і сталу c виберемо так, щоб $c_1 > 0$.

Із відомої нерівності

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \prod_{j=1}^{k-1} |b_j| \prod_{j=k+1}^{n} |a_j|,$$

і (13) при $n \geq 2$ і $|t| \leq TB_n$

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left(\frac{t}{B_n}\right)|\psi_{ni}(t)| \leq e^{\frac{c}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i\,|t|^r}{B_n^r}\, e^{-c_1\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right)} =$$

$$= \frac{|t|^r}{B_n^r}\bar{B}_n^2\bar{\theta}_n e^{\frac{c}{2}} \exp\left\{-c_1\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right)\right\}. \tag{14}$$

Із (3) одержуємо

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{T_2B_n} \left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} + \int_{T_2B_n}^{TB_n} \left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t}\right) + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}TB_n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}(I_1 + I_2) + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\,\frac{\bar{\theta}_n^p}{c^{\frac{r+2}{2(r-2)}}B_n}. \tag{15}$$

Із (14) при $n \geq 2$

$$I_1 \leq e^{\frac{c}{2}}\bar{\theta}_n\bar{B}_n^2 \int_0^{T_2B_n} \frac{t^{r-1}}{B_n^r}\, e^{-c_1\bar{B}_n^2\frac{t^2}{B_n^2}}dt = \frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}}\, e^{\frac{c}{2}}\, \frac{1}{2c_1^{\frac{r}{2}}} \int_0^{c_1\bar{B}_n^2T_2^2} \tau^{\frac{r-2}{2}}e^{-\tau}d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}}\, e^{\frac{c}{2}}\,\frac{1}{2c_1^{\frac{r}{2}}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right). \tag{16}$$

Якщо $T_2 = T$, то $I_2 = 0$, і при виконанні умови $\frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}} \geq \frac{\bar{\theta}_n^{\frac{1}{r-2}}}{\bar{B}_n}$ одержуємо нерівність (2). Якщо ж ця умова не виконується, то (2) стає очевидною. Тому будемо вважати, що $T_2 = T_1$ (у цьому випадку $\bar{\theta}_n \leq c^{\frac{2}{p(r-2)}}$ і $p = \alpha$). Для оцінки I_2 використаємо нерівність ([4])

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n} |b_l| \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,l}}^{n} (|b_k| + |a_k - b_k|) + \prod_{k=1}^{n}|a_k - b_k|,$$

у якій покладемо $a_i = f_i\left(\frac{t}{B_n}\right)$, $b_i = e^{-\frac{t^2\sigma_i^2}{2B_n^2}}$. Тоді

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left(\frac{t}{B_n}\right) \sum_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_l^2}{2B_n^2}} \prod_{\substack{k=1\\ k\ne i,l}}^{n} \left(e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) + \prod_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right). \qquad (17)$$

Із (5), (6), (7) і (11) при $n > 2$ і $T_1 B_n < |t| \le T B_n$

$$\prod_{\substack{k=1\\ k\ne l,i}}^{n} \left(e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) \le \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c}\left(\bar{B}_n^2 - \bar{\sigma}_i^2 - \bar{\sigma}_l^2\right)\min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\} \le e^c \exp\left\{\frac{e^{-\frac{c}{2}} - 1}{c}\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right) + c\bar{B}_n^2 \min\left(c, \frac{t^2}{B_n^2}\right)\right\} \le e^c e^{-c_1 c \bar{B}_n^2},$$

і при $n = 2$ $\prod_{\substack{k=1\\ k\ne l,i}}^{n} \left(e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right) = 1$. Тому із (17) при $n \ge 2$ і $T_1 B_n < |t| \le T B_n$

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i |t|^s}{B_n^s} \sum_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{n} e^{-\frac{t^2\sigma_l^2}{2B_n^2}} e^c e^{-cc_1\bar{B}_n^2} + \prod_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \le$$

$$\le (n-1)\, e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2B_n^2}} e^c e^{-cc_1\bar{B}_n^2} \bar{\theta}_n \bar{B}_n^2 \frac{|t|^s}{B_n^s} + \prod_{k=1}^{n} \left(\theta_k \frac{|t|^s}{B_n^s}\right). \qquad (18)$$

Використовуючи нерівність (18) для I_2 при $n \ge 2$ одержуємо

$$I_2 = \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \frac{dt}{t} \le (n-1)\, e^c e^{-cc_i\bar{B}_n^2} \bar{\theta}_n \frac{\bar{B}_n^2}{B_n^s} \int_{T_1 B_n}^{T B_n} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2B_n^2}} t^{s-1} dt + \int_{T_1 B_n}^{T B_n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\theta_k t^s}{B_n^s}\right) \frac{dt}{t} =$$

$$= (n-1)\, e^c e^{-cc_i\bar{B}_n^2} \bar{\theta}_n \frac{\bar{B}_n^r}{\bar{B}_n^{r-2}} \frac{2^{\frac{s-2}{2}}}{\sigma^s} \int_{\frac{T_1^2\sigma^2}{2}}^{\frac{T^2\sigma^2}{2}} e^{-\tau} \tau^{\frac{s-2}{2}} d\tau + \left(\prod_{k=1}^{n} \theta_k\right) \int_{T_1}^{T} t^{sn-1} dt. \qquad (19)$$

Оскільки функція $y^{r+2} e^{-cc_1 y^2}$ обмежена при $y > 0$, а

$$\int_{\frac{T_1^2\sigma^2}{2}}^{\frac{T^2\sigma^2}{2}} e^{-\tau} \tau^{\frac{s-2}{2}} d\tau \le \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{T_1\sigma}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \le \sqrt{\frac{2\pi}{c}}\frac{1}{\sigma}, & \text{при} \quad s < 1, \\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \le \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, & \text{при} \quad s \ge 1, \end{cases}$$

то існує стала C_3, залежна лише від c, що перший доданок у лівій частині (19) не перевищує $C_3(c)\frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}}\frac{1}{\sigma^{s+2+\delta}}$, де $\delta=0$ при $s\geq 1$ і $\delta=1$ при $s<1$.

Згідно нерівності, що пов'язує середнє геометричне і середнє арифметичне, одержуємо

$$\prod_{k=1}^{n}\theta_k \leq \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}{n}\right)^n \leq \bar{\theta}_n^n\sigma^{2n},$$

а

$$\int\limits_{T_1}^{T} t^{sn-1}dt \leq \frac{1}{T_1^{\frac{1}{3}}}\int\limits_{T_1}^{T} t^{sn-\frac{2}{3}}dt \leq \frac{1}{T_1^{\frac{1}{3}}}\,\frac{1}{sn+\frac{1}{3}}\,T^{sn+\frac{1}{3}}.$$

Тоді при $s\leq\frac{1}{3}$ і $n\geq 2$ (у цьому випадку $p=1$)

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\theta_k\right)^n\int\limits_{T_1}^{T} t^{sn-1}dt \leq \bar{\theta}_n^{n-\left(sn+\frac{1}{3}\right)p}\,c^{\frac{r+2}{2(r-2)}\left(sn+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}}\cdot 3\sigma^{2n} \leq \bar{\theta}_n\,\bar{\theta}_n^{\frac{2}{3}n-\frac{4}{3}}\,c^{\frac{r+2}{2(r-2)}\left(sn+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}}\cdot 3 \leq$$

$$\leq \bar{\theta}_n c^{\frac{2}{r-2}\left(\frac{2n-4}{3}\right)+\frac{r+2}{4(r-2)}-\frac{1}{6}}\cdot 3 \leq C_4(c,r)\,\frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}},$$

а при $s>\frac{1}{3}$ (оскільки $\bar{\theta}_n<1$, а $n(1-sp)\geq p$)

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\theta_k\right)\int\limits_{T_1}^{T} t^{sn-1}dt \leq \bar{\theta}_n^n\frac{1}{sn}T^{sn} \leq \frac{\bar{\theta}_n^p}{\bar{B}_n}\,C_5(c,r).$$

Враховуючи ці результати, із (19) одержуємо

$$I_2 \leq C_6(c,r)\,\frac{\bar{\theta}_n}{\bar{B}_n^{r-2}\sigma^{s+2+\delta}} + C_7(c,r)\,\frac{\bar{\theta}_n^p}{\bar{B}_n}. \tag{20}$$

Із (15), (16) і (20) одержуємо (2).

Нехай $n=1$. Якщо $\bar{\theta}_1 > c^{\frac{2}{p(r-2)}}$, то

$$\rho_1 \leq c^{-\frac{2}{p(r-2)}}\,\bar{\theta}_1.$$

Нехай $s>0$ і $\bar{\theta}_1 \leq c^{\frac{2}{p(r-2)}}$, тоді

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{X}\left|f_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\,\frac{\theta_1}{\sigma_1^s}\int\limits_{0}^{X} t^{s-1}dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\,\frac{\bar{\theta}_1^p}{\sigma_1}\,c^{-\frac{r+2}{2(r-2)}} \leq \frac{2}{\pi}\,\frac{\theta_1}{\sigma_1^s}\,\frac{X^s}{s}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}\,\frac{\bar{\theta}_1^p}{\sigma_1}\,c^{-\frac{r+2}{2(r-2)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{s}\,C_8(c,r)\,\frac{\bar{\theta}_1^p}{\sigma_1^{r-2}}.$$

Тому при $s > 0$

$$\rho_1 \leq \frac{1}{s} C_9 \left(c, r\right) \frac{\max\left(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_1^p\right)}{\bar{\sigma}_1}.$$

Теорему доведено.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. *Zolotarev V. M.* Exactness of a approximation in the central limit theorem // Proceedings of in Second Japan–USSR Sympozium on Probability Theory. – Berlin: Springes-Verlag, 1973. – P. 531–543.
3. *Нагаев С. В., Ротарь В. И.* Об усилении оценок типа Ляпунова (случай близости слагаемых к нормальному)// Теория вероятностей и ее применен. – 1973. – Т. 18, Вып. 1. – С. 109–121.
4. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різно розподілених випадкових величин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4 – С. 12–16.
5. *Слюсарчук П. В., Поляк І. Й.* Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип.3. – С. 184–189.
6. *Игнат Ю. И., Слюсарчук П. В.* Об одной оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Материалы XXXV научной конференции проф.-препод. состава УжГУ. Секция матем. наук. № 4640–82 Деп.
7. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 26.09.2005