УДК 681.14

Ф. Е. Гече, С. А. Ковальов (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗОБРАЖЕННЯ МНОЖИН БУЛЬОВИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЯМИ ТОЛЕРАНТНОСТІ

In this paper we have investigated sufficient conditions of representing sets of the Boolean vectors with help of the tolerancy matrixes.

Вивчаються достатні умови зображення множин бульових векторів матрицями толерантності. На основі цього доводяться теореми, що є достатніми умовами належності бульових функцій до класу нейрофункцій.

Уже сьогодні для вирішення різних задач з області біології, медицини, теорії інформації і в цілому ряді інших технічних наук успішно використовуються елементи нейротехнологій. Широкого застосування набувають нейромережі і нейрофункції, за допомогою яких досліджується багато різних природних явищ. Особливе значення ці технології мають для мережі Інтернет.

Визначення належності бульових функцій до класу нейрофункцій на основі дослідження властивостей їх ядра є особливо актуальною задачею. Тому важливим є вивчення зображення ядер бульових нейрофункцій матрицями толерантності, що дає можливість синтезу нейроелементів[2].

Нехай $Z_2 = \{0, 1\}$ і Z_2^n — n-ва декартова степінь множини Z_2. Нехай $f : Z_2^n \to Z_2$— бульова функція і

$$f^{-1}(1) = \{x \in Z_2^n | f(x) = 1\}, \quad f^{-1}(0) = \{x \in Z_2^n | f(x) = 0\}.$$

Кажуть, що нейроелемент з вектором структури [w=$(w_1, \dots, w_n)$;w_0] , (w — n-вимірний дійсний вектор , що називається ваговим, w_0 — дійсне число – поріг) реалізує бульову функцію $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо для кожного $x \in Z_2^n$ виконується умова $x \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow x \cdot w^T < w_0$, де T і $\cdot$ відповідно символи транспонування матриць і матричного множення.

Бульова функція , яка реалізується хоча б на одному нейронному елементі, називається нейрофункцією.

Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ довільна підмножина множини Z_2^n і $A' = Z_2^n \backslash A$. Із елементів множини A побудуємо матрицю $M(A)$ наступним чином: першим рядком матриці $M(A)$ буде вектор $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$ із A, другим рядком матриці $M(A)$ буде вектор $a_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$ і т.д. Через S_q позначимо симетричну групу степеня q і $A_\xi = (a_{\xi(1)}, \dots, a_{\xi(q)})$, де $\xi(i)$ — дія підстановки $\xi \in S_q$ на i.

Нехай Ω_n — множина всіх n-вимірних дійсних векторів $w = (w_1, \dots, w_n)$ таких, що для різних $x_1, x_2 \in Z_2^n$, числа $(x_1, w), (x_2, w)$ різні.

Нехай $c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$ розташовані в порядку спадання зважені суми (x, w) при фіксованому $w \in \Omega_n$ для всіх $x \in Z_2^n$ і $c_w = (c_1, c_2, \dots, c_{2^n})$.

В [1] показано, якщо $w \in \Omega_n$ і R_w — матриця над Z_2 розмірності $2^n \times n$, яка задовольняє умову $R_w \cdot w^T = c_w^T$, то R_w має наступне зображення $R_w = \begin{pmatrix} L_w \\ L_w^* \end{pmatrix}$, де $L_w = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}\ ;\ j = 1, 2, \dots, n)$ — матриця толерантності і $L_w^* = (a_{sj})$, де $s = 2^{n-1} - i + 1, \quad a_{sj} = \bar{a}_{ij}$ (риска над a_{ij} означає операцію інвертування).

Нехай $E_n = \{L_w \mid w \in \Omega_n\}$. Матрицю N побудовану із перших r рядків матриці толерантності $L \in E_n$ називають передматрицею толерантності і пишуть $N \lhd L$ або $N = L(r)$.

Кажуть , що множина $A \subseteq Z_2^n$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n, якщо існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ і матриця толерантності $L \in E_n$, що має місце одна із умов:

1) $M(A_\xi) \lhd L$, якщо $q \leq 2^{n-1}$;

2) $M(A'_\xi) \lhd L$, якщо $q > 2^{n-1}$.

В [1] показано, що бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ є нейрофункцією, тоді і тільки тоді, коли її ядро $K(f)$ допускає зображення матрицями толерантності із E_n.

Отже, задача по перевірці реалізованості бульової функції на одному нейроелементі зводиться до перевірки зображення ядра даної бульової функції матрицями толерантності[3].

Нехай $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{j+s}, \alpha_{j+s+1}, \ldots, \alpha_n)$ довільний вектор множини Z_2^n, $s \in \{0, 1, \ldots, n-j\}$ і $j \geq 1$. На множині координат $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ вектора $a \in Z_2^n$ для фіксованих s та j визначимо функцію ε_j^k наступним чином

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, s\} \qquad \varepsilon_j^k(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i, & i \leq j-1; \\ \alpha_i(j - r_k), & i = j+k; \\ \alpha_i j, & i > j+s, \end{cases} \tag{1}$$

де $r_0, r_1, \ldots, r_s \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$. Через функції $\varepsilon_j^k \quad (k = 0, \ldots, s)$ при фіксованих $s \in \{0, \ldots, n-j\}$ та j задаємо відображення $\varepsilon_s^j : Z_2^n \to Z_j^n \quad (2 \leq j \leq n)$ наступним чином

$$\varepsilon_j^s(a) = (\varepsilon_j^s(\alpha_1), \ldots, \varepsilon_j^s(\alpha_{j-1}),\ \varepsilon_j^0(\alpha_j),\ \varepsilon_j^1(\alpha_{j+1}), \ldots,$$
$$\varepsilon_j^{s-1}(\alpha_{j+s-1}),\ \varepsilon_j^s(\alpha_{j+s}),\ \varepsilon_j^s(\alpha_{j+s+1}), \ldots, \varepsilon_j^s(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал υ_j^s на множині Z_2^n за формулою

$$\forall a \in Z_2^n \qquad \upsilon_j^s(a) = \sum_{i \in I_s(j)} \varepsilon_j^s(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^i(\alpha_{j+i}), \tag{2}$$

де $I_s(j) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1, \ldots, j+s\}$.

За допомогою функціонала υ_j^s для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$ формуємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(r_k,s)}$ так

$$F_{j+k}^{(r_k,s)} = \left\{ a \in m(L_{j+k}^* 0 \ldots 0) \mid \upsilon_j^s(a) \leq j-1 \right\},$$

де $m(L_{j+k}^* 0 \ldots 0)$ — множина бульових векторів, що побудована з рядків матриці $(L_{j+k}^* 0 \ldots 0)$, а $r_0, \ldots, r_s \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$.

Нехай $a \in Z_2^n$, $\sigma \in S_n$ і $a^\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})$, $A^\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$, де $\sigma(i)$ — дія підстановки σ на i, a_i — i-вий стовпець матриці A.

Теорема 1. *Якщо в множині $A \subset Z_2^n \quad (|A| \leq 2^{n-1})$, групі S_n відповідно існують такі елементи a, σ і такі цілі числа $r_0 \geq r_1 \geq \ldots r_s \geq 0 \quad (r_0 \leq j-1)$, що*

$$a^\sigma A^\sigma = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}) \cup (\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)}), \tag{3}$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. Визначимо n—вимірний вектор $w = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ наступним чином $\omega_1 = \ldots = \omega_{j-1} = -1, \omega_j = r_0 - j, \omega_{j+1} = r_1 - j, \ldots, \omega_{j+s} = r_s - j, \omega_{j+s+1} = \ldots = \omega_n = -j$. За побудовою вектора w маємо

$$\min\{(x,w) \mid x \in m(L_j 0 \ldots 0)\} = 1 - j, \qquad \forall k \in \{0,1,\ldots,s\},$$
$$\min\left\{(x,w) \mid x \in F_{j+k}^{(r_k,k)}\right\} = 1 - j > \max\left\{(x,w) \mid x \in m(L_{j+k}^* 0 \ldots 0) \backslash F_{j+k}^{(r_k,k)}\right\} = -j,$$
$$\forall t \in \{s+1,\ldots,n\} \qquad \max\{(x,w) \mid x \in m(L_t 0 \ldots 0)\} = -j.$$

Тоді з (3) безпосередньо випливає

$$\forall x \in a^\sigma A^\sigma, \quad \forall y \in Z_2^n \backslash a^\sigma A^\sigma \quad (x,w) > (y,w). \tag{4}$$

Отже, як показано в [4], існує такий вектор $v \in \Omega_n$, який також задовольняє умову (4). Це означає, що існує такий елемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$, що $a^\sigma (A_{\xi(i)})^\sigma = L_v(q)$. Тоді з елементів множини А можна побудувати передматрицю толерантності $L_1(q)(L_1 = = aL_v^{\sigma^{-1}})$ і теорема доведена.

З теореми 1 безпосередньо випливає:

Теорема 2. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ з ядром $K(f)$ є нейрофункцією, якщо в $K(f)$ і групі S_n відповідно існують такі елементи g, σ і такі цілі числа*

$$r_0 \geq r_1 \geq \ldots r_s \geq 0 \quad (r_0 \leq j - 1),$$

що

$$g^\sigma K(f)^\sigma = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}) \cup (\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)}).$$

Розглянемо узагальнення функцій ε_j^k і функціоналу v_j^s. Нехай $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{j+s}, \ldots, \alpha_n) \in Z_2^n$, $s \in \{0,1,\ldots,n-j\}$ $(j \geq 2)$. Для фіксованих $j \in \{2,3,\ldots,n\}$ і $t \in \{1,2,j-1\}$ будуємо множину векторів $u_j(t)$:

$$u_j(t) = \{(u_1,\ldots,u_n) \mid u_1 + \ldots + u_t = j-1, \quad u_1,\ldots,u_t \in \{1,2,\ldots,j-t\}\}$$

і визначимо $U_j = \bigcup\limits_{t=1}^{j-1} u_j(t)$. Нехай $u = (u_1, \ldots, u_{l_u}) \in U_j$ (l_u - розмірність вектора u) і $\forall k \in \{0,1,\ldots,s\}$:

$$\varepsilon_j^{(u,k)}(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i, \quad i \leq u_1; \\ \alpha_i 2^{r-1}, \quad \sum\limits_{p=1}^{r-1} u_p < i < \sum\limits_{p=1}^{r} u_p; \\ \alpha_i (\sum\limits_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} - r_k + 1), \quad i = j+k; \\ \alpha_i (\sum\limits_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} + 1), \quad j > j+s. \end{cases}$$

Для фіксованих $j \in \{2,3,\ldots,n\}$, $s \in \{0,1,\ldots,n-j\}$ і $u = (u_1,\ldots,u_n) \in U_j$ задаємо відображення $\varepsilon_j^{(u,s)} : Z_2^n \to Z_k^n \quad (k = \sum\limits_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1})$ так:

$$\varepsilon_j^{(u,s)}(a) = (\varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_1), \ldots, \varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_{j-1}),\ \varepsilon_j^{(u,0)}(\alpha_j),\ \varepsilon_j^{(u,1)}(\alpha_{j+1}), \ldots,$$
$$\varepsilon_j^{(u,s-1)}(\alpha_{j+s-1}),\ \varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_{j+s}),\ \varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_{j+s+1}), \ldots, \varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_n))$$

і визначимо функціонал $v_j^{(u,s)}$ на множині Z_2^n за допомогою наступної формули

$$\forall a \in Z_2^n \quad \upsilon_j^{(u,s)}(a) = \sum_{i \in I_s(j)} \varepsilon_j^{(u,s)}(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_j^{(u,i)}(\alpha_{j+i}) \ ,$$

де $I_s(j) = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j, j+1, \dots, j+s\}$.
Через функціонал $\upsilon_j^{(u,s)}$ задаємо множину бульових векторів $F_{j+k}^{(u,r_k,s)}$:

$$F_{j+k}^{(u,r_k,s)} = \left\{ a \in m(L_{j+k}^* 0 \dots 0) \mid \upsilon_j^{(u,s)}(a) \le \sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} \right\},$$

де $r_0, r_1, \dots, r_s \in \left\{ 0, 1, \dots, \sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} \right\}$, $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Теорема 3. *Якщо в множині $A \subset Z_2^n \quad (|A| \le 2^{n-1})$, групі S_n , множині векторів U_j відповідно існують такі елементи a, σ, u і такі цілі числа*

$$r_0 \ge r_1 \ge \dots \ge r_s \ge 0 \quad (r_0 \le \sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1}),$$

що

$$a^\sigma A^\sigma = m(L_j \underbrace{0 \dots 0}) \cup (\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+s}^{(u,r_i,s)}), \tag{5}$$

тоді множина A допускає зображення матрицями толерантності з E_n.

Доведення. Дано, що відносно елементів $a \in A$, $\sigma \in S_n$ і $u = (u_1, \dots, u_{l_u})$ справджується рівність (5). Покажемо, що можна побудувати вектор $w = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, який задовольняє умову

$$\forall x \in a^\sigma A^\sigma, \qquad \forall y \notin Z_2^n \backslash a^\sigma A^\sigma \quad (x, w) > (y, w). \tag{6}$$

Визначимо координати ω_i вектора w наступним чином:
$\omega_1 = \dots = \omega_{u_1} = -1$, $\omega_{u_1+1} = \dots = \omega_{u_1+u_2} = -2$, $\omega_{u_1+u_2+1} = \dots = \omega_{u_1+u_2+u_3} = -2^2, \dots$, $\omega_{u_1+u_2+\dots+u_{l_u-1}+1} = \omega_{u_1+u_2+\dots+u_{l_u}} = -2^{l_u-1}$, $\omega_j = r_0 - (\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} + 1)$, $\omega_{j+1} = r_1 - -(\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} + 1)$, $\dots$, $\omega_{j+s} = r_s - (\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} + 1)$, $\omega_{j+s+1} = \dots = \omega_n = -\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} - 1$.
З побудови вектора w випливає

$$min\,\{(x, w) \mid x \in m(L_j 0 \dots 0)\} = \sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1},$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, s\} \quad min \left\{ (x, w) \mid x \in F_{j+k}^{(u,r_k,k)} \right\} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} > -\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} - 1 = max \left\{ (x, w) \mid x \in m(L_{j+k}^* 0 \dots 0) \backslash F_{j+k}^{(u,r_k,k)} \right\},$$

$$\forall t \in \{s+1, \dots, n\} \quad max\,\{(x, w) \mid x \in m(L_t^* 0 \dots 0)\} = -\sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1} - 1.$$

Тоді з (5) безпосередньо випливає (6) і аналогічно тому, як в теоремі 1, можна показати існування такої матриці толерантності $L \in E_n$, перші q рядки $(q = |A|)$ якої можуть бути побудовані з елементів множини A, тобто існує такий елемент $\xi \in S_q$, що $A_\xi = L(q)$. Отже, множина A допускає зображення матрицею толерантності $L \in E_n$ і теорема доведена.

З теореми 3 безпосередньо маємо:

Теорема 4. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ з ядром $K(f)$ є нейрофункцією, якщо в $K(f)$, групі S_n, множині векторів U_j відповідно існують такі елементи g, σ, u і такі цілі числа $r_0 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_s \geq 0 \quad (r_0 \leq \sum_{p=1}^{l_u} u_p 2^{p-1})$, що*

$$g^\sigma K(f)^\sigma = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}) \cup (\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+s}^{(u,r_i,s)}).$$

Для дослідження потужності і ефективності доведених у роботі теорем була створена програма на мові Object Pascal, яка виконує послідовну перевірку умов теореми 2 для всіх, або вибраних бульових функцій для обраної розмірності.

За допомогою розробленої програми нам вдалося вдосконалити теорему 2 і ми одержали більш потужну умову перевірки реалізованості бульових функцій одним нейронним елементом, що наводиться у наступній теоремі.

Теорема 5. *Бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ з ядром $K(f)$ є нейрофункцією, якщо в $K(f)$ і групі S_n відповідно існують такі елементи g, σ і такі цілі числа*

$$r_0 \geq r_1 \geq \ldots r_s \geq 0 \quad (r_0 \leq j-1) \ \textit{або} \ q_0 \geq q_1 \geq \ldots q_t > 0 \quad (q_0 \leq j),$$

що

$$g^\sigma K(f)^\sigma = m(L_j \underbrace{0 \ldots 0}) \cup (\bigcup_{i=0}^{s} F_{j+i}^{(r_i,s)})$$

або

$$g^\sigma K(f)^\sigma = L_j \cup L_j^*(q_0) \cup L_{j+1}^*(q_1) \cup \ldots \cup L_{j+t}^*(q_t).$$

Теорема 5 є необхідною і достатньою умовою реалізованості бульової функції одним нейроелементом, для $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Отримані результати можуть бути успішно використані при синтезі інтелектуальних систем у нейробазисі.

1. *Айзенберг Н. Н., Бовди А. А., Герго Э. Й., Гече Ф. Э.* Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики // Кибернетика. – 1980. – №2. – С. 26–30.
2. Параллельная обработка информации: в 5–ти томах / Под ред. Б. Н. Малиновского. Том 5. – К.: Наукова думка, 1990. – С. 319–364.
3. *Гече Ф. Э., Поливко В. П., Роботишин В. А.* Реализация функций алгебры и логики на ПЭ // Кибернетика. – 1983. – №6. – С. 42–53.
4. *Лейхтвейс К. М.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 335 с.

Одержано 24.10.2005