УДК 517.518+519.652

М. М. Пагіря (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАДАЧА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

The problem of the interpolation functions of the one real variable of the continued fractions of same types is studied. The formulas of the calculated coefficients of this continued fractions are proposed. The remainders of the interpolation continued fractions are obtained.

Вивчається задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної ланцюговими дробами деяких типів. Запропоновані формули для визначення коефіцієнтів цих дробів. Отримані оцінки для залишкових членів інтерполяційних ланцюгових дробів.

Дана робота є продовженням досліджень [1–6] і присвячена деяким підходам до побудови інтерполяційних ланцюгових дробів для функції однієї дійсної змінної.

1. Постановка задачі. Нехай на $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ визначена неперервна функція $f(x)$. Вибрано множину точок $X = \{x_i : x_i \in [\alpha, \beta],\ x_i \neq x_j, \text{коли}\, i \neq j,\ i, j = 0, \ldots, n\}$. Наближення функції $f(x) \approx g(x; b_0, \ldots, b_n)$, де $b_0, \ldots, b_n$ деякі параметри, вибирається таким чином, щоб у точках множини X виконувались співвідношення

$$y_k = g(x_k; b_0, \ldots, b_n), \quad \text{де} \quad y_k = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Коли $g(x; b_0, \ldots, b_n) = b_0\, \varphi_0(x) + \cdots + b_n\, \varphi_n(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ — система функцій Чебишова, то маємо лінійну інтерполяцію узагальненим багаточленом ([7]). В даній роботі вивчається задача нелінійної інтерполяції ланцюговими дробами.

2. Функціональний ланцюговий дріб. Розглянемо скінчений функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) ([8])

$$D_n(x) = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} = b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \; + \; \cdots \; + \; \frac{a_n(x)}{b_n(x)}\,, \tag{2}$$

де $a(x) \not\equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, а $b(x) \neq 0$ для всіх $x \in [\alpha, \beta]$. ФЛД (2) можна поставити у відповідність відношення двох узагальнених многочленів, тобто

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \tag{3}$$

Чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_n(x)$ ФЛД (3) можна знайти або за допомогою прямого рекурентного алгоритму, формул Уолліса :

$$\begin{cases} P_k(x) = b_k(x)P_{k-1}(x) + a_k(x)P_{k-2}(x), \\ Q_k(x) = b_k(x)Q_{k-1}(x) + a_k(x)Q_{k-2}(x), \end{cases} \tag{4}$$

при початкових значеннях $P_0(x) = b_0(x), Q_0(x) = P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0$; або за допомогою оберненого рекурентного алгоритму:

$$\frac{P_k^{(n)}(x)}{Q_k^{(n)}(x)} = b_k(x) + \frac{a_{k+1}(x)}{P_{k+1}^{(n)}(x)/Q_{k+1}^{(n)}(x)}, \qquad k = n-1, \ldots, 1, 0, \tag{5}$$

де $P_n^{(n)}(x) = b_n(x), Q_n^{(n)}(x) = 1$. Тоді $P_n(x) = P_0^{(n)}(x), Q_n(x) = Q_0^{(n)}(x)$. Із (5) випливає, що проміжні чисельник $P_k^{(n)}(x)$ та знаменник $Q_k^{(n)}(x)$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$P_k^{(n)}(x) = b_k(x) P_{k+1}^{(n)}(x) + a_{k+1}(x) Q_{k+1}^{(n)}(x),\ Q_k^{(n)}(x) = P_{k+1}^{(n)}(x). \tag{6}$$

Скориставшись методом повної математичної індукції, із (6) можна отримати ([1]) формулу Ойлера–Міндінга для знаменника $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = B_1^{(n)}(x) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \sum_{i_1=1}^{n-3} X_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} X_{i_2} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} X_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m} X_{i_2} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1} X_{i_m} \right), \tag{7}$$

де $m = \left[\frac{n}{2}\right], X_i = \dfrac{a_{i+1}(x)}{b_i(x)\, b_{i+1}(x)},\ B_1^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^{n} b_i(x)$.

Зауважимо, що в книзі О. Перрона [9] наводиться інше доведення цієї формули, яке ґрунтується на формулах Уолліса (4).

Позначимо через

$$R_{k,s}^{(n)}(x) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k},$$

де $k = 1, \ldots, m$. Легко бачити, що $R_{k,s}^{(n)}(x)$ задовольняє співвідношення

$$R_{k,s}^{(n)}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x) \cdot R_{k-1,i+2}^{(n)}(x), \qquad \text{при} \quad R_{0,s}^{(n)}(x) = 1. \tag{8}$$

Знаменник $Q_n(x)$ запишеться у вигляді

$$Q_n(x) = B_1^{(n)}(x) \sum_{i=0}^{m} R_{i,1}^{(n)}(x). \tag{9}$$

Лема 1. *Нехай частинні чисельники $a_i(x)$ та знаменники $b_i(x)$ функціонального ланцюгового дробу (3) задовольняють нерівності*

$$0 < |a_i(x)| \leqslant \delta, \qquad 0 < \gamma \leqslant |b_i(x)|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

при всіх значеннях $x \in Y \subset [\alpha, \beta]$. Тоді при $k = 1, 2, \ldots, m,\ \rho = \delta/\gamma^2$

$$\left| R_{k,s}^{(n)}(x) \right| \leqslant \rho^k \cdot C_{n+1-s-k}^k \,. \tag{11}$$

Доведення. З умов леми випливає, що при $k = 1$ нерівність (11) виконується. Зробивши припущення, що нерівність виконується при $k = l - 1$, з (8) та умов леми маємо, що (11) виконується і при $k = l$.

Теорема 1. *Якщо частині чисельники $a_i(x)$ та знаменники $b_i(x)$ ФЛД (3) задовольняють умови (10) для всіх $x \in Y$ та $i = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$|Q_n(x)| < \left|B_1^{(n)}\right| \cdot \kappa_{n+1}(\rho), \quad \text{де } \kappa_n(\rho) = \frac{(1+\sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4\rho}}.$$

Доведення. Із співвідношення (9) та леми 1 випливає, що

$$|Q_n(x)| \leqslant \left|B_1^{(n)}(x)\right| \cdot \sum_{i=0}^{[n/2]} \left|R_{i,1}^{(n)}(x)\right| \leqslant \left|B_1^{(n)}(x)\right| \cdot \sum_{i=0}^{[n/2]} \rho^i \, C_{n-i}^i. \tag{12}$$

Скориставшись відомою тотожністю із комбінаторики [10] отримаємо твердження для $Q_n(x)$.

Теорема 2. *Якщо частинні чисельники $a_i(x)$ та знаменники $b_i(x)$ ФЛД (3) задовольняють нерівності $0 < |a_i(x)| \leqslant \delta$, $|b_i(x)| \geqslant \delta + 1$ для всіх значень $i = 1, 2, \ldots, n$ та при довільному $x \in Y$, то знаменник $Q_n(x)$ ФЛД (3) задовольняє нерівність*

$$|Q_n(x)| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\delta^{n+1} - 1}{\delta - 1} & \text{при} \quad \delta \neq 1, \\ \quad n + 1 & \text{при} \quad \delta = 1. \end{cases}$$

Доведення. З умови теореми випливає, що $|Q_1(x)| = |b_1(x)| \geqslant \delta + 1$. Далі $|Q_2(x)| = |b_2(x)b_1(x) + a_2(x)| \geqslant |Q_1(x)||b_2(x)| - |a_2(x)| \geqslant |Q_1(x)|(1+\delta) - \delta = |Q_1(x)| + \delta(|Q_1(x)| - 1) \geqslant |Q_1(x)| + \delta^2$. А тоді $|Q_2(x)| - |Q_1(x)| \geqslant \delta^2$. З формул Уолліса (4) та умов теореми випливає, що $|Q_s(x)| \geqslant |Q_{s-1}(x)| + \delta(|Q_{s-1}(x)| - |Q_{s-2}(x)|)$. Використавши метод повної математичної індукції, отримуємо нерівність $|Q_s(x)| - |Q_{s-1}(x)| \geqslant \delta^s$. Тоді

$$|Q_n(x)| = \sum_{i=2}^{n}(|Q_i(x)| - |Q_{i-1}(x)|) + |Q_1(x)| \geqslant \sum_{i=0}^{n} \delta^i = \begin{cases} \dfrac{\delta^{n+1} - 1}{\delta - 1}, & \delta \neq 1, \\ n + 1, & \delta = 1. \end{cases}$$

3. Інтерполяційні ланцюгові дроби. З класу скінчених ФЛД (3) виділимо підклас інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), тобто ланцюгових дробів, що задовольняють (1), яке в цьому випадку запишеться

$$D_n(x_i) = b_0(x_i) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Частині чисельники $a_k(x)$ та знаменники $b_k(x)$ в ІЛД (3) можна вибирати по різному. А тоді, побудовані ІЛД будуть, взагалі кажучи, різними. В роботах [3, 6, 5] розглянуто випадки, коли $a_k(x)$ та $b_k(x)$ вибрано у вигляді двочленів.

Різницю $R_n(x) = f(x) - D_n(x) = f(x) - P_n(x)/Q_n(x)$ називають залишковим членом ІЛД (3). В роботі [6] встановлена оцінка залишкового члена $R_n(x)$ для випадку, коли функція $f(x)$ має на проміжку $[\alpha, \beta]$ скінчену кількість полюсів, а $P_n(x)$ та $Q_n(x)$ — многочлени деяких степенів.

Далі розглянемо певні типи ІЛД. Вкажемо способи знаходження їх коефіцієнтів та отримаємо оцінки для залишкового члена $R_n(x)$ в термінах коефіцієнтів цих дробів.

4. Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле. Історично першим ІЛД був ФЛД запропонований у 1909 році Т.Н. Тіле ([11, 12]). Згідно з [13], розглянемо наступну послідовність $\{v_k(x)\}$, де

$$f(x) = v_0(x), \quad v_k(x) = v_k(x_k) + \frac{x - x_k}{v_{k+1}(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Якщо вкладати елементи послідовності один в другий $n+1$–раз, далі підставити $1/v_{n+1}(x) = 0$ та позначити $b_k = v_k(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то отримаємо ІЛД Тіле

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}. \tag{14}$$

Твердження 1 ([8, 11])**.** *ІЛД Тіле* (14) *є дробово-раціональна функція. Степені многочленів чисельника $P_n(x)$ та знаменника $Q_n(x)$ задовольняють нерівності* $\mathbf{deg}\, P_n(x) \leqslant [\frac{n+1}{2}]$, $\mathbf{deg}\, Q_n(x) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

Коефіцієнти b_k ІЛД (14) визначаються з умови (13) або за допомогою послідовності обернених поділених різниць ([11, 13])

$$\Phi_k[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-1}]}, \tag{15}$$

при $\Phi_0[x] = f(x)$, а тоді $b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, або за допомогою рекурентного співвідношення ([1, 2])

$$b_0 = y_0,\ b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} + \cdots + \frac{x_k - x_1}{-b_1} + \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0},\ k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

ІЛД Тіле є ФЛД з частинними чисельником $a_k(x) = x - x_{k-1}$ та знаменником $b_k(x) = b_k$. Знаменник $Q_n(x)$ ІЛД (14) можна подати за формулою Ойлера–Міндінга (7), де $X_k = (x - x_k)/(b_k \cdot b_{k+1})$.

Теорема 3 ([2, 4])**.** 1) *Нехай для функції $y = f(x)$, яка неперервна на $[\alpha, \beta]$, існує ІЛД Тіле* (14)*, коефіцієнти якого задовольняють умову Слєшинського–Прінгсгейма:* $|b_k| \geqslant d \geqslant \delta + 1$, $k = 1, \ldots, n$.
2) *Знайдеться точка x_*, така, що $x_* \in (\alpha, \beta)$, $x_* \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$, для якої* $|b_{n+1}(x_*)| \geqslant d \geqslant \delta + 1$, *де* $b_{n+1}(x_*) = \frac{x_* - x_n}{-b_n} + \cdots + \frac{x_* - x_1}{-b_1} + \frac{x_* - x_0}{y_* - b_0}$, $y_* = f(x_*)$.
Тоді в точці x_* виконується нерівність

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n} |x_* - x_i| / |b_{n+1}(x_*)|}{|B_1^{(n)}|^2\, \kappa_{n+2}(\rho)\, \kappa_{n+1}(\rho)} \leqslant |f(x_*) - D_n(x_*)| \leqslant \frac{(\delta - 1)^2 \cdot \prod\limits_{i=0}^{n} |x_* - x_i|}{(\delta^{n+2} - 1) \cdot (\delta^{n+1} - 1)},$$

де $\rho = \delta/d^2$, $\delta = \beta - \alpha$.

Розглянемо нескінчену трикутну матрицю інтерполяційних вузлів

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & & & & & \\ x_0^1 & x_1^1 & & & & \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad x_i^n \in (\alpha, \beta), \qquad x_i^n \neq x_j^n. \tag{17}$$

Теорема 4 ([2, 4])**.** 1) *Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[\alpha,\beta]$ і задана значеннями у вузлах матриці* (17)*: $y_i^n = f(x_i^n)$, $i = 0,1,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots$*
2) *Нехай при кожному фіксованому значенні n коефіцієнти ІЛД* (14) *задовольняє умову Слешинського–Прінгсгейма: $|b_k| \geqslant d \geqslant \delta+1$, $k = 1,\ldots,n$. Якщо знайдеться точка $x_*\in(\alpha,\beta)$, $x_* \neq x_i^n$, $i = 0,1,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots$, що при кожному n має місце нерівність $|b_{n+1}(x_*)| \geqslant d \geqslant \delta+1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_*) - D_n(x_*)| = 0.$$

5. Правильний інтерполяційний ланцюговий C–дріб. Визначимо послідовність $\{v_k(x)\}$ наступним чином :

$$f(x) = v_0(x),\ v_0(x) = v_0(x_0) + v_1(x)(x-x_0),\ v_k(x) = \frac{v_k(x_k)}{1+v_{k+1}(x)(x-x_k)},\ k = 1,2,\ldots$$

Вкладемо елементи послідовності однин в другий $n+1$–раз, підставимо $v_{n+1}(x) = 0$ та позначимо $b_k^{(1)} = v_k(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$. Тоді отримаємо правильний інтерполяційний ланцюговий C–дріб

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{P_n^{(1)}(x)}{Q_n^{(1)}(x)} = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(1)}\,(x-x_{k-1})}{1}. \tag{18}$$

Визначимо коефіцієнти $b_k^{(1)}$, $k = 0,\ldots,n$, з умови (13). При $k = 0,1$ з (13) випливає, що $b_0^{(1)} = y_0$, $b_1^{(1)} = (y_1-y_0)/(x_1-x_0)$. Легко показати, що при $k = 2,3,\ldots,n$ мають місце формули

$$b_k^{(1)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left(-1 + \frac{b_{k-1}^{(1)}\,(x_k-x_{k-2})}{-1} + \frac{b_{k-2}^{(1)}\,(x_k-x_{k-3})}{-1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{b_2^{(1)}\,(x_k-x_1)}{-1} + \frac{b_1^{(1)}\,(x_k-x_0)}{y_k - b_0^{(1)}}\right). \tag{19}$$

ІЛД (18) еквівалентний ІЛД (14), бо між коефіцієнтами b_i та $b_i^{(1)}$ цих дробів існує взаємозв'язок $b_0^{(1)} = b_0$, $b_1^{(1)} = 1/b_1$, $b_i^{(1)} = 1/(b_i\cdot b_{i-1})$, $i = 2,\ldots,n$. Однак зауважимо, що формула (19) дозволяє знаходити коефіцієнти ІЛД (18) безпосередньо через значення функції в інтерполяційних вузлах.

Лема 2. *Якщо всі коефіцієнти ІЛД* (18) *відмінні від нуля, то для довільного $x\in(\alpha,\beta)$, $x \neq x_i, i = 0,1,\ldots,n$, та $n>1$ має місце наступна оцінка*

$$\Omega_n(\delta) < \left|Q_n^{(1)}(x)\right| < \kappa_{n+1}(\delta)\,, \tag{20}$$

де

$$\Omega_n(\delta) = \sum_{i=1}^{[n/2]-1} \delta^{i+1} \sum_{j=0}^{[n/2]-i-1} C_{i+2j-\theta_n}^{i-1} + \theta_{n+1}\delta + (-1)^n\gamma,$$

$$\delta = \max_{2\leqslant i\leqslant n} |b_i^{(1)}|(\beta-\alpha),\ \gamma = |\min_{x\in(\alpha,\beta)} |b_2^{(1)}\,(x-x_1)| - 1|,\ \theta_n = \frac{(-1)^n+1}{2}.$$

Зауваження 1. *Оцінка для модуля знаменника $Q_n^{(1)}(x)$ згори в* (20) *безпосередньо випливає з теореми* 1, *оскільки для інтерполяційного С–дробу $B_1^{(n)} = 1$. Крім того, згідно з* (12)

$$|Q_n^{(1)}(x)| < \sum_{i=0}^{[n/2]} \delta^i\, C_{n-i}^i.$$

Доведення. З умов теореми випливає, що $|b_i^{(1)}(x - x_{i-1})| \leqslant \delta$. Очевидно, що $Q_0^{(1)}(x) = Q_1^{(1)}(x) = 1$. Згідно із формулами Уолліса (4)

$$Q_i^{(1)}(x) = Q_{i-1}^{(1)}(x) + b_i^{(1)}\,(x - x_{i-1})\,Q_{i-2}^{(1)}(x), \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Тоді $\gamma \leqslant \big||b_2^{(1)}\,(x - x_1)| - 1\big| \leqslant |Q_2^{(1)}(x)| \leqslant |b_2^{(1)}\,(x - x_1)| + 1 \leqslant \delta + 1$. Аналогічно отримуємо $\delta - \gamma \leqslant |Q_3^{(1)}(x)| \leqslant 2\,\delta + 1$. За допомогою методу повної математичної індукції доведемо співвідношення (20). Воно має місце, коли $n = 2, 3$. Зробимо припущення, що (20) виконується для всіх $n = 4, 5, \ldots, 2s, 2s+1$. Тоді при $n = 2s+2$ маємо

$$|Q_{2s+2}^{(1)}| \geqslant \big||Q_{2s+1}^{(1)}| - |b_{2s+2}^{(1)}\,(x - x_{2s+1})|\,|Q_{2s}^{(1)}|\big| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_{i=1}^{s-1} \delta^{i+1} \sum_{j=0}^{s-i-1} C_{i+2j}^{i-1} + \delta - \gamma - \delta \sum_{i=0}^{s} \delta^i C_{2s-i}^i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{s-1} \delta^{i+1} \left(C_{2s-i}^i - \sum_{j=0}^{s-i-1} C_{i+2j}^{i-1}\right) + \delta + \delta^{s+1} C_s^s - \delta + \gamma\right|.$$

Згідно із відомою тотожністю із комбінаторики [10]

$$C_{2s-i}^i - \sum_{j=0}^{s-i-1} C_{i+2j}^{i-1} = \sum_{j=0}^{2(s-i)} C_{i+j-1}^{i-1} - \sum_{j=0}^{s-i-1} C_{i+2j}^{i-1} = \sum_{j=0}^{s-i} C_{i+2j-1}^{i-1}.$$

Тоді кінцеве маємо

$$|Q_{2s+2}^{(1)}(x)| \geqslant \sum_{i=1}^{s} \delta^{i+1} \sum_{j=0}^{s-i} C_{i+2j-1}^{i-1} + \gamma.$$

Нехай $n = 2s+3$. З формул Уолліса випливає

$$|Q_{2s+3}^{(1)}| \geqslant \big||Q_{2s+2}^{(1)}| - |b_{2s+3}^{(1)}\,(x - x_{2s+2})|\,|Q_{2s+1}^{(1)}|\big| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_{i=1}^{s} \delta^{i+1} \sum_{j=0}^{s-i} C_{i+2j-1}^{i-1} + \gamma - \delta \sum_{i=0}^{s} \delta^i C_{2s+1-i}^i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{s} \delta^{i+1} \left(C_{2s+1-i}^i - \sum_{j=0}^{s-i} C_{i+2j-1}^{i-1}\right) + \delta - \gamma\right| = \sum_{i=1}^{s} \delta^{i+1} \sum_{j=0}^{s-i} C_{i+2j}^{i-1} + \delta - \gamma.$$

Теорема 5. 1) *Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[\alpha, \beta]$ і визначена своїми значеннями в кожній точці сегменту (α, β);* 2) *нехай всі коефіцієнти ІЛД* (18) *відмінні від нуля. Тоді для кожного $x_* \in (\alpha, \beta)$, такого, що $x_* \neq x_i, i = 0, 1, \ldots, n$, і $b_{n+1}^{(1)}(x_*) \neq 0$, де $b_{n+1}^{(1)}(x_*)$ визначаються за* (19) *при $x_{n+1} = x_*$, мають місце нерівності*

$$\frac{\Gamma^{n+1}}{\kappa_{n+1}(\delta) \cdot \kappa_{n+2}(\delta_*)} < |f(x_*) - D_n^{(1)}(x_*)| < \frac{\Delta^{n+1}}{\Omega_n(\delta) \cdot \Omega_{n+1}(\delta_*)} \tag{21}$$

де $\Delta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |b_i^{(1)}(x_* - x_{i-1})|, \quad \Gamma = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |b_i^{(1)}(x_* - x_{i-1})|, \quad \delta_* = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n+1} |b_i^{(1)}|(\beta - \alpha).$

Доведення. Оскільки за умовою теореми x_* не є інтерполяційним вузлом, то можна за значеннями функції в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, де $x_{n+1} = x_*$, побудувати ще один ІЛД

$$D^{(1)}_{n+1}(x) = \frac{P^{(1)}_{n+1}(x)}{Q^{(1)}_{n+1}(x)} = b^{(1)}_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n+1} \frac{b^{(1)}_k\,(x - x_{k-1})}{1},$$

де коефіцієнти $b^{(1)}_0, b^{(1)}_1, \ldots, b^{(1)}_n$ збігаються із коефіцієнтами ІЛД (18), а коефіцієнт $b^{(1)}_{n+1} = b^{(1)}_{n+1}(x_*)$. Різниця між двома сусідніми підхідними дробами рівна

$$D^{(1)}_{n+1}(x) - D^{(1)}_n(x) = (-1)^n \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} b^{(1)}_{i+1}(x - x_i)}{Q^{(1)}_n(x)\,Q^{(1)}_{n+1}(x)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням в точці $x = x_*$, маємо

$$|D^{(1)}_{n+1}(x_*) - D^{(1)}_n(x_*)| = |f(x_*) - D^{(1)}_n(x_*)| = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1} |b^{(1)}_i\,(x_* - x_{i-1})|}{|Q^{(1)}_{n+1}(x_*)|\,|Q^{(1)}_n(x_*)|},$$

або, з урахуванням твердження леми 2, отримуємо (21).

6. Обернений інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле. Інтерполянту можна шукати у вигляді оберненого ланцюгового дробу. Розглянемо скінчений ФЛД виду

$$D^{(r)}_n(x) = \frac{P^{(r)}_n(x)}{Q^{(r)}_n(x)} = \left(b^{(r)}_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a^{(r)}_k(x)}{b^{(r)}_k(x)} \right)^{-1}. \tag{22}$$

Значення чисельника $P^{(r)}_n(x)$ та знаменника $Q^{(r)}_n(x)$ підхідного дробу (22) можна знайти за допомогою формул Уолліса (4) при початкових значеннях $P^{(r)}_{-1}(x) = 0$, $Q^{(r)}_{-1}(x) = P^{(r)}_0(x) = 1$, $Q^{(r)}_0(x) = b_0(x)$. Легко бачити, що різниця між двома сусідніми підхідними дробами буде рівна

$$\frac{P^{(r)}_{n+1}(x)}{Q^{(r)}_{n+1}(x)} - \frac{P^{(r)}_n(x)}{Q^{(r)}_n(x)} = \frac{(-1)^{n+1} \prod\limits_{i=1}^{n+1} a^{(r)}_i(x)}{Q^{(r)}_{n+1}(x) \cdot Q^{(r)}_n(x)}. \tag{23}$$

Якщо $0 < |a^{(r)}_i(x)| \leqslant \delta_r$ і $0 < \gamma_r \leqslant |b^{(r)}_i|$, то згідно із теоремою 1

$$\left|Q^{(r)}_n(x)\right| < \left| \prod_{i=0}^{n} b^{(r)}_i(x) \right| \cdot \kappa_{n+2}(\rho_r), \qquad \text{де} \quad \rho_r = \delta_r/\gamma_r^2. \tag{24}$$

У випадку, коли $\delta_r \geqslant \gamma_r + 1$, аналогічно як в теоремі 2, виконується нерівність

$$\left|Q^{(r)}_n(x)\right| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\delta_r^{n+2} - 1}{\delta_r - 1} & \text{при} \quad \delta_r \neq 1, \\[2ex] n + 2 & \text{при} \quad \delta_r = 1. \end{cases} \tag{25}$$

Визначимо послідовність $\{v_k(x)\}$ співвідношеннями

$$f(x) = v_0(x),\ v_0(x) = \cfrac{1}{v_0(x_0) + \cfrac{x-x_0}{v_1(x)}},\ v_k(x) = v_k(x_k) + \frac{x-x_k}{v_{k+1}(x)}, k = 1, \ldots$$

Вкладемо елементи послідовності один в другий $n+1$ раз, позначимо $b_k^{(2)} = v_k(x_k)$ та підставимо нуль замість $(x-x_n)/v_{n+1}(x)$. Отримаємо ІЛД виду

$$D_n^{(2)}(x) = \frac{P_n^{(2)}(x)}{Q_n^{(2)}(x)} = \left(b_0^{(2)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x-x_{k-1}}{b_k^{(2)}}\right)^{-1}, \tag{26}$$

який можна розглядати як "обернений" дріб до ІЛД Тіле (14). З умови (13) для коефіцієнтів цього дробу можна отримати формули

$$b_0^{(2)} = \frac{1}{y_0}, \quad b_k^{(2)} = \cfrac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}^{(2)} + \cdots + \cfrac{x_k - x_1}{-b_1^{(2)} + \cfrac{x_k - x_0}{\cfrac{1}{y_k} - b_0^{(2)}}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Теорема 6. 1) *Нехай для функції $y = f(x)$, яка неперервна та визначена на $[\alpha, \beta]$, побудовано ІЛД (26), коефіцієнти якого задовольняють умову*

$$|b_k^{(2)}| \geqslant d_r \geqslant \delta_r + 1,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

2) *Знайдеться точка x_* така, що $x_* \in (\alpha, \beta)$, $x_* \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, і виконується $\left|b_{n+1}^{(2)}(x_*)\right| \geqslant d_r \geqslant \delta_r + 1$, де $b_{n+1}^{(2)}(x_*)$ визначено за формулою (27) при $x_{n+1} = x_*$. Тоді в точці x_* виконується нерівність*

$$\frac{\prod\limits_{i=0}^{n} |x_* - x_i| \,/ |b_{n+1}^{(2)}(x_*)|}{\left|\prod\limits_{i=0}^{n} b_i^{(2)}\right|^2 \kappa_{n+3}(\rho_r)\, \kappa_{n+2}(\rho_r)} \leqslant |f(x_*) - D_n^{(2)}(x_*)| \leqslant \frac{(\delta_r - 1)^2 \prod\limits_{i=0}^{n} |x_* - x_i|}{(\delta_r^{n+3} - 1)(\delta_r^{n+2} - 1)}, \tag{28}$$

де $\delta_r \geqslant \beta - \alpha$.

Доведення. Скористаємося методикою роботи [2]. Оскільки $x_* \notin X$, то можемо додати цю точку до множини інтерполяційних вузлів. За значеннями функції в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_*$ побудуємо ще один ІЛД $D_{n+1}^{(2)}(x)$ вигляду (26). Тоді з умови інтерполяційності та (23) маємо

$$|f(x_*) - D_n^{(2)}(x_*)| = |D_{n+1}^{(2)}(x_*) - D_n^{(2)}(x_*)| = \left|\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1} a_i^{(r)}(x)}{Q_{n+1}^{(r)}(x) \cdot Q_n^{(r)}(x)}\right|.$$

Скориставшись (24) та (25) отримуємо твердження теореми.

Теорема 7. 1) *Нехай функції $y = f(x)$ неперервна та визначена на $[\alpha, \beta]$ значеннями у вузлах матриці (17).*

2) *Нехай при кожному n побудовано ІЛД (26), коефіцієнти якого задовольняють умову*

$$|b_k^{(2)}| \geqslant d_r \geqslant \delta_r + 1,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

3) *Якщо знайдеться точка* x_* *така, що* $x_* \in (\alpha, \beta)$, $x_* \neq x_i^n$, *при всіх* $i = 0, 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, *і для неї* $\left|b_{n+1}^{(2)}(x_*)\right| \geqslant d_r \geqslant \delta_r + 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_*) - D_n^{(2)}(x_*)| = 0.$$

Доведення. При кожному фіксованому n має місце співвідношення (28). Перейшовши до границі при $n \to \infty$ матимемо твердження теореми.

З формул (15), (16) та (27) випливає, що можна ввести в розгляд послідовність обернених поділених різницю 2–го типу наступним чином

$$\Phi_k^{(2)}[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}^{(2)}[x_0, \ldots, x_k] - \Phi_{k-1}^{(2)}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \tag{29}$$

при $\Phi_0^{(2)}[x] = 1/f(x)$, а тоді $b_k^{(2)} = b_k^{(2)}[x_0, \ldots, x_k] = \Phi_k^{(2)}[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Твердження 2. *Степені чисельника* $P_n^{(2)}(x)$ *та знаменника* $Q_n^{(2)}(x)$ *задовольняють нерівності* $\mathbf{deg}\ P_n^{(2)}(x) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, $\mathbf{deg}\ Q_n^{(2)}(x) \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Дане твердження є наслідком із твердження 1.

7. Обернений інтерполяційний правильний ланцюговий C–дріб. ІЛД виду

$$D_n^{(3)}(x) = \frac{P_n^{(3)}(x)}{Q_n^{(3)}(x)} = \left(b_0^{(3)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(3)} \cdot (x - x_{k-1})}{1}\right)^{-1} \tag{30}$$

можна отримати, якщо послідовність функцій $\{v_k(x)\}$ визначити наступним чином

$$f(x) = v_0(x),\ v_1(x) = \frac{1}{v_0(x_0) + v_1(x)\ (x - x_0)},\ v_k(x) = \frac{v_k(x_k)}{1 + v_{k+1}(x)(x - x_k)},\ k = 1, 2, \ldots$$

ІЛД (30) можна розглядати як обернений дріб до ІЛД (26).

Згідно із співвідношенням (13), коефіцієнти ІЛД (30) визначаються за формулами

$$b_0^{(3)} = \frac{1}{y_0},\ b_1^{(3)} = \frac{\dfrac{1}{y_1} - b_0^{(3)}}{x_1 - x_0},$$

$$b_k^{(3)} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left(-1 + \frac{b_{k-1}^{(3)} \cdot (x_k - x_{k-2})}{-1} + \frac{b_{k-2}^{(3)} \cdot (x_k - x_{k-3})}{-1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{b_2^{(3)} \cdot (x_k - x_1)}{-1} + \frac{b_1^{(3)} \cdot (x_k - x_0)}{\dfrac{1}{y_k} - b_0^{(3)}}\right),\ k = 2, \ldots, n. \tag{31}$$

ІЛД (30) дробово–раціональна функція, степені чисельника $P_n^{(3)}(x)$ та знаменника $Q_n^{(3)}(x)$ якої задовольняють твердження 2. Даний ІЛД буде еквівалентним дробові (26), оскільки між коефіцієнтами цих дробів мають місце наступні співвідношення

$$b_0^{(3)} = b_0^{(2)}, \quad b_1^{(3)} = \frac{1}{b_1^{(2)}}, \quad b_i^{(3)} = \frac{1}{b_{i-1}^{(2)} \cdot b_i^{(2)}}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{32}$$

Але коефіцієнти ІЛД (30) можуть бути безпосередньо обчислені через значення функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах за допомогою формул (31).

Для ІЛД (30) задовольняє формулу Ойлера–Міндінга (7) при

$$X_0 = b_1^{(3)}(x-x_0)/b_0^{(3)},\ X_i = b_{i+1}^{(3)}(x-x_i),\ i=1,2,\dots,n.$$

Аналогічно, як і у випадку правильного інтерполяційного ланцюгового С–дробу (18), можна довести лему.

Лема 3. *Якщо всі коефіцієнти* $b_i^{(3)}, i=0,\dots,n$, *ІЛД* (30) *відмінні від нуля, то для довільного* $x\in(\alpha,\beta)$, *такого, що* $x\neq x_i, i=0,\dots,n$, *та* $n>0$ *має місце*

$$\Omega_n^{(c)}(\delta_c) < \left|Q_n^{(3)}(x)\right| < |b_0^{(3)}|\,\kappa_{n+2}(\delta_c),$$

де

$$\Omega_n^{(c)}(\delta_c) = |b_0^{(3)}|\left(\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]-1}\delta_c^{i+1}\sum_{j=0}^{[\frac{n+1}{2}]-i-1}C_{i+2j-\theta_{n+1}}^{i-1}+\theta_n\delta_c\right)+(-1)^{n+1}\gamma_c,$$

$$\delta_c = \max_{2\leqslant i\leqslant n}\left\{|b_i^{(3)}|, \frac{|b_1^{(3)}|}{|b_0^{(3)}|}\right\}\cdot(\beta-\alpha),\quad \gamma_c = \Big|\min_{x\in(\alpha,\beta)}|b_1^{(3)}(x-x_0)|-|b_0^{(3)}|\Big|.$$

Спираючись на лему 3 доводиться наступна теорема.

Теорема 8. 1) *Нехай* $f(x)$ *неперервна на* $[\alpha,\beta]$ *і визначена в точках* (α,β); 2) *нехай всі коефіцієнти ІЛД* (30) *відмінні від нуля. Тоді для кожного* $x_*\in(\alpha,\beta)$, *такого, що* $x_*\neq x_i, i=0,\dots,n$ *і* $b_{n+1}^{(3)}(x_*)\neq 0$, *де* $b_{n+1}^{(3)}(x_*)$ *визначаєтьcя за допомогою формули* (31) *при* $x_{n+1}=x_*$, *має місце*

$$\frac{\Gamma_*^{n+1}}{|b_0^{(3)}|^2\,\kappa_{n+2}(\delta_c)\,\kappa_{n+3}(\delta_c^*)} < |f(x_*)-D_n^{(3)}(x_*)| < \frac{\Delta_*^{n+1}}{\Omega_n^{(c)}(\delta_c)\,\Omega_{n+1}^{(c)}(\delta_c^*)},$$

де $\Delta_* = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\left|b_{i+1}^{(3)}(x_*-x_i)\right|$, $\Gamma_* = \min\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\left|b_{i+1}^{(3)}(x_*-x_i)\right|$, $\delta_c^* = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|b_{i+1}^{(3)}|, \dfrac{|b_1^{(3)}|}{|b_0^{(3)}|}\right\}(\beta-\alpha)$.

8. Інтерполяційний ланцюговий дріб Л. Ойлера. Можна побудувати ІЛД, який буде еквівалентний інтерполяційному многочлену у формі Ньютона. Цей ланцюговий дріб буде дробом Л. Ойлера, тобто буде мати вид

$$D_n^{(o)}(x) = \frac{P_n^{(o)}}{Q_n^{(o)}} = \frac{b_0^{(o)}}{1} - \frac{b_1^{(o)}(x-x_0)}{1+b_1^{(o)}(x-x_0)} - \cdots - \frac{b_n^{(o)}(x-x_{n-1})}{1+b_n^{(o)}(x-x_{n-1})}. \tag{33}$$

Як добре відомо [14], знаменник $Q_n^{(o)}(x)$ ланцюгового дробу (33) при кожному значенні n рівний одиниці, а чисельник визначається за формулою

$$P_n^{(o)}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_0^{(o)}\,b_1^{(o)}(x-x_0)\cdots b_i^{(o)}(x-x_{i-1}). \tag{34}$$

Якщо визначати коефіцієнти $b_i^{(o)}$ ланцюгового дробу (33) з умови (13), то отримаємо

$$b_0^{(o)} = y_0, b_k^{(o)} = \frac{y_k - b_o^{(o)} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_o^{(o)}b_1^{(o)}(x_k-x_0)b_2^{(o)}(x_k-x_1)\cdots b_i^{(o)}(x_k-x_{i-1})}{(x_k-x_{k-1})b_0^{(o)}b_1^{(o)}(x_k-x_0)\cdots b_{k-1}^{(o)}(x_k-x_{k-2})}\quad k=1,\dots,n.$$

Зауваження 2. *Оскільки* $Q_n(x) = 1$ *при всіх* n, *то формула залишкового члена* ([6, *Теорема* 1]) *у випадку, коли функція* $f(x)$ *неперервна на* $[\alpha, \beta]$, *буде збігатися з формулою залишкового члена інтерполяційного многочлена у формі Ньютона* ([7]).

Зауваження 3. *Легко бачити, що між коефіцієнтами інтерполяційного многочлена у формі Ньютона* $c_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$ *та коефіцієнтами ІЛД* (33) *існує наступний взаємозв'язок* $c_i = \prod\limits_{k=0}^{i} b_k^{(o)}$.

1. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72–79.
2. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом Тіле // Зб. наук. праць з обч. мат. – Ужгород, 1997. – С. 21–26.
3. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень. Зб. наук. праць.– Т. 1. – К.: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2001. – С. 328–333.
4. *Pahirya M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX. – P. 21–29.
5. *Pahirya M.* Interpolation Function of Non-Tiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X. – P. 59–62.
6. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46. – № 4. – С. 57–64.
7. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень. – Ч. 1.– К.: Вища школа, 1995. – 367 с.
8. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
9. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Band I.– Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 s.
10. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
11. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
12. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. –Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – XII. – 175 s.
13. *Hildebrand F. B.* Introduction to Numerical Analysis. 2^{nd} ed. – New York: Dover Publications, Inc, 1987. – 669 p.
14. *Wall H. S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.

Одержано 21.10.2005