УДК 517.946

М. О. Перестюк (Київський нац. ун-т імені Шевченка)
С. І. Балога (Ужгородський нац. ун-т)

ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО L-ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

The problems of reduction to the L-diagonal form for the systems of the differential equations on the torus are studied

У роботі розглянуто випадки зведення систем диференціальних рівнянь, визначених на торі, до L-діагонального вигляду

Дослідженням систем диференціальних рівнянь, визначених на торі, присвячена значна кількість наукових робіт (див. бібліографію в [2]). В [1] розглянуто зведення системи
$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + B(t)]x,$$
де $A(t) \in C^1[t_0, \infty]$ і $B(t) \in C[t_0, \infty]$ до L-діагонального виду
$$\frac{dy}{dt} = [\Lambda(t) + Q(t)]y,$$
де $\Lambda(t)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(t)$.

У даній роботі перенесемо ці результати на систему диференціальних рівнянь, визначених на торі, вигляду
$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{1}$$
де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \in T_m$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $a(\varphi)$ і $A(\varphi)$ — неперервні і періодичні по кожній із змінних $\varphi_j (j = 1, 2, ..., m)$ з періодом 2π відповідно векторна та матрична функції, T_m — m-вимірний тор, тобто $a(\varphi), A(\varphi) \in C(T_m)$.

Означення.[2] *Нехай* $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < ...,$ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ — *послідовність значень* t *така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(\varphi) = \varphi^0$. *Тоді* φ^0 *називають* ω*-граничною точкою півтраєкторії* $\varphi_t(\varphi; R^+)$. *Аналогічно визначають* α*-граничну точку півтраєкторії* $\varphi_t(\varphi; R^-)$.

Множину всіх ω*-граничних точок півтраєкторії* $\varphi_t(\varphi; R^+)$ *позначають через* Ω_φ. *Аналогічно множину всіх* α*-граничних точок півтраєкторії позначають через* A_φ.

Об'єднання всіх множин ω*-граничних точок півтраєкторії* $\varphi_t(\varphi; R^+)$ *називають* ω*-граничною множиною півтраєкторії* $\varphi_t(\varphi; R^+)$ *і позначають*
$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in T_m} \Omega_\varphi.$$

Розглянемо проблему зведення системи диференціальних рівнянь (1) до L-діагонального вигляду, а саме до вигляду
$$\dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, $\Lambda(\varphi) = diag\{\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), .., \lambda_n(\varphi)\} \in C(T_m)$, $Q(\varphi)$ — деяка матрична функція.

Теорема 1. *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (1) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A_0$ *і всі характеристичні числа граничної матриці прості. Тоді система* (1) *за допомогою лінійного перетворення*

$$x = Cy, \quad detC \neq 0$$

зводиться до L-діагонального вигляду

$$\dot{y} = [\Lambda + Q(\varphi)]y, \tag{2}$$

де $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$ — *діагональна матриця, елементи якої є власними значеннями граничної матриці* A_0, $Q(\varphi)$ — *матрична функція вигляду* $Q(\varphi) = C^{-1}[A(\varphi) - A_0]C \in C(T_m)$, *причому* $\lim\limits_{t\to\infty} Q(\varphi_t(\varphi)) = 0$.

Доведення. Нехай C — матриця, що приводить матрицю A_0 до діагонального вигляду

$$C^{-1}A_0C = \Lambda.$$

Запишемо систему (1) у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A_0x + [A(\varphi) - A_0]x,$$

і введемо заміну змінних $x = Cy$

$$C\dot{y} = A_0Cy + [A(\varphi) - A_0]Cy,$$

$$\dot{y} = C^{-1}A_0Cy + C^{-1}[A(\varphi) - A_0]Cy.$$

Звідси

$$\dot{y} = [\Lambda + Q(\varphi)]y,$$

де Λ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці A_0, $det\Lambda < \infty$,

$$Q(\varphi) = C^{-1}[A(\varphi) - A_0]C \in C(T_m).$$

Оскільки $detC < \infty$ і $detC \neq 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} Q(\varphi_t(\varphi)) = \lim_{t\to\infty} K[A(\varphi_t(\varphi)) - A_0] = 0.$$

Теорему доведено.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = [A(\varphi) + B(\varphi)]x, \tag{3}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m) \in T_m$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $a(\varphi)$ і $B(\varphi)$ — неперервні і періодичні по кожній із змінних $\varphi_j (j = 1, 2, ..., m)$ з періодом 2π відповідно векторна та матрична функції, $A(\varphi)$ — неперервна разом зі своїми частинними похідними по всіх змінних $\varphi_j (j = 1, 2, ..., m)$, 2π-періодична матрична функція, тобто $a(\varphi), B(\varphi) \in C(T_m)$, $A(\varphi) \in C^1(T_m)$.

Теорема 2. *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (3) *виконуються умови:* 1)*існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A_0$, *причому всі власні значення граничної матриці* A_0 *різні;* 2)*похідна* $\dot{A}(\varphi_t(\varphi))$ *і матриця* $B(\varphi_t(\varphi))$ *абсолютно інтегровні на* $[0,\infty], \varphi \in T_m$, *тобто* $\int\limits_0^\infty \left\|\dot{A}(\varphi_t(\varphi))\right\| dt < \infty$, $\int\limits_0^\infty \|B(\varphi_t(\varphi))\| \, dt < \infty$. *Тоді система* (3) *при* $\varphi \in T_m, t \geq T >> 0$ *за допомогою лінійного перетворення*

$$x = C(\varphi)y,$$

зводиться до L*-діагонального вигляду*

$$\dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y, \tag{4}$$

де $\Lambda(\varphi) = diag\{\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), .., \lambda_n(\varphi)\} \in C^1(T_m)$ — *діагональна матриця, елементи якої є власними значеннями матриці* $A(\varphi)$, $Q(\varphi)$ — *матрична функція, яка є абсолютно інтегровна на* $[T,\infty]$, $\varphi \in T_m$, *тобто* $\int\limits_T^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| \, dt < \infty$.

Доведення. Нехай $C(\varphi)$ — матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду, тобто

$$C^{-1}(\varphi_t(\varphi))A(\varphi_t(\varphi))C(\varphi_t(\varphi)) = \Lambda(\varphi_t(\varphi)), \varphi \in T_m, t \geq T.$$

Остання рівність еквівалентна наступній

$$C^{-1}(\varphi))A(\varphi)C(\varphi) = \Lambda(\varphi), \varphi \in T_m, \varphi \notin \cup(\Omega),$$

де $\cup(\Omega)$ — досить малий окіл ω-граничної множини Ω. Така матриця $C(\varphi)$ існує згідно з лемою про діагоналізацію змінної матриці[1]. Покладемо $x = C(\varphi)y$. Із рівняння (3) отримаємо

$$C(\varphi_t(\varphi))\frac{dy_t}{dt} + \dot{C}(\varphi_t(\varphi))y_t = [A(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi))]C(\varphi_t(\varphi))y_t,$$

$$\dot{y}_t = [\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + Q(\varphi_t(\varphi))]y_t, \varphi \in T_m, t \geq T,$$

де $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$,

$$Q(\varphi) = -C^{-1}(\varphi)\dot{C}(\varphi) + C^{-1}(\varphi)B(\varphi)C(\varphi) \in C(T_m), \varphi \in T_m, \varphi \notin \cup(\Omega).$$

Оскільки $C(\varphi)$ і $C^{-1}(\varphi)$ обмежені, то з останньої рівності випливає, що

$$\|Q(\varphi)\| \leq C_1 \left\|\dot{C}(\varphi)\right\| + C_2 \|B(\varphi)\|,$$

де C_1, C_2 — додатні сталі. Якщо матриці $\dot{A}(\varphi_t(\varphi))$ і $B(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровні на $[0,\infty], \varphi \in T_m$, то $\dot{C}(\varphi_t(\varphi))$ — абсолютно інтегровна на $[T,\infty], \varphi \in T_m$, отже,

$$\int\limits_T^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| \, dt \leq C_1 \int\limits_T^\infty \left\|\dot{C}(\varphi_t(\varphi))\right\| dt + C_2 \int\limits_T^\infty \|B(\varphi_t(\varphi))\| \, dt < \infty.$$

Таким чином, $Q(\varphi)$ абсолютно інтегровна при $\varphi \in T_m, \varphi \notin \cup(\Omega)$. Оскільки матриця $A(\varphi)$ обмежена, то $\Lambda(\varphi)$ також обмежена.
Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(\varphi)x = 0, \tag{5}$$

де $p(\varphi) \in C^1(T_m), p(\varphi) > 0, \int\limits_{t_0}^{\infty} |\dot{p}(\varphi_t(\varphi))| \, dt < \infty.$

Рівняння (5) можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -p(\varphi)x. \end{cases} \tag{6}$$

Розглянемо характеристичне рівняння

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda(\varphi) & -1 \\ p(\varphi) & \lambda(\varphi) \end{vmatrix} = 0;$$

його коренями є

$$\lambda_1(\varphi) = i\sqrt{p(\varphi)}, \lambda_2(\varphi) = -i\sqrt{p(\varphi)}.$$

Побудуємо матрицю $C(\varphi)$, що приводить матрицю системи (6)

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

до діагонального вигляду:

$$C(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{p(\varphi)} & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$C^{-1}(\varphi) = \frac{i}{2\sqrt{p(\varphi)}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{p(\varphi)} & -1 \\ -i\sqrt{p(\varphi)} & 1 \end{pmatrix}$$

і підставивши відповідні матриці в рівність

$$C^{-1}(\varphi)A(\varphi)C(\varphi) = \Lambda(\varphi),$$

де

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{p(\varphi)} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix},$$

переконуємось у її правильності. Записавши систему (6) у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

покладемо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{p(\varphi)} & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{p(\varphi)} & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\dot{\sqrt{p(\varphi)}} & -i\dot{\sqrt{p(\varphi)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{p(\varphi)} & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix}$$

і, після спрощення,

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{p(\varphi)} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{p(\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix} - \frac{\dot{\sqrt{p(\varphi)}}}{2\sqrt{p(\varphi)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \eta \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Оскільки $\frac{\dot{\sqrt{p(\varphi)}}}{\sqrt{p(\varphi)}} = \frac{\dot{p}(\varphi)}{2p(\varphi)}$ і $p(\varphi) \geq c > 0$, то

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left| \frac{\dot{\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))}}}{\sqrt{p(\varphi_t(\varphi)}} \right| dt \leq \frac{1}{2c} \int\limits_{t_0}^{\infty} |\dot{p}(\varphi_t(\varphi))|\, dt < \infty.$$

Отже, для фундаментальної матриці системи (7) справедлива асимптотична формула

$$\Sigma(\varphi_t(\varphi)) = \begin{pmatrix} exp(i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon_1(\varphi_t(\varphi)) & \epsilon_2(\varphi_t(\varphi)) \\ \epsilon_3(\varphi_t(\varphi)) & exp(-i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon_4(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix},$$

де $\epsilon_j(\varphi_t(\varphi)) \to 0$ при $t \to \infty (j = 1, 2, 3, 4)$. Повертаючись до попередніх змінних x і y і враховуючи обмеженість функції $p(\varphi)$, для системи (6) отримаємо фундаментальну матрицю

$$X'(\varphi_t(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} & -i\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} \end{pmatrix} \Sigma(\varphi_t(\varphi)) =$$

$$= \begin{pmatrix} exp(i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon'_1(\varphi_t(\varphi)) & exp(-i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon'_2(\varphi_t(\varphi)) \\ i\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} exp(i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon'_3(\varphi_t(\varphi)) & -i\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} exp(-i\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1) + \epsilon'_4(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix},$$

де $\epsilon'_j(\varphi_t(\varphi)) \to 0$ при $t \to \infty (j = 1, 2, 3, 4)$. Поклавши

$$X(\varphi) = X'(\varphi) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix},$$

отримаємо фундаментальну матрицю вигляду

$$X(\varphi_t(\varphi)) = \begin{pmatrix} cos\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1 + \eta_1(\varphi_t(\varphi)) & sin\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1 + \eta_2(\varphi_t(\varphi)) \\ -\sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} sin\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1 + \eta_3(\varphi_t(\varphi)) & \sqrt{p(\varphi_t(\varphi))} cos\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))}dt_1 + \eta_4(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix},$$

де $\eta_j(\varphi_t(\varphi)) \to 0$ при $t \to \infty (j = 1, 2, 3, 4)$. Таким чином, рівняння (5) має при $t \to \infty$ загальний розв'язок асимптотичного вигляду

$$x(\varphi_t(\varphi)) = C_1 cos \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))} dt_1 + C_2 sin \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(\varphi_{t_1}(\varphi))} dt_1 + \eta(\varphi_t(\varphi)),$$

де C_1, C_2-довільні сталі, $\underset{t\to\infty}{lim} \eta(\varphi_t(\varphi)) = 0$.

В даній роботі розглянуто зведення системи диференціальних рівнянь, визначених на торі, до L-діагонального вигляду в двох випадках: коли діагональна матриця стала та коли діагональна матриця є матричною функцією. Другий випадок проілюстровано на прикладі. Аналогічним методом це рівняння можна звести до системи із сталою діагональною матрицею.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1969. – 472 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

Одержано 21.10.2005