УДК 519.63

В. О. Петенько (Ужгородский нац. ун-т)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

The algorithm of numenical solving of Cauchy problem and some boundary problems for unhomogen parabolic equation, and also boundary problems for elliptic equations of high order is grounded in this work.

В роботі обгрунтований алгоритм наближеного розв'язання задачі Коші і деяких граничних задач для неоднорідного параболічного рівняння, а також граничних задач для еліптичного рівняння вищого порядку.

Замена дифференциальных задач разностными приводит обычно к решению систем алгебраических уравнений со многими неизвестными, и здесь преимущественными разностными методами являются те, которые допускают удобную реализацию на ЭВМ. К таким разностным методам решения задач для уравнений в частных производных относятся, в первую очередь, методы, приводящие к явной записи приближенного решения. В этом случае алгоритмы решения сравнительно просты и легко реализуемы на ЭВМ.

Предлагаемый в данной работе метод, относящийся к последним, использует понятие свертки числовых наборов, а при обосновании и оценке сходимости привлекается аналог локальной предельной теоремы теории вероятностей для решетчатых распределений [1]. В работе иллюстрируется применение этого метода к решению некоторого круга задач для уравнений параболического и эллиптического типов высшего порядка в случае координатного пространства трех измерений.

Первые обобщения локальных передельных теорем теории вероятностей получены, по-видимому, в работе [2], доказательства новых обобщений локальной предельной теоремы и применение их к численному решению задачи Коши для класса уравнений и систем уравнений, параболических по Г. Е. Шилову, для двумерного случая содержатся в работах [3,4].

1. Разностное решение задачи Коши для параболического уравнения. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида:

$$\Psi_q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

где

$$\Psi_q(s,t,u) = \sum_{k+l+m=q} a_{klm} s^{2k} t^{2l} u^{2m} -$$

положительно определенная форма $2q$-го порядка, обладающая такими, используемыми в дальнейшем, свойствами:

1) $\Psi_q(sr^{\frac{1}{2q}}, tr^{\frac{1}{2q}}, ur^{\frac{1}{2q}}) = r\Psi_q(s,t,u)$, $r > 0$;

2) существуют постоянные C и c $(C \geq c > 0)$, что для произвольной тройки (s,t,u)

$$C\left(s^{2q} + t^{2q} + u^{2q}\right) \leq \Psi_q(s,t,u) \leq C\left(s^{2q} + t^{2q} + u^{2q}\right). \quad (1)$$

Исследуем сначала процесс численного решения задачи Коши вида

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = -\Psi_q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right)\nu + g(x,y,z,\tau),\ (x,y,z)\in R_3,\ \tau\ge 0;\ q=3,4,5\ldots \qquad (2)$$

$$\nu(x,y,z,0) = f(x,y,z); \qquad (3)$$

где функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ — финитны как функции переменных x, y, z, т.е., обращающиеся в нуль вне некоторой области G и обладающие дополнительными свойствами определенными ниже.

К задаче (2)–(3) применим разностную схему, согласно которой

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} \to \frac{1}{\Delta}(\nu_\Delta(x,y,z,\tau+\Delta\tau) - \nu_\Delta(x,y,z,\tau)),$$

$$\frac{\partial^{2q}\nu}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}} \to \frac{1}{\Delta x^{2k}\Delta y^{2l}\Delta z^{2m}}\times$$

$$\times\sum_{k'=-1}^{k}\sum_{l'=-l}^{l}\sum_{m'=-m}^{m} C_{2k}^{k+k'}C_{2l}^{l+l'}C_{2m}^{m+m'}\nu_\Delta(x-k'\Delta x, y-l'\Delta y, z-z'\Delta z,\tau).$$

Управление α между шагами $\alpha^{-1}\Delta\tau = \Delta x^{2q} = \Delta y^{2q} = \Delta z^{2q}$ выберем удовлетворяющим неравенству

$$0 < \alpha < (3C)^{-1}, \qquad (4)$$

где C взята из соотношения (1). Введем обозначения

$$P(u',l',m') = (-1)^{k'+l'+m'+1}\alpha\sum_{k+l+m=q} C_{2k}^{k+k'}C_{2l}^{l+l'}C_{2m}^{m+m'}a_{klm},$$

если

$$|k'|+|l'|+|m'|>0 \text{ и } P(0,0,0) = 1-\alpha\sum_{k+l+m=q} C_{2k}^{k}C_{2l}^{l}C_{2m}^{m}a_{klm}.$$

Тогда задача (2)-(3) сведется к разностному аналогу

$$v_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau+\Delta\tau) =$$

$$= \sum_{k',l',m'} P(k',l',m')v_\Delta((k-k')\Delta x,(l-l')\Delta y,(m-m')\Delta z, n\Delta\tau)+$$

$$+\Delta\tau g(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z,(n+1)\Delta\tau), \qquad (5)$$

$$v_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, 0) = f(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z). \qquad (6)$$

Введем понятие свертки последовательностей (наборов) аналогично тому, как это делается в теории вероятностей, например в [5], т.е., сверткой последовательностей $\{a(k,l,m)\}$ и $\{b(k,l,m)\}$ назовем такую последовательность $\{c(k,l,m)\} = \{a(k,l,m)*$ $*b(k,l,m)\}$, каждый элемент которой образуется по правилу:

$$c(k,l,m) = \sum_{k',l',m'} a(k-k',l-l',m-m')b(k',l',m')$$

(суммирование распространяется на такие тройки (k', l', m'), когда $a(k-k', l-l', m-m')$ и $b(k', l', m')$ отличны от нуля). Будут использоваться коммутативное и ассоциативное свойства свертки; под набором $\{P_j(k,l,m) = \{P(k,l,m)\}^{j^*}\}$ будем понимать j-кратную свертку набора с собой.

Решая последовательно (5)–(6) получим

$$\nu_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau) = \sum_{k',l',m'} P_n(k-k', l-l', m-m') f(k', l', m') +$$

$$+\Delta\tau \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k',l',m'} P_{n-j}(k-k', l-l', m-m') g_j(k', l', m') + g_n(k,l,m) \right); \quad (7)$$

здесь $f(k,l,m) = f(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z)$, $g_j(k,l,m) = g(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, j\Delta\tau)$.

В работе [1] доказано утверждение типа локальной предельной теоремы теории вероятностей для решетчатых распределений.

Теорема 1. *Если при построении набора $\{P(k,l,m)\}$ управление α удовлетворяет неравенству* (4), *то равномерно по* (k,l,m) *выполняется соотношение*

$$\left| \frac{P_n(k,l,m)}{\Delta x \Delta y \Delta z} - \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{R_3} \exp\{-i(sk\Delta x + tl\Delta y + um\Delta z) - \right.$$

$$\left. -n\alpha\Psi_q(s\Delta x, t\Delta y, u\Delta z)\} ds dt du \right| \le \frac{D_q}{\Delta x \Delta y \Delta z} n^{-\frac{5}{2q}}, \quad (8)$$

где

$$D_q = (2\pi)^{-3} \left(\frac{3B_q}{2qc^{1+\frac{5}{2q}}} \Gamma(\frac{3}{2q}) \Gamma(\frac{1}{2q})^2 + \frac{24(\Gamma(\frac{1}{2q}))^2}{qc^{3+\frac{1}{q}}} + \frac{24(\Gamma(\frac{1}{2q}))^2}{qc_q^{3+\frac{1}{q}}} \right),$$

$$c_q = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2q} \alpha c, \quad B_q = \exp\{3\alpha c\} \left(\frac{2q\alpha c}{4!} + \frac{\alpha^2 C^2}{2} \right).$$

Решение задачи (2)–(3) представляется в виде

$$\nu(x,y,z,\tau) = \iiint\limits_{R_3} E(x-x'.y-y', z-z', \tau) f(x', y', z') dx' dy' dz' +$$

$$+ \int_0^\tau \iiint\limits_{R_3} E(x-x', y-y', z-z', \tau-\omega) g(x', y', z', \omega) dx' dy' dz' d\omega, \quad (9)$$

где

$$E(x,y,z,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{R_3} \exp\{-i(sx+ty+uz) - \tau\Psi_q(s,t,u)\} ds dt du \ -$$

фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\Psi_q(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z})\nu.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

1) *функция кусочно-непрерывна вместе с частными производными до второго порядка в области* G *и в этой области*

$$|f(x,y,z)| \leq f_0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq f_1,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq f_2,\ \left|\frac{\partial f}{\partial zx}\right| \leq f_3,$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leq f_{11},\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| \leq f_{22},\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right| \leq f_{33};$$

2) *функция* $g(x,y,z,\omega)$ *кусочно-непрерывна вместе с частными производными до* $2q$*-го порядка по пространтвенным координатам и с* $\frac{\partial g}{\partial \omega}$ *в области* $G \times [0,\tau]$ *и в этой области выполняется*

$$|g(x,y,z,\omega)| \leq g_0,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leq g_1,\ \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq g_2,\ \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \leq g_3,\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right| \leq g_{11},\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right| \leq g_{22},$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| \leq g_{33};\ \left|\frac{\partial^{2q} g}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}}\right| \leq g_{klm},\ \left|\frac{\partial g}{\partial \omega}\right| \leq \Omega.$$

3) *управление* α *удовлетворяет неравенству* (4).

Тогда, равномерно по (k,l,m),

$$|\nu_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau) - \nu(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau)| \leq F_q n^{-\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

где $F_q = F_q(m(G), q, \tau, \alpha, D_q, f_0, f_1, f_2, f_3, f_{22}, f_{33}, g_0, g_1, g_2, g_3, g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{klm}, \Omega)$, $m(G)$ *— мера области* G.

Доказательство. Исходя из представления (9) для решения задачи (2)–(3) и формулы (7) для нахождения приближенного решения этой задачи, имеем

$$|v_\Delta - v| \leq \left| \sum_{k',l',m'} P_n(k-k', l-l', m-m') f(k',l',m') - \right.$$

$$\left. - \iiint\limits_G E(k\Delta x - x, l\Delta y - y, m\Delta z - z, n\Delta\tau) f(x,y,z)dxdydz \right| +$$

$$+ \left| \Delta\tau \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k',l',m'} P_{n-j}(k-k', l-l', m-m') g_j(k',l',m') + g_n(k,l,m) \right) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\tau \iiint\limits_G E(x,y,z,\omega) g(k\Delta x - x, l\Delta y - y, m\Delta z - z, n\Delta\tau - \omega) dxdydzd\omega \right| = R_1 + R_2.$$

В свою очередь

$$R_1 \leq \sum_{k',l',m'} \left| \frac{P_n(k-k', l-l', m-m')}{\Delta x \Delta y, \Delta z} - \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{R_3} \exp\{-is(k-k')\Delta x + \right.$$

$$\left. + t(l-l')\Delta y + u(m-m')\Delta z - \Psi_q(s,t,u)n\Delta\tau\} \right| |f(k',l',m')| \Delta x \Delta y \Delta z +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{R_3}|\exp\{-\Psi_q(s,t,u)-i(sk\Delta x+tl\Delta y+um\Delta z)\}|\times$$

$$\times\left|\sum_{k',l',m'}\exp\{i(sk\Delta x+tl\Delta y+um\Delta z)\}f(k',l',m')\Delta x\Delta y\Delta z-\right.$$

$$\left.-\iiint\limits_{G}\exp\{i(sx+ty+uz)\}f(x,y,z)dxdydz\right|dsdtdu=R_{11}+R_{12}.$$

Для оценки R_{11} используем соотношение (8)

$$R_{11}\leq\sum_{k',l',m'}\frac{D_qn^{-\frac{s}{2q}}}{\Delta x\Delta y\Delta z}f_0\Delta x\Delta y\Delta z=m(G)D_qf_0\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^{\frac{3}{2q}}n^{-\frac{1}{q}}.$$

При оценке R_{12} используем формулу для погрешности при приближенных вычислениях интеграла с помощью интегральных сумм:

$$\left|\iiint F(x,y,z)dxdydz-\sum_{k,l,m}F(k\Delta x,l\Delta y,m\Delta z)\Delta x\Delta y\Delta z\right|\leq$$

$$\leq\frac{m(G)}{24}(F_{11}+F_{12}+F_{33})\Delta x^2 \tag{11}$$

при условии, что функция $F(x,y,z)$ кусочно-непрерывна в области G вместе с частными производными до второго порядка, причем $\left|\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|\leq F_{11}$, $\left|\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right|\leq F_{22}$, $\left|\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\right|\leq F_{33}$ в области G, а $\Delta x=\Delta y=\Delta z$. Соотношение (11) доказывается аналогично одномерному случаю, рассмотренному, например, в [6]. Тогда

$$R_{12}\leq\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-n\Delta\tau\Psi_q(s,t,u)\}\left|\sum_{k',l',m'}\exp\{i(sk\Delta x+tl\Delta y+um\Delta z)\}\times\right.$$

$$\left.\times f(k',l',m')\Delta x\Delta y\Delta z-\iiint\limits_{G}\exp\{i(sx+ty+uz)\}f(x,y,z)dxdydz\right|dsdtdu\leq$$

$$\leq\frac{m(G)\Delta x^2}{192\pi^3}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-\tau\Psi_q(s,t,u)\}\left\{f_0(s^2+t^2+u^2)+\right.$$

$$\left.+f_1|s|+f_2|t|+f_3|u|+f_{11}+f_{22}+f_{33}\right\}dsdtdu\leq\frac{m(G)}{192\pi^3q^3}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\right)^3\times$$

$$\times\left(3f_0\frac{\Gamma(\frac{3}{2q})}{(\tau c)^{\frac{5}{2q}}}+\frac{(f_1+f_2+f_3)\Gamma(\frac{1}{q})}{(\tau c)^{\frac{2}{q}}}+\frac{(f_{11}+f_{22}+f_{33})\Gamma(\frac{1}{2q})}{(\tau c)^{\frac{3}{2q}}}\right)\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}n^{-\frac{1}{q}}.$$

Разность R_2 оценим, также разбивая ее на части

$$R_2\leq\Delta\tau\left|\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k',l',m'}P_{n-j}(k-k',l-l',m-m')g_j(k',l',m')-\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k',l',m'} E\left((k-k')\Delta x,(l-l')\Delta y,(m-m')\Delta z,(n-j)\Delta\tau\right) g_j(k',l',m')\Delta x\Delta y\Delta z\Bigg| +$$

$$+\Delta\tau\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k',l',m'} E\left((k-k')\Delta x,(l-l')\Delta y,(m-m')\Delta z,(n-j)\Delta\tau\right) g_j(k',l',m')\Delta x\Delta y\Delta z-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\iiint\limits_G E\left(k\Delta x-x,l\Delta y-y,m\Delta z-z,(n-j)\Delta\tau\right) g(x,y,z,j\Delta\tau)dxdydz\right| +$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{n}\iiint\limits_G E\left(k\Delta x-x,l\Delta y-y,m\Delta z-z,(n-j)\Delta\tau)\right) g(x,y,z,j\Delta\tau)dxdydzd\Delta\tau-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{n\Delta\tau}\iiint E(k\Delta x-x,l\Delta y-y,m\Delta z-z,n\delta\tau-\omega)g(x,y,z,\omega)dxdydz\omega\right| =$$

$$= R_{21}+R_{22}+R_{23}.$$

Используя (8), получаем

$$R_{21}\leq\sum_{j=1}^{n}\sum_{k',l',m'}\left|\frac{P_{n-j}(k-k',l-l',m-m')}{\Delta x\Delta y\Delta z}-\right.$$

$$\left.-E((k-k')\Delta x,(l-l')\Delta y,(m-m')\Delta z,(n-j)\Delta\tau)\right||g_j(k',l',m')|\Delta x\Delta y\Delta z\leq$$

$$\leq\frac{D_q}{g}{}_0 m(G)\Delta x\Delta y\Delta z\sum_{j=1}(n-j)^{-\frac{5}{2q}}\Delta\tau\leq\frac{2q}{2q-5}D_q g_0 m(G)\alpha^{\frac{3}{2q}}\tau^{1-\frac{3}{2q}}n^{-\frac{1}{q}}.$$

Далее, с использованием (11),

$$R_{22}\leq\frac{\Delta\tau}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{n}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-j\Delta\tau\psi_q(s,t,u)\}\times$$

$$\times\left|\sum_{k',l',m'}\exp\{i(sk'\Delta x+tl'\Delta y+um'\Delta z)\}g_{n-j}(k',l',m')\Delta x\Delta y\Delta z-\right.$$

$$\left.-\iiint\limits_G\exp\{i(sx+ty+uz)\}g(x,y,z,(n-j)\Delta\tau)dxdydz\right|\Delta\tau\leq$$

$$\leq\frac{m(G)\Delta\tau\Delta x^2}{24\pi^3}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\exp\{-j\Delta\tau c(s^{2q}+t^{2q}+u^{2q})\}(g_0(t^2+s^2+u^2)+$$

$$+g_1 s+g_2 t+g_3 u+g_{11}+g_{22}+g_{33})dsdtdu=$$

$$=\frac{m(G)\Delta\tau\Delta x^2}{24\pi^3}\left(\int\limits_0^1+\int\limits_0^1\right)ds\left(\int\limits_0^1+\int\limits_0^1\right)dt\left(\int\limits_0^1+\int\limits_0^1\right)du\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\exp\{-j\Delta\tau c(s^{2q}+t^{2q}+u^{2q})\}\times$$

$$\times[g_0(s^2+t^2+u^2)+g_1s+g_2t+g_3u+g_{11}+g_{22}+g_{33}]du\leq$$

$$\leq\frac{m(G)c^3}{192\pi^3q^3}3g_0\left(1+\frac{1}{c(2q-2)}\right)\left(1+\frac{1}{c(2q-2)}\right)\left(1+\frac{1}{c(2q-1)}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{1}{c(2q-1)}\right)^2\left(1+\frac{1}{c(2q-2)}\right)(g_1g_2+g_3)+$$

$$+\left(1+\frac{1}{c(2q-3)}\right)^3(g_{11}+g_{22}+g_{33})\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}n^{-\frac{1}{q}}$$

(в интегралах от 0 до 1 переменные s,t и u увеличены до единиц, а сумма

$$\sum_{j=1}^{n}\exp\{-j\Delta\tau c(s^{2q}+t^{2q}+u^{2q})\} -$$

до $n\exp\{-\Delta c(s^2q+t^{2q}+u^{2q})\}$, а в интегралах от 1 до ∞ сумму заменяем величиной $(c\Delta\tau(s^{2q}+t^{2q}+u^{2q})^{-1})$. И, наконец,

$$R_{23}\leq\Bigg|(2\pi)^{-3}\sum_{j=1}^{n}\iiint\limits_{G}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-i(s(k\Delta x-x)+t(l\Delta y-y)+u(m\Delta z-z))-$$

$$-j\Delta\tau\psi_q(s,t,u)\}\,g(x,y,z,\tau-j\Delta\tau)dxdydzdsdtdu\Delta\tau-$$

$$-(2\pi)^{-3}\int\limits_0^{\tau}\iiint\limits_{G}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-i(s(k\Delta x-x)+t(l\Delta y-y)+u(m\Delta z-z))-$$

$$-\omega\psi_q(s,t,u)\}g(x,y,z,\tau-\omega)dxdydzdsdtdud\omega\Bigg|\leq$$

$$\leq\frac{\tau\Delta\tau}{8\pi^3}\max_{\omega}\Bigg|\frac{\partial}{\partial\omega}\iiint\limits_{G}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-i(s(k\Delta x-x)+t(l\Delta y-y)+u(m\Delta z-z))-$$

$$-\omega\psi_q(s,t,u)\}g(x,y,z,\tau-\omega)dxdydzdsdtdu\Bigg|.$$

Но последнее выражение под модулем есть

$$\iiint\limits_{G}\iiint\limits_{R_3}\exp\{-i(s(k\Delta x-x)+t(l\Delta y-y)+u(m\Delta z-z))-$$

$$-\omega\psi_q(s,t,u)\}\left(-\psi_q\left(i\frac{\partial}{\partial x},i\frac{\partial}{\partial y},i\frac{\partial}{\partial z}\right)g(x,y,z,\tau-\omega)-\frac{\partial g}{\partial\omega}\right)dxdydzdsdtdu,$$

в чем можно убедиться интегрированием по частям во внутреннем интеграле в первом из слагаемых, полученных после дифференцирования по ω. В итоге получаем оценку

$$R_{23}\leq\tau\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}m(G)\left(\sum_{k+l+m=q}|a_{klm}|g_{klm}+\Omega\right)n^{-\frac{1}{q}}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. *Постоянную F_q в (10) можно вычислить, проанализировав доказательство теоремы.*

Замечание 2. *Если в задаче Коши вида (2)–(3) положить $q = 2$, то разности R_{11}, R_{12}, R_{22}, R_{23} оцениваются аналогично проделанному, а для разности R_{21} получается такая оценка*

$$R_{21} \leq \frac{m(G)\Delta\tau}{\Delta x \Delta y \Delta z} \sum_{j=1}^{n} (n-j)^{-\frac{5}{4}} \leq 5m(G)\alpha^{\frac{3}{4}}\tau^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}}.$$

Замечание 3. *Если в уравнении (2) положить $g \equiv 0$, то рассмотренным методом можно решать задачу теплопроводности ($q = 1$).*

Замечание 4. *Существенным условием для рассматриваемых задач является положительная определенность формы. Для выяснения положительной определенности формы $\psi_q(s,t,u)$ можно использовать достаточные условия, полученные в [7] или вычислительный алгоритм описанный в [8] для случая двух переменных, но не зависящий, вообще говоря, от количества переменных в форме.*

2. Задача решения уравнения параболического типа в случае конечной области. Рассмотрим граничную задачу вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\psi_q \left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z} \right) v + \hat{g}\left(x, y, z, \tau\right), \tag{12}$$

$$(x,\, y,\, z) \in \left[0,\, L_1;\, 0,\, L_2;\, 0,\, L_3\right], \tau \geq 0$$

$$v\left(x,\, y,\, z,\, 0\right) = \hat{f}\left(x,\, y,\, z\right); \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} v}{\partial x^{2k} \partial y^{2l} \partial z^{2m}}\right|_{\Gamma} = 0, \qquad j = \overline{0,\, q-1}, \tag{14}$$

где Γ — граница области $D = [0,\, L_1;\, 0,\, L_2;\, 0,\, L_3]$.

Используем обобщенный принцип отражения, обобщающий принцип сведения решения задачи Коши к решению первой граничной задачи для уравнения теплопроводности и рассмотренный для одномерного случая, например, в [1]. Продолжим функции $\hat{g}(x,y,z,\tau)$ и $\hat{f}(x,y,z)$ нечетными по каждой из координат x, y и z и периодическими с периодами, соответственно, $2L_1, 2L_2$ и $2L_3$. Обозначим их через $g(x,y,z,\tau)$ и $f(x,y,z)$. Тогда решение задачи Коши

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\psi_q \left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z} \right) v + g\left(x, y, z, \tau\right), \tau \geq 0, (x,\, y,\, z) \in R_3; \tag{15}$$

$$v\left(x,\, y,\, z,\, 0\right) = f\left(x,\, y,\, z\right); \tag{16}$$

в области D пространства R_3 является решением и исходной задачи. Однако задача (12)–(13) отличается от рассмотренной в задачи Коши тем, что в последнем случае функции $g(x,y,z,r)$ и $f(x,y,z)$ не являются финитными. Поэтому вместо функций $g(x,y,z,r)$ и $f(x,y,z)$ возьмем функции, совпадающие с ними в кубе $G = [-A, A]^3$ и обращающиеся в нуль вне этого куба. Допускаемая при этом погрешность есть величина

$$R(A) = \iiint\limits_{R_3 \setminus G} E(x', y', z', \tau) f(x-x', y-y', z-z') dx'dy'dz' +$$

$$+\int_0^{\tau}\iiint_{R_3\backslash G} E(x',y',z',w)g(x-x',y-y',z-z',\tau-w)dx'dy'dz'dw. \tag{17}$$

Лемма. *Пусть в задаче* (12)–(14) *функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна в* $[0,\ L_1;\ 0,\ L_2;\ 0,\ L_3]$, *а* $g(x,y,z,w)$ *кусочно-непрерывна в* $[0,\ L_1;\ 0,\ L_2;\ 0,\ L_3]\times[0,\tau]$ *и в указанных областях* $|f(x,y,z)|\le f_0, |g(x,y,z,w)|\le g_0$. *Тогда*

$$|R(A)|\le M\tau^{\frac{5}{2q}}(g_0\tau+f_0)A^{-3}, \tag{18}$$

где M *— постоянная не зависящая от* A *и* τ.

Доказательство. Рассмотрим интеграл от параметров x,y,z

$$I(x,y,z)=\iiint_{R_3} exp{-}i(sx+ty+uz)-\tau\Psi_q(s,t,u)dsdtdu, (x,y,z)\in R_3\backslash G.$$

Применив двухкратное интегрирование по частям по каждой из переменных интегрирования, получим оценку

$$|I(x,y,z)|\le\frac{1}{x^2y^2z^2}\iiint_{R_3}\frac{\partial^6 exp\{-\tau\Psi_q(s,t,u)\}}{\partial s^2\partial t^2\partial u^2}dsdtdu\le\frac{M_1\tau^{\frac{5}{2q}}}{x^2y^2z^2},$$

где M_1 — постоянная, являющаяся многочленом от некоторых Г-интегралов Эйлера. Точное значение M_1 и аналогичных констант удобнее вычислять для каждой конкретной задачи отдельно. Интегрированием по частям можно получить следующие оценки

$$|I(x,y,z)|\le\frac{M_2\tau^{\frac{5}{2q}}}{x^3y^3}, |I(x,y,z)|\le\frac{M_3\tau^{\frac{5}{2q}}}{x^6}.$$

Используя полученные оценки, для первого слагаемого в правой части (17) получим

$$\left|\iiint_{R_3\backslash G} E(x',y',z',\tau)f(x-x',y-y',z-z')dx'dy'dz'\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R_3\backslash G}\left|\iiint_{R_3} exp\{-i(sx'+ty'+uz')-\tau\Psi_q(s,t,u)\}dsdtdu\right|\times$$

$$\times|f(x-x',y-y',z-z')|\,dx'dy'dz'\le\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R_3\backslash G}|I(x,y,z)|\,f_0dxdydz\ \le$$

$$\le\frac{\tau^{\frac{5}{2q}}f_0}{\pi^3}\left(\int_A^{\infty}\int_A^{\infty}\int_A^{\infty}\frac{M_1dxdydz}{x^2y^2z^2}\right)+3\int_A^{\infty}\int_A^{\infty}\int_0^{A}\frac{M_2dxdydz}{x^3y^3}+$$

$$+3\int_A^{\infty}\int_0^{A}\int_0^{A}\frac{M_3dxdydz}{x^6}=f_0\pi^{-3}\tau^{\frac{5}{2q}}\left(M_1+3\cdot4\cdot M_2+3\cdot5M_3\right)A^{-3}=f_0\pi^{-3}\tau^{\frac{5}{2q}}MA^{-3}.$$

Оценим второе слагаемое в (17)

$$\left|\int\limits_0^\tau \iiint\limits_{R_3\backslash G} E(x',y',z',w)g(x-x',y-y',z-z',\tau-w)dx'dy'dz'dw\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\tau \frac{Mg_0 w^{\frac{5}{2q}}}{\pi^3 A^3}dw < \frac{M\tau g_0}{\pi^3}\tau^{\frac{5}{2q}} \cdot A^{-3}.$$

Лемма доказана.

Из теоремы 2 и леммы вытекает

Теорема 3. *Пусть в задаче* (12)–(14)

1) *функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна в области* D *вместе с частными производными до второго порядка и в этой области*

$$|f| \leq f_0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq f_1,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq f_2,\ \left|\frac{\partial_2 f}{\partial z}\right| \leq f_3,\ \left|\frac{\partial_2 f}{\partial x_2}\right| \leq f_{11},\ \left|\frac{\partial_2 f}{\partial y_2}\right| \leq f_{22},\ \left|\frac{\partial_2 f}{\partial z_2}\right| \leq f_{33};$$

2) *функция* $g(x,y,z,\omega)$ *кусочно-непрерывна вместе с частными производными до* $2q$*-го порядка по координатам* x,y *и* z*,а также с* $\frac{\partial g}{\partial w}$ *в области* $D\times[0;\tau]$ *и в этой области выполняется*

$$|g| \leq f_0,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leq g_1,\ \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq g_2,\ \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \leq g_3,$$

$$\left|\frac{\partial_2 g}{\partial x^2}\right| \leq g_{11},\ \left|\frac{\partial_2 g}{\partial y^2}\right| \leq f_{22},\ \left|\frac{\partial_2 g}{\partial z^2}\right| \leq f_{33},\ \left|\frac{\partial^{2q} g}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}}\right| \leq g_{klm},\ \left|\frac{\partial g}{\partial w}\right| \leq \Omega;$$

3) *управление* α *в разностном аналоге соответствующей задачи Коши удовлетворяет неравенству* (15).

Тогда, равномерно по (k,l,m)*, выполняется*

$$|v_\Delta(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau) - v(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta\tau)| \leq$$

$$\leq F_q n^{-\frac{1}{q}} + \frac{M\tau^{\frac{5}{2q}}}{\pi^3}(f_0+\tau g_0)A^{-3}. \tag{19}$$

Замечание 5. *Задачу решения уравнения* (12) *с начальным условием* (13) *и граничными усломиями вида*

$$\left.\frac{\partial^{2j+1}v}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2l+1}\partial z^{2m+1}}\right|_\Gamma = 0, \qquad j=\overline{0,\ q-1};$$

также можно свести к решению задачи Коши типа (12)–(13); *в этом случае функции* $\hat{f}(x,y,z)$ *и* $\hat{g}(x,y,z,\tau)$ *следует продолжить четными и периодическими по переменным* x,y *и* z.

3. Разностное решение граничных задач для уравнений эллиптического типа. Рассмотрим задачу Рикье вида

$$\psi_q\left(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right)v = g\left(x,y,z,\right), (x,\ y,\ z)\in D; \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} v}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}}\right|_{\Gamma}=0,\ j=\overline{0,q-1}, \tag{21}$$

где Γ — граница области $D=[0,L_1;\ 0,L_2;\ 0,L_3]$, $q=3,4,5,....$ Сопоставим ей граничную задачу вида

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=-\psi_q\left(i\frac{\partial}{\partial x},\,i\frac{\partial}{\partial y},\,i\frac{\partial}{\partial z}\right)V+g\left(x,y,z\right),\ (x,y,z)\in D,\tau\geq 0; \tag{22}$$

$$V(x,y,z,0)=0; \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial^{2j} V}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}}\right|_{\Gamma}=0,\ j=\overline{0,q-1}. \tag{24}$$

Каждую из этих задач можно решить методом разделения переменных. Тогда

$$v(x,y,z)=(-1)^q\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{g}_{klm}}{\psi_q\left(\frac{k\pi}{L_1},\frac{l\pi}{L_2},\frac{m\pi}{L_3}\right)}sin\frac{k\pi x}{L_1}sin\frac{l\pi y}{L_2}sin\frac{m\pi z}{L_3}$$

и

$$V(x,y,z,\tau)=$$

$$=(-1)^{q+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{g}_{klm}\left(exp\{-\tau\psi_q\left(\frac{k\pi}{L_1},\frac{l\pi}{L_2},\frac{m\pi}{L_3}\right)\}-1\right)}{\psi_q\left(\frac{k\pi}{L_1},\frac{l\pi}{L_2},\frac{m\pi}{L_3}\right)}sin\frac{k\pi x}{L_1}sin\frac{l\pi x}{L_2}sin\frac{m\pi x}{L_3},$$

где

$$\overline{g}_{klm}=\frac{8}{L_1L_2L_3}\int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2}\int\limits_0^{L_3}g(x,y,z)sin\frac{k\pi x}{L_1}sin\frac{l\pi y}{L_2}sin\frac{m\pi z}{L_3}dxdydz. \tag{25}$$

Оценим разность

$$R_\tau=|v(x,y,z)-V(x,y,z,\tau)|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{g}_{klm}exp\{-\tau\psi_q\left(\frac{k\pi}{L_1},\frac{l\pi}{L_2},\frac{m\pi}{L_3}\right)\}sin\frac{k\pi x}{L_1}sin\frac{l\pi y}{L_2}sin\frac{m\pi z}{L_3}\right|.$$

Пусть $L=max\{L_1L_2L_3\}$. Используем неравенство

$$\psi_q\left(\frac{k\pi}{L_1},\frac{l\pi}{L_2},\frac{m\pi}{L_3}\right)\geq c\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}\left(k^{2q}+l^{2q}+m^{2q}\right)\geq 3c\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}.$$

Из (25) получим, что $|\overline{g}_{klm}|\leq 8g_0$. Тогда

$$R_\tau\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8g_0exp\{-\tau 3c\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}\}}{c\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}\left(k^{2q}+l^{2q}+m^{2q}\right)}\leq$$

$$\leq exp\{-\tau 3c\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}\}\frac{8g_0}{c}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2q}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^4+l^4+m^4}. \tag{26}$$

Сумму в правой части (26) можно ограничить сверху величиной

$$\frac{\pi}{3}+\iiint\limits_{R_3^+\backslash S_3^+}\frac{dxdydz}{x^4+y^4+z^4},$$

где R_3^+ — первый октант пространства, а S_1^+ — часть шара единичного радиуса с центром в начале координат, содержащаяся в первом октанте. Переходя к сферическим координатам и используя неравенство $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$, получаем

$$\iiint\limits_{R_3^+\setminus S_1^+} \frac{dxdydz}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом

$$R_\tau < \gamma exp\{-\beta\tau\}, \tag{27}$$

где

$$\gamma = \frac{8g_0}{c}\left(\frac{L}{\pi}^{2q}\right), \quad \beta = 3c\left(\frac{\pi}{L}^{2q}\right).$$

Оценка (28) является частной в задаче о стабилизации решения уравнения параболического типа при $\tau \to \infty$. В [10], например, описан подход к нахождению стационарных решений эволюционных задач.

Подведем итог. Выбрав достаточно большой момент времени T, с учетом оценки (28), решение задачи (22)–(24) достаточно мало отличается от решения задачи (20)–(21). Разностное решение задачи (20)–(21) можно также искать в виде элемента свертки.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (20) *функция* $g(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна в области* D *вместе с частными производными до* $2q$*-го порядка и в этой области*

$$|g| \leq g_0, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leq g_1, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leq g_2, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \leq g_3,$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right| \leq g_{11}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right| \leq g_{22}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| \leq g_{33}, \quad \left|\frac{\partial^{2q} g}{\partial x^{2k}\partial y^{2l}\partial z^{2m}}\right| \leq g_{klm};$$

и пусть при построении разностного аналога соответствующей задачи Коши (22)–(24) *управление* α *между шагами удовлетворяет неравенству* (23). *Тогда, равномерно по* (k,l,m)

$$\left|v(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z) - \Delta\tau\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k',l',m'} P_{n-j}(k-k', l-l', m-m')g(k',l',m') + g(k,l,m)\right)\right| \leq$$

$$\leq \gamma exp\{-\beta T\} + \frac{MT^{1+\frac{5}{2q}}g_0}{\pi^3}A^{-3} + \Phi_q n^{\frac{-1}{q}}, \tag{28}$$

где

$$\Phi_q = 8A^3\left(\frac{2q}{2q+s}D_q g_0 T\left(\frac{\alpha}{T}\right)^{\frac{3}{2q}} + \frac{(c(2q-3)+1)^3}{(2q-3)^3\pi^3 q^3}\left(3g_0+g_1+g_2+g_3+g_{11}+g_{22}+g_{33}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{T}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} + T\left(\frac{T}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\sum_{k+l+m=q}|a_{klm}|\,g_{klm}\right);$$

$$\Delta\tau = \frac{T}{n}, \quad g(k,l,m) = g(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z).$$

Заметим, что можно применить данный подход к разностному решению уравнения (20) с граничными условиями, описанными в замечании 5.

1. *Петенько В. А.* Об одном обобщении локальной предельной теоремы для решетчатых вероятностных распределений в пространстве. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 1205Ук–85 Деп. – С. 1–16.
2. *Лялина Д. И., Студнев Ю. П.* Некоторые обобщения предельних теорем теории вероятностей для решетчастых распределений // В сб.: П научн. конф. мол. матем. Украины. – К.: 1966. – С. 592–595.
3. *Петенько В. А., Студнев Ю. П.* Об одном аналоге двухмерной локальной предельной теоремы // Укр. мат. журн. – 1977. – С. 541–549.
4. *Петенько В. А.* Об одном разностном решении задачи Коши для некоторого класса параболических по Г. Е. Шилову систем // Межвед. респ. журн. Матем. методы и физ.-мех. поля. – К.: Наук. думка. – 1979. – Вып. 9. – С. 20–25.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Т. I. – 498 с.
6. *Ильин В. Н., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1971. – Ч. I. – 386 с.
7. *Клюйник И. Ф.* Об одном критерии знакоопределенности форм четного порядка и его применении // Межвед. респ. журн. Матем. физика. – К.: Наук. думка. – 1974. – С. 103–112.
8. *Добош В. И., Студнев Ю. П.* Рандомизация теории положительной определенности форм четного порядка // Докл. АН УССР, сер. А. – 1976. – № 10. – С. 873–876.
9. *Рихтмайер Д.* Принципы современной математической физики. – М.: Мир, 1982. – 486 с.
10. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 322 с.

Одержано 06.10.2005