УДК 512.86

В. П. Рудько, Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО СИЛОВСЬКІ ПІДГРУПИ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД КІЛЬЦЕМ

Let R be a ring of integers of the finite extention of p-adic field and R containes primitive p^n-th root of unity (p is a prime). In this paper we obtaine next rezultes: 1) if $p > 2$ and $n = 1$, then $GL(p, R)$ containes at least $(p-2)$ irredusible Sylow p-subgroups of pairwise different orders; 2) if $p > 2$ and $n > 1$, then there are exists Abelian Sylow subgroups of types (p^n, p^2), $\ldots$, (p^n, p^n) of the group $GL(p, R)$; 3) if $p = 2$ and $n > 2$, then there is exist Abelian Sylow 2-subgroup of type $(2^n, 2^n)$ of the group $GL(2^{n-1}, R)$.

Нехай кільце R цілих величин скінченного розширення поля p-адичних чисел містить первісний корінь степеня p^n з одиниці. Показується, що: 1) якщо $p > 2$ і $n = 1$, то в групі $GL(p, R)$ міститься по крайній мірі $(p-2)$ незвідних силовських p-підгруп попарно різних порядків; 2) якщо $p > 2$ і $n > 1$, то в группі $GL(p, R)$ існують абелеві силовські підгрупи типів (p^n, p^2), $\ldots$, (p^n, p^n); 3) якщо $p = 2$ і $n > 2$, то в групі $GL(2^{n-1}, R)$ існує абелева силовська 2-підгрупа типу $(2^n, 2^n)$.

Силовські p-підгрупи повної лінійної групи $GL(n, T)$ над довільним полем T описані з точністю до спряженості в роботах [1–5]. Як правило, силовські p-підгрупи групи $GL(n, T)$ попарно спряжені в цій групі. Виключення складає тільки випадок $p = 2$ для деяких полів характеристики нуль. Нехай K — комутативне кільце з одиницею, в якому просте число p буде необоротним. Теорія силовських p-підгруп групи $GL(n, K)$ далека до завершення. Як правило силовські p-підгрупи в групі $GL(n, K)$ не спряжені в цій групі, більш того, можливі випадки існування неізоморфних таких підгруп. В роботах [6–17] вивчались силовські p-підгрупи групи $GL(n, K)$. Зокрема, в [6–9, 12–13, 15–17] розв'язується задача про спряженість силовських p-підгруп групи $GL(n, K)$, де K — одне із кілець: дискретно нормоване кільце, область головних ідеалів, нетерово факторіальне кільце характеристики p, нетерова область цілісності характеристики p, комутативне локальне кільце характеристики p^s. В роботах [10–11, 14] вивчалась задача про ізоморфізм силовських p-підгруп групи $GL(n, K)$ (K – область головних ідеалів).

Автори виражають подяку професору Гудивку П. М. за інтерес і корисні зауваження до цієї роботи.

Нехай кільце R цілих величин скінченного розширення F поля p-адичних чисел містить первісний корінь ξ_n степеня p^n із одиниці і t — простий елемент в R такий, що

$$\xi_n - 1 = t^d\theta,\ \theta \in R^*,$$

R^* — мультиплікативна група кільця R. Нехай силовська p-підгрупа P групи R^* має порядок p^n, тобто $P = \langle \xi_n \rangle$. Нехай p-підгрупа $G_n(p)$ групи $GL(p, F)$ є сплетіння $P \int C_p$ групи P і циклічної порядку p групи C_p підстановок, породженої циклом $(12...p)$. Група $G_n(p)$ породжується діагональною матрицею і матрицею b підстановки $(12...p)$:

$$G_n(p) = \langle a = diag[\xi_n, 1, \ldots, 1], b \rangle \subset GL(p, R). \tag{1}$$

Група $G_n(p)$ — незвідна підгрупа в групі $GL(p, R)$ і її порядок рівний p^{np+1}. Відмітимо, що при $p > 2$ або при $p = 2$ і $n > 1$ силовські p-підгрупи групи $GL(p, F)$ спряжені в цій групі з підгрупою $G_n(p)$.

Групове кільце $L = RC_p$ перетворимо в $RG_n(p)$-модуль, в R-базисі

$$1, b, \ldots, b^{p-1} \tag{2}$$

якого матриці операторів a і b співпадають з матрицями a і b відповідно (див. (1)). Більше того, група $G_n(p)$ містить діагональні елементи виду

$$u = diag[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}] \qquad (\alpha_j \in \langle \xi_n \rangle),$$

і, якщо $v = \sum_0^{p-1} \gamma_j b^j$ $(\gamma_j \in R)$ — довільний елемент із L, то

$$u(v) = \sum_0^{p-1} \alpha_j \gamma_j b^j. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай $p > 2$ і $n = 1$. В групі $GL(p, R)$ існує принаймі $(p-2)$ незвідні силовські p-підгрупи попарно різних порядків.*

Теорема 2. *Нехай $p > 2$ і $n > 1$. В групі $GL(p, R)$ існують силовські p-підгрупи, які є абелевими групами типів (p^n, p^2), ..., (p^n, p^n) відповідно.*

Теорема 3. *Нехай $p = 2$ і $n > 2$. В групі $GL(2^{n-1}, R)$ існує силовська 2-підгрупа, що є абелевою групою типу $(2^n, 2^n)$.*

Зауваження 1. *В групі $GL(2^{n-1}, R)$ існує незвідна неабелева силовська 2-підгрупа порядку 2^s, де $s = 2^{n-1}(n+1) - 1$.*

Нехай далі $p > 2$ і $n = 1$. Для доведення теореми 1 введемо позначення

$$G = G_1(p), \quad \varepsilon = \xi_1, \quad \pi = \varepsilon - 1, \quad c = b - 1, \tag{4}$$

$$L_j = \langle \pi^2, \pi c, \ldots, \pi c^{j-1}, c^j, \ldots, c^{p-1} \rangle \quad (2 \leqslant j \leqslant p-1) \tag{5}$$

R-підмодуль в L, R-базис якого вказано в дужках.

Введемо в розгляд деякі підгрупи в групі G. Нехай

$$\begin{gathered} a_0 = \varepsilon E, \quad a_j = diag\,[\varepsilon^{\alpha_0}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_{p-1}}], \\ \alpha_0 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0, \ \alpha_j = C_j^j, \ldots, \alpha_{p-1} = C_{p-1}^j; \\ G_j = \langle a_0, a_j, b \rangle \quad (j = 1, \ldots, p-1). \end{gathered} \tag{6}$$

Ці підгрупи утворюють нормальний ряд

$$\langle a_0 \rangle = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{p-1} = G, \tag{7}$$

порядки факторів якого рівні p.

Лема 1. $b^{-1} a_1 b = a_1 a_0, \quad b^{-1} a_j b = a_j a_{j-1} \quad (1 < j \leqslant p-1)$.

Лема 2. *Нехай підгрупа H групи G власне містить підгрупу G_j. Тоді H містить G_{j+1}. Зокрема, якщо $(H : G_j) = p$, то $H = G_{j+1}$.*

Доведення. Група H містить елемент u з властивостями:
1) u не міститься в G_j;
2) $u = v a_s$, де v — добуток деяких степенів елементів $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$;
3) s — найменший номер.

Із леми 1 випливає, що

$$u^{-1} b^{-1} u b = v^{-1} a_s^{-1} b^{-1} v a_s b = u' a_{s-1},$$

де u' — добуток степенів елементів $a_0, a_1, \ldots, a_{s-2}$. Тоді із умов 1) і 3) випливає, що $s - 1 \leqslant j$, тобто $s = j + 1$ і група H містить a_{j+1}. Тоді $H \supseteq G_{j+1}$. Лема доведена.

Лема 3. *Нехай $2 \le j \le p-1$. Тоді R-модуль L_j буде RG_{j-1}-модулем і не буде RG_j-модулем.*

Доведення. Відомо, що
$$\pi^{p-1} = p\theta,\ \theta \in R^*. \tag{8}$$
Неважко перевірити, що
$$c^p = pcv, \tag{9}$$
де v – деякий елемент групового кільця L. З (9) і (8) слідує, що $cL_j \subseteq L_j$. Далі досить показати, що $(a_{j-1}-1)L_j \subseteq L_j$, але $(a_j-1)L_j$ не міститься в L_j . Перш за все відмітимо, що
$$\pi^2 L \subset L_j, \quad \pi c L \subset L_j.$$
Із (3) випливає, що в модулі L для оператора $a_{j-1}-1$ буде виконуватись
$$(a_{j-1}-1)(b^i) = \begin{cases} 0, & (i \leqslant j-2); \\ (\varepsilon^\alpha - 1)b^i, \quad \alpha = C_i^{j-1} & (j-1 \leqslant i \leqslant p-1). \end{cases} \tag{10}$$
Отже, якщо $i \leqslant j-2$, то
$$(a_{j-1}-1)(c^i) = 0.$$
Нехай $i = j-1$. Тоді
$$(a_{j-1}-1)(\pi c^{j-1}) = \pi^2 b^{j-1} \in L_j.$$
Нехай $i > j-1$. Тоді, використавши (10), одержимо
$$(a_{j-1}-1)(c^i) = (a_{j-1}-1)(\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k b^k = \sum_{k=j-1}^{i}(-1)^k(\varepsilon^{C_k^{j-1}}-1)b^k \equiv$$
$$\equiv \pi \sum_{k=j-1}^{i}(-1)^k C_i^k C_k^{j-1}\ (\mathrm{mod}\,(\pi^2 L + \pi\, c\, L)),$$
де використано властивість
$$\varepsilon^k - 1 \equiv \pi k (\mathrm{mod}\, \pi^2 R).$$
Але
$$\sum_{k=j-1}^{i}(-1)^k C_i^k C_k^{j-1} = \tfrac{i\,!}{(j-1)\,!}\sum_{k=j-1}^{i}(-1)^k \tfrac{1}{(i-k)\,!\,(k-j+1)\,!} =$$
$$= \tfrac{i\,!}{(j-1)\,!\,(i-j+1)\,!}\sum_{t=0}^{i-j+1}(-1)^t C_{i-j+1}^t = 0.$$
Тоді $(a_{j-1}-1)(c^i) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(\pi^2 L + \pi c L)$, а так як $pi^2 L + \pi c L \subset L_j$, то
$$(a_{j-1}-1)(c^i) \in L_j \quad (i > j-1).$$
Ми показали, що $(a_{j-1}-1)L_j \subset L_j$, тобто L_j буде модулем над кільцем RG_{j-1}. Неважко бачити, що
$$(a_j - 1)(c^j) = \pi b^j \equiv \pi (\mathrm{mod}\, \pi^2 L),$$
а так як $\pi \notin L_j$, то
$$(a_j-1)(c^j) \notin L_j,$$
і, отже, L_j не буде модулем над кільцем RG_j. Лема доведена.

Для кожного модуля L_j введемо в розгляд матрицю T_j переходу від R-базиса (2) в L до R-базиса (5) в L_j ($j = 2, \dots, p-1$). Окрім цього, нехай $L_p = L$ і $T_p = E$. Нехай далі

$$V_{j-1} = T_j^{-1} G_{j-1} T_j \quad (j = 2, \dots, p). \tag{11}$$

Наслідок 1. *Група* V_j $(j = 1, \dots, p-1)$ *буде підгрупою групи* $GL(p, R)$. *Група* $T_j^{-1} G_j T_j$ $(j = 2, \dots, p-1)$ *не міститься в групі* $GL(p, R)$.

Доведення витікає із леми 3.

Лема 4. *Нехай* $Z^j(H)$ — j*-ий член верхнього центрального ряду групи* H. *Тоді*

$$Z^1(G_j) = \langle a_0 \rangle, \quad Z^2(G_1) = G_1, \quad Z^2(G_2) = \ldots = Z^2(G_{p-1}) = \langle a_0, a_1 \rangle.$$

Доведення витікає з означення груп $Z^j(H)$ та леми 1.

Твердження 1. *Групи* $V_2, \ \dots, \ V_{p-1}$ *(див. (11)) є силовські* p*-підгрупи групи* $GL(p, R)$.

Доведення. Група V_{p-1} є силовською p-підгрупою групи $GL(p, F)$. Нехай далі $p > 3$ і $V = T^{-1} H T$, де $H = G_{j-1}$, $T = T_j$, $(3 \leqslant j \leqslant p-1)$. Припустимо, що V не буде силовською p-підгрупою в групі $GL(p, R)$ і нехай X — така матриця з групи $GL(p, R)$, що

$$X^p \in V, \quad V = X^{-1} V X = X^{-1} T^{-1} H T X = T^{-1} H T, \quad (\langle V, X \rangle : V) = p.$$

Нехай $S = T X T^{-1}$. Тоді $S^{-1} H S = H$ і, крім того, $\langle H, S \rangle$ — p-група. Так як члени центрального ряду групи є характеристичними підгрупами, то

$$S^{-1} Z^2(H) S = Z^2(H) = \langle a_0, a_1 \rangle$$

(див. лему 4). Тоді, в силу того, що a_1 – елемент порядку p і S — p-елемент, то

$$S^{-1} a_1 S = a_1 \, a_0^t.$$

Добуток матриці S на деяку степінь елемента b буде комутувати з матрицею a_1. Можна вважати, що уже матриця S комутує з a_1. Так як всі діагональні елементи матриці a_1 попарно різні, то S — діагональна матриця, діагональні елементи якої належать групі $P = \langle \varepsilon \rangle$, тобто $S \in G$. Із леми 2 слідує, що $\langle H, S \rangle = G_j$ і можна вважати, що $S = a_j$. Тоді $T_j^{-1} a_j T_j \in GL(p, R)$, що суперечить лемі 3. Твердження 1 і теорема 1 доведені.

Нехай

$$u = \alpha (1 + \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon^{-C_{j+1}^2} b^j), \quad \alpha \, (1 + \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon^{-C_{j+1}^2})^{-1}.$$

Неважко перевірити, що

$$u^{-1} b u = b, \quad u^{-1} a_1 u = b \, a_1, \quad u^p = 1.$$

Нехай $U = \langle G_1, u \rangle$. Тоді U — p-підгрупа в групі $GL(p, F)$ але U не міститься в групі $GL(p, R)$. Неважко показати, що $T_2^{-1} U T_2 \subset GL(p, R)$, тобто група $T_2^{-1} G_1 T_2$ не буде силовською p-підгрупою в групі $GL(p, R)$.

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел. Всі матричні елементи груп V_j належать кільцю $\mathbb{Z}[\varepsilon]$. Неважко бачити, що твердження 1 залишається в силі, якщо кільце R замінити на $\mathbb{Z}[\varepsilon]$. Нехай $\rho : Q(\varepsilon) \to M(p-1, \mathbb{Q})$ — такий гомоморфізм поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ в кільце матриць порядку $p-1$ над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$, що $\rho(\varepsilon)$ є супровідною матрицею полінома $\Phi_p(x)$ поділу круга на p частин. Для матричної групи H над полем $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ позначимо через $\rho(H)$ матричну групу над полем $\mathbb{Q}$, що одержується заміною всіх матричних елементів $\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ на матриці $\rho(\alpha)$.

Твердження 2. *Нехай $p > 2$. Група $GL(p^{t+1}(p-1), \mathbb{Z})$ $(t \geqslant 0)$ містить $(p-2)$ незвідні силовські p-підгрупи порядків p^{s_j}, де*

$$s_j = (j+2)\,p^t + \frac{p^t - 1}{p-1} \quad (j = 2, \ldots, p-1).$$

Доведення. Нехай $R = \mathbb{Z}[\varepsilon]$. Якщо H — незвідна силовська p-підгрупа в групі $GL(p, R)$, то сплетіння

$$W(H) = H \int C_p$$

є незвідною силовською p-підгрупою групи $GL(pm, R)$ (див. [14]). Нехай $V = V_j$ $(2 \leqslant j \leqslant (p-2))$, $W_0(V) = V, \ldots, W_k(V) = W(W_{k-1}(V))$. Тоді $\rho(W_t(V))$ буде незвідною силовською p-підгрупою порядку p^{s_j} в групі $GL(p^{t+1}(p-1), Z)$. Твердження доведено.

Доведемо теорему 2. Нехай $p > 2$, $n > 1$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $\xi = \xi_k$ — первісний корінь степеня p^k із одиниці, $\eta = \xi_n$, $\varepsilon = \xi_1$,

$$B_k = \begin{pmatrix} \xi_k & 1 & & & \\ & \varepsilon^{p-2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad H_k = \langle \eta\, E,\ B_k \rangle \tag{12}$$

(E — одинична матриця). Тоді H_k — абелева типу (p^n, p^k) підгрупа групи $GL(p, R)$.

Твердження 3. *Групи H_k $(k = 2, \ldots, n)$ є силовські p-підгрупи групи $GL(p, R)$.*

Теорема 2 є наслідком твердження 3.

Доведення твердження 3 засновано на декількох лемах.

Лема 5. *Нехай матриця $C \in GL(p, R)$ буде p-елементом і нормалізує групу H_k: $C^{-1} H_k C = H_k$. Тоді матриця C переставновочна з кожним елементом групи H_k.*

Доведення. Нехай $A = \eta E, B = B_k$ (див. (12)) і $C^{-1}BC = A^\alpha B^\beta = D$. Так як C — p-елемент, то $\beta \equiv 1 (mod p)$. Нехай $S(X)$ — множина власних значень матриці X. Тоді

$$S(B) = \{\xi, \varepsilon^{p-2}, \ldots, \varepsilon, 1\},$$

$$S(D) = \eta^\alpha \{\xi^\beta, \varepsilon^{p-2}, \ldots, \varepsilon, 1\} \quad i\ S(D) = S(B).$$

Остання рівність неможлива, якщо $\eta^\alpha \notin \langle \varepsilon \rangle$. Отже, $\eta^\alpha = \varepsilon^t$. Тоді $det D = \xi^\beta \varepsilon^u$, де $u = pt + 1 + 2 + \ldots + (p-2)$. Отже, $det D = \xi^\beta \varepsilon^{-1}$. Але $det B = \xi \varepsilon^{-1}$. Тоді $\xi^\beta = \xi$ і, отже $\beta = 1$. В цьому випадку, $\eta^\alpha \xi = \xi$, тобто $\alpha = 0$. Отже, $C^{-1}BC = B$. Лема доведена.

Введемо в розгляд матриці

$$U_0 = 1,\ U_s = \begin{pmatrix} \varepsilon^s & 1 & & & \\ & \varepsilon^{s-1} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \varepsilon & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \ (s = 1, \ldots, p-2).$$

Очевидно $U_s^p = E$.

Для довільної матриці X через X' будемо позначати матрицю, яка одержується з X відкиданням 1-го рядка та 1-го стовпця.

Лема 6. *Нехай матриця $C \in GL(s+1,R)$ є p-елементом і комутує з матрицею U_s. Тоді $C \in \langle \eta E, U_s \rangle$.*

Доведення. Доведемо індукцією по s. При $s = 1$ лема легко перевіряється. Зауважимо, що в доведенні матрицю C можна замінити на добуток цієї матриці на будь-який елемент групи $\langle \eta E, U_s \rangle$, окрім того матриця C має верхній трикутний вид.

Використавши ці зауваження, індуктивне припущення та властивість матриці C' (C' комутує з U_{s-1}), зведемо доведення до випадку, коли

$$C = \begin{pmatrix} \eta^\alpha & X \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad X = x_1, \ldots, x_s \ (x_j \in R).$$

Тоді $X(\varepsilon^s E - U_{s-1}) = (\eta^\alpha - 1, 0, \ldots, 0)$. Ця рівність є системою лінійних рівнянь від невідомих $x_1, \ldots,$ x_s , яка має розв'язок над кільцем R. Детермінант цієї системи містить множник $(\varepsilon - 1)^s$ буде ділити $\eta^\alpha - 1$. Так як $s > 1$ і $\varepsilon - 1 \in (\eta - 1)^{p^{n-1}} R$, то $\eta^\alpha = 1$, тобто матриця C є одиничною. Лема доведена.

Доведення твердження 3. Припустимо, що група H_k не буде силовською p-підгрупою в $GL(p,R)$. Тоді знайдеться матриця $C \in GL(p,R)$ така, що $C^p \in H_k$ і $C^{-1} H_k C = H_k$. Із леми 5 слідує, що матриця C комутує з B_k. Тоді C має верхньотрикутний вид і діагональні елементи в C є деякими степенями елемента η. Легко бачити, що матриця $(B_k)' = U_{p-2}$ комутує з C'. Згідно леми 6, матриця C' належить групі $\langle \eta E, U_{p-2} \rangle$. Це значить існування такого елемента T групи G_k, що $(CT)'$ буде одиничною матрицею. Отже, можна вважати, що матриця C має такий вид, як вказано в лемі 6 (з $s = p-1$). Для невідомих x_j $(j = 1, \ldots, p-1)$ одержиться система лінійних рівнянь детермінанта

$$d = \prod_{j=0}^{p-2} (\xi - \varepsilon^j) = (\xi - 1)^{p-1} \theta, \quad \xi = \xi_k, \quad \theta \in R.$$

Для того, щоб ця система мала розв'язок над кільцем R необхідно, щоб d ділив елемент $\eta^\beta - 1$. Це буде лише у випадку, коли $\eta^\beta = \xi^{pt}$ і тоді $C = B_k^{pt}$, тобто $C \in G_k$. Твердження 3 і теорема 2 доведені.

Доведемо теорему 3. Нехай $p = 2$, $n > 1$, $\eta = \xi_n$, d_n — діагональна матриця порядку 2^{n-1}, діагональними елементами якої є всі первісні корені степеня 2^n із одиниці ($d_1 = -1$, $d_2 = diag[i, -i]$, $(i^2 = -1)$ і т.д.).

Нехай

$$b = diag[\eta, d_{n-1}, \ldots, d_2, d_1] + J_t(0)$$

($J_t(0)$ — жорданова клітка порядку t з нулем по діагоналі) — елемент порядку 2^n в групі $GL(2^{n-1}, R)$.

Твердження 4. *При $n > 2$ абелева типу $(2^n, 2^n)$ група $H = \langle a = \eta E, b \rangle$ (E — одинична матриця) буде силовською 2-підгрупою групи $GL(2^{n-1}, R)$.*

Доведення опирається на декілька лем.

Лема 7. *Нехай $n > 2$ і група H є нормальною індекса 2 підгрупою в деякій 2-підгрупі $H_1 = \langle H, c \rangle$ групи $GL(2^{n-1}, R)$. Тоді $H_1 = \langle H, c_1 \,|\, c_1^2 = E \rangle$ і H_1 — абелева група.*

Контрприклад.

$$H = \left\langle a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, c^2 = E, \ c^{-1}bc = a^{-1}b^{-1}.$$

Доведення леми 7. Нехай $c^{-1}bc = a^{\alpha}b^{\beta}$, де β — непарне. Якщо α також непарне, то в силу обмеження $2^{n-1} \geqslant 4$, матриця $a^{\alpha}b^{\beta}$ буде мати принаймі 3 власних значення, що будуть первісними коренями степеня 2^n із одиниці, в той час матриця b має лише одне власне значення такого роду (це η). Отже матриці b і $a^{\alpha}b^{\beta}$ не можуть бути подібними і, таким чином, ми довели, що α — парне число. Неважко бачити, що

$$det\, a = \eta^{2^{n-1}} = -1, \quad det\, b = -\eta.$$

Тоді $-\eta = (-1)^{\alpha}(-\eta)^{\beta} = (-\eta)^{\beta}$, звідки слідує, що $\beta = 1$. Далі, легко бачити, що $trb = \eta - 1$. Тоді $\eta - 1 = tra^{\alpha}b = \eta^{\alpha}(\eta - 1)$, звідки слідує, що $\alpha = 0$. Отже елемент c комутує з кожним елементом групи H. Звідси слідує, що C є верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої будуть коренями степеня 2^n із одиниці. Нехай $c^2 = a^{\delta}b^{\gamma}$. Тоді α і β є обов'язково парні. Нехай $c_1 = ca^x b^y$. Тоді $c_1^2 = a^{\delta+2x}b^{\gamma+2y}$ і можна підібрати x та y так, щоб $c_1^2 = E$. Очевидно $H_1 = \langle H, c_1 \rangle$. Лема доведена.

Нехай ξ — первісний корінь степеня 2^k із одиниці. Введемо в розгляд наступні матриці

$$B_{k,0} = diag[d_{k-1}, \ldots, d_1] + J(0),$$
$$B_{k,s} = diag[\xi^{\alpha_1}, \ldots, \xi^{\alpha_s}, d_{k-1}, \ldots, d_1] + J(0)$$

($\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — цілі непарні числа, попарно різні по модулю 2^k, $s = 1, \ldots, 2^{k-1}$; $k = 2, \ldots, n$). Кожна з цих матриць є сумою діагональної матриці і відповідних розмірів клітки Жордана з нулями по діагоналі. Відмітимо, що порядок матриці $B_{k,s}$ рівний $2^{k-1} + s - 1$ ($s \geqslant 0$). Окрім цього, $B_{k,2^{k-1}} = B_{k+1,0}$.

Лема 8. *Нехай матриця C є 2-елементом і ця матриця комутує з $B_{k,s}$. Тоді матриця C належить групі $\langle \eta E, B_{k,s} \rangle$.*

Доведення. Нехай $k = 2$. Тоді

$$B_{2,0} = -1, \quad B_{2,1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{2,2} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для матриці $B_{2,0}$ лема очевидна (це може бути базою індукції), для матриць $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ лема легко перевіряється. Нехай $k > 2$ і лема вірна для матриць $B_{k-1,s}$ ($s = 0, 1, \ldots, 2^{k-2}$), зокрема для матриці $B_{k-1,2^{k-2}} = B_{k,0}$. Індукцією по $s \geqslant 1$ доведемо лему для всіх матриць $B_{k,s}$. Нехай $s = 1$ і 2-елемент C комутує з матрицею

$$B_{k,1} = \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} & \langle 1 \rangle \\ 0 & B_{k,0} \end{pmatrix} \quad (\langle 1 \rangle = 10\ldots0).$$

Тоді матриця C має верхньотрикутний вид і діагональні елементи цієї матриці будуть деякими степенями кореня η. Позначимо через A' матрицю, що одержується з матриці A відкиданням першого ряка і першого стовпчика. Тоді $(B_{k,1})' = B_{k,0}$.
Так як $C'B_{k,0} = B_{k,0}C'$, то $C' \in \langle \eta E, B_{k,0} \rangle$. Звідси слідує, що домножуючи матрицю C на деякий елемент групи $\langle \eta E, B_{k,1} \rangle$ можна з неї одержати таку матрицю C_1, що $(C_1)' = E$, тобто можна вважати, що уже $C' = E$. Отже, нехай

$$C = \begin{pmatrix} \eta^{\beta} & X \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad X = x_1, \ldots, x_{2^{k-1}} \ (x_j \in R).$$

Тоді з умови комутації матриць C і $B_{k,1}$ витікає, що

$$X(\xi^\alpha - B_{k,0}) = (\eta^\beta - 1, 0, \dots, 0).$$

Неважко бачити, що детермінант одержаної системи рівнянь від невідомих x_1, $x_2, \dots, x_{2^{k-1}}$ буде рівний $\delta = (\xi - 1)^{2^{k-1}-1}\theta$, де $\theta \in R$. Система рівнянь може мати розв'язок над кільцем R лише у тому випадку, коли δ буде ділити $\eta^\beta - 1$. Це можливо тільки у випадках $\eta^\beta = 1$ або $\eta^\beta = -1$ (нагадаємо, що $2R = (\xi - 1)^t R$, де $t = 2^{k-1}$). В першому випадку $C = E$, а в другому $C = (B_{k,1})^t$, тобто $C \in \langle \eta E, B_{k,1}\rangle$, що встановлює базу індукції по s. При обгрунтуванні відповідного кроку індукції одержиться система лінійних рівнянь над R (з більшим числом невідомих), детермінант δ_s якої буде містити множник δ і множник $\xi^{\alpha_1-\alpha_2} - 1$, де α_1, α_2 — непарні. Тоді δ_s буде ділитись на $(\xi - 1)^2\delta = 2\varepsilon$ $(\varepsilon \in R)$. Для того, щоб система мала роз'язок над кільцем R необхідно, щоб елемент $\eta^\beta - 1$ ділився на δ_s. Це значить, що $\eta^\beta = 1$, тобто, коли C' — одинична матриця для матриці C $(CB_{k,s} = B_{k,s}C)$, то і матриця C також одинична. Це обгрунтовує крок індукції по s і разом з цим крок індукції по k. Лема доведена.

Доведення твердження 4. Легко бачити, що $b = B_{n,1}$. Тоді твердження 4 і теорема 3 слідують з лем 7 – 8.

Повернемося до позначень на початку цієї роботи. Зробимо деякі зауваження про спряженність силовських p-підгруп в групі $GL(p, R)$. Нагадаємо, що силовська p-підгрупа H групи $GL(p, R)$ називається F-силовською, якщо H є силовська p-підгрупа в групі $GL(p, F)$.

Нехай M — скінченно породжений R-підмодуль в L. Позначимо через $d(M)$ — найбільший спільний дільник всіх ненульових коефіцієнтів при базисних елементах R-базиса (2) модуля L у всіх твірних підмодуля M . Назвемо M примітивним, якщо $d(M) = 1$ і $FM = FL$ (тобто R-базис в M буде F-базисом в лінійному просторі FL).

Нехай далі $G = G_n(p)$ і $\xi = \xi_n$.

Лема 9. *Нехай M — примітивний RG-підмодуль в L. Тоді*

$$(1 - \xi)L \subseteq M \subseteq L.$$

Доведення. Нехай $m = \sum_i \lambda_i b^i \in M \quad (\lambda_i \in R), \quad m \neq 0$ і λ_j який-небудь ненульовий коефіцієнт. Формула (3) показує, що в групі G існує такий елемент g, що $(g-1)m = (\xi-1)\lambda_j b^j \in M$. Тоді $(\xi-1)\lambda_j L \subset M$. Отже, $M \supset (\xi-1)d(M)L = (\xi-1)L$. Лема доведена (див. також [13]).

Лема 10. *Елемент $u = \alpha_0 + \alpha_1 b + \ldots + \alpha_{p-1}b^{p-1}$ кільця $L = RC_p$ буде оборотним тоді і тільки тоді, коли $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1} \in R^*$.*

Лема 11. *Примітивний RG-підмодуль M в L співпадає з L тоді і тільки тоді, коли в M міститься оборотний елемент кільця L.*

Доведення. Радикал кільця L породжується радикалом кільця R і елементом $c = b - 1$. Звідси неважко одержати доведення леми 10. Лема 11 очевидна.

Нехай M — примітивний RG-підмодуль в L. Базисною матрицею $B(M)$ модуля M назвемо будь-яку таку матрицю порядку p над кільцем R, яка буде матрицею переходу від базиса (2) в L до деякого R-базиса модуля M. Відмітимо, що $B(L) = E$ і $(B(M))^{-1}GB(M)$ — підгрупа в групі $GL(p, R)$.

Лема 12. *Нехай M — примітивний RG-підмодуль в L і s — найменше натуральне число таке, що $t^sL \subset M$. Тоді існує така базисна матриця $B(M)$ модуля M,* *яка буде добутком $B(M) = VD$, де V — унітрикутна матриця, а D — діагональна матриця виду*

$$D = diag[t^{r_1}, \ldots, t^{r_j}, t^{r_{j+1}}, \ldots, t^{r_{j+k}}, 1, \ldots, 1],$$

де $d \geqslant r_1 = \ldots = r_j = s, \quad r_j > r_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant r_{j+k} \geqslant 1, \quad j+k < p.$
Окрім цього, перші j стовпців матриці V містять лише по одному ненульовому елементу, а інші стовпці цієї матриці будуть координатними стовпцями (в базисі (2)) деяких необоротних елементів кільця $L = R\langle c\rangle$.

Доведення. Стовці матриці $B(M)$ будуть координатними стовцями твірних елементів RG-підмодуля в R-модулі L. Елементарні перетворення над цими стовцями, множення твірних на оборотні елементи кільця L, додавання до одного твірного лінійної комбінації (над L) інших твірних, заміна твірного v на $g(v)$ $(g \in G)$ — всі такі перетворення приводять до нової базисної матриці модуля M. З допогою цих перетворень можна одержати вказаний в лемі трикутний вид матриці $B(M)$.

Розглянемо застосування леми 12.

Теорема 4. *Нехай $d = 1$, тобто $\xi_n - 1$ є простий елемент кільця R, $c = b - 1$,*

$$M_0 = L,\ M_j = \langle t, tc, \ldots, tc^{j-1}, c^j, \ldots, c^{p-1}\rangle \quad (j = 1, \ldots, p-1)$$

і $B_j = B(M_j)$ — базисна матриця модуля M_j $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$. Тоді групи

$$B_j^{-1} G_n(p) B_j \quad (j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

вичерпують всі F-силовські p-підгрупи групи $GL(p, R)$ з точністю до спряженості в цій групі.

Доведення витікає з лем 9 і 12 (див. також [13]).
Нехай $d > 1$.

Твердження 5. *Нехай $p = 2$. Тоді базисні матриці мають вигляд*

$$B(M) = \begin{pmatrix} t^r & -1 + \delta\, t^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r \leqslant d, \quad \delta \in R^*, \quad i < r, \quad 2i \geqslant r.$$

Нехай $p = 3$. Тоді для базисних матриць є наступні можливості:

1) $\begin{pmatrix} t^r & & \delta^2 \\ & t^r & \delta \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta^3 \equiv 1 \,(\mathrm{mod} t^r);$

2) $\begin{pmatrix} t^r & \delta & \delta^{-1} \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta^3 + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t^r);$

3) $\begin{pmatrix} t^r & -t^i & \delta^2 + \lambda\, t^i \\ & t^i & \delta \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad i < r,\ \theta = 1 + \delta + \delta^2 + \lambda t^i \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t^{r-i}),$
$(1 + \delta)\theta \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t^r);$

4) $\begin{pmatrix} t^r & \alpha\, t^i & \delta^2 + \lambda\, \alpha\, t^i \\ & t^i & \delta \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad i < r,\ 1 + \alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t),\ 1 + \alpha^3 \equiv 0 (\mathrm{mod} t^{r-i}),$
$\lambda(1 + \alpha) \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t^{r-i}), 1 - \delta^3 = \lambda(\alpha\delta + 1)t^i,\ \alpha\delta^2 - \alpha^2\delta - 1 - \lambda t^i \equiv 0 \,(\mathrm{mod} t^{r-i}).$

Відмітимо, що при $p = 3$ силовські p-підгрупи групи $GL(3, R)$ вивчались в роботі [17].

1. *Супруненко Д. А.* Линейные p-группы // Докл. АН БССР. – 1960. – **4**, № 6. – С. 233–235.
2. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 5. – С. 1031–1054.
3. *Leedham-Green C. R., Plesken W.* Some remarks of Sylow subgroups of general linear groups // Math. Z. – 1986. – **191**. – P. 529–535.
4. *Конюх В. С.* О линейных p-подгруппах // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. – 1987. – № 1. – С. 3–8.
5. *Петечук В. М.* Линейные p-группы над телами // Докл. АН Украины. Сер. мат. Наук. – 1997. – № 11. – С. 21–24.
6. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. **А**. – 1979. – № 5. – С. 326–329.
7. *Ващук Ф. Г., Гудивок П. М.* Целочисленные p-адические представления конечных абелевых p-групп // Докл. АН УССР. Сер. **А**. – 1986. – № 1. – С. 3–6.
8. *Гудивок П. М.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**, № 6. – С. 121–128.
9. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 918–924.
10. *Гудивок П. М., Рудько В.П.* Об изоморфизме силовских p-подгрупп полной линейной группы над кольцом целых чисел // Докл. АН Украины. – 1992. – № 9. – С. 3–5.
11. *Gudivok P. M., Rudko V. P.* On isomorphism of sylow subgroups of the general linear group over the ring of integers // Jornal of Mathematical Sciences. – 2000. – **102**, – № 3. – P. 3998–4008.
12. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доповіді НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5–7.
13. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О неприводимых силовских p-подгруппах полной линейной группи над кольцом целых чисел // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1997. – С. 29–37.
14. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* Про силовські p-підгрупи повної лінійної групи над областями цілісності // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – С. 31–46.
15. *Юрченко Н. В.* Про силовські 2-підгрупи групи $GL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – С. 110–112.
16. *Тилищак О. А.* Про силовські p-підгрупи повної лінійної групи над комутативним локальним кільцем характеристики p^s // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – С. 95–102.
17. *Кирилюк А. А.* Неприводимые силовские p-подгруппы группы $GL(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – С. 49–57.

Одержано 11.10.2005