УДК 519.21

Г. І. Сливка, А. М. Тегза (Ужгородський нац. ун-т)

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ОДНОРІДНОЇ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ В ЧАСТИННОМУ ВИПАДКУ

The work suggests a new method of the model building (realizing of which on a computer is possible) of a solution of the problem on the vibration of the homogeneous string with the initial conditions. There are considered strictly subgaussian random processes, specifically the gaussian central random processes as the initial conditions. These models bring the solution nearer to the given reliability and accuracy in even metric.

В роботі запропоновано новий метод побудови моделі, яку можна реалізувати на комп'ютері, розв'язку задачі про коливання однорідної струни з початковими умовами. Як початкові умови, розглядаються строго субгауссові випадкові процеси, зокрема, гауссові центровані випадкові процеси. Ці моделі наближають розв'язок з заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Вступ. В роботі будується модель, яку можна реалізувати на комп'ютері, що наближає розв'язок задачі про коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами із заданими надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Розглядаються строго субгауссові випадкові поля (див. [1]) як початкові умови. Зауважимо, що гауссові поля є частинним випадком строго субгауссових випадкових полів. Відомо, що за певних умов (див. [4]) розв'язок крайової задачі можна зобразити у вигляді ряду

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)V_k(x),$$

де $V_k(x)$ — відомі функції, а A_k та B_k — випадкові величини, сумісні розподіли яких відомі.

Зрозуміло, що можна розглядати таку модель розв'язку задачі

$$U(x,t,N) = \sum_{k=1}^{N}(A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)V_k(x). \tag{1}$$

Якщо використати результати книги [2], то можна знайти значення N, при якому $U(x,t,N)$ наближатиме поле $U(x,t)$ з заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Головний недолік цього методу полягає у тому, що випадкові величини A_k та B_k можуть бути незалежними лише для спеціально підібраних випадкових умов. Отже, при великих N цей метод практично неможливо використовувати.

В роботі пропонується новий метод моделювання розв'язків крайової задачі (1), який полягає в тому, що спочатку з певною точністю моделюються крайові умови, за якими підраховують наближені значення для A_k та B_k, а саме $\hat{A}_k$ та $\hat{B}_k$, а за модель розв'язку розглядається сума

$$\hat{U}(x,t,N) = \sum_{k=1}^{N}(\hat{A}_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \hat{B}_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)V_k(x). \tag{2}$$

Вдається знайти значення N та точність наближення моделей $\hat{A}_k$ та $\hat{B}_k$ до A_k та B_k, за яких модель (2) наближає розв'язок крайової задачі з заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Зауважимо, що всі результати роботи мають місце також, коли початкові умови є гауссовими центрованими полями. Методи моделювання гауссових та субгауссових випадкових полів можна знайти в [2].

1. Строго субгауссові випадкові величини та строго субгауссові випадкові процеси. Нагадаємо (див.[1]), що випадкову величину ξ будемо називати субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас усіх субгауссових випадкових величин позначають $Sub(\Omega)$.

Субгауссова випадкова величина ξ називається строго субгауссовою, якщо $\tau^2(\xi) = E\xi^2$, тобто при всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\},$$

де $\sigma = E\xi^2$, $\tau(\xi)$ — субгауссовий стандарт.

Сім'я випадкових величин $\triangle \in Sub(\Omega)$ називається строго субгауссовою, якщо для кожної скінченої множини випадкових величин з $\Delta\,\{\xi_i, i \in I\}$ та всіх $\lambda_i \in R$ виконується співвідношення

$$\tau^2\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) = E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2.$$

Лема 1 ([2]). *Нехай Δ — строго субгауссова сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замкнення Δ в $L_2(\Omega)$ є строго субгауссовою сім'єю.*

Зауваження 1. *Надалі будемо розглядати лише замкнені в $L_2(\Omega)$ строго субгауссові сім'ї.*

Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називають строго субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго субгауссовою, а випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in T, i = 1, 2, \ldots, m\}$ називаються сумісно строго субгауссовими, якщо сім'я випадкових величин $\{X_i(t), t \in T, i = 1, 2, \ldots\}$ є строго субгауссовою.

Зауваження 2. *Властивості випадкових величин з сімей строго субгауссових випадкових величин та строго субгауссових випадкових процесів можна знайти у книгах* [1, 2]. *Зокрема, незалежні строго субгауссові випадкові процеси є сумісно строго субгауссовими. Гауссові центровані процеси є строго субгауссовими випадковими процесами.*

2. Основний результат. Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни, якщо початкове відхилення точок струни і їх початкова швидкість є незалежні строго субгауссові випадкові процеси, а кінці нерухомо закріплені:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad x \in [0,\ l]\ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u_{t=0} = \xi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta(x), \tag{4}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

Розв'язок задачі (3)-(5) записується у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \tag{6}$$

де

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^l \eta(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx.$$

Позначимо $D = [0,l] \times [0,T]$. Нехай $\hat{\xi}(x)$ і $\hat{\eta}(x)$ — моделі процесів $\xi(x)$, $\eta(x)$. $\hat{\xi}(x)$ і $\hat{\eta}(x)$ є незалежними випадковими процесами.

Нехай модель процесу (6) має вигляд

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \left(\hat{A}_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + \hat{B}_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \tag{7}$$

де

$$\hat{A}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \hat{\xi}(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx, \quad \hat{B}_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^l \hat{\eta}(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx.$$

Нехай

$$\Delta_N(x,t,N) = u(x,t) - u^N(x,t) = u_n(x,t) + v_n(x,t),$$

де

$$u_N(x,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right),$$

$$v_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \left((\hat{A}_k - A_k) \cos\left(\frac{k\pi}{l} t\right) + (\hat{B}_k - B_k) \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right).$$

Теорема 1. *Нехай* $\{\xi(x),\ x \in [0,l]\}$, $\{\eta(x),\ x \in [0,l]\}$ *— незалежні* $SSub(\Omega)$ *процеси. Нехай моделі* $\hat{\xi}(x)$, $\hat{\eta}(x)$ *такі, що виконуються умови:*

$$\frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{E(\hat{\xi}(x) - \xi(x))^2} < \Lambda, \quad \frac{1}{2} \int_0^l \sqrt{E(\hat{\eta}(x) - \eta(x))^2} dx < \Lambda.$$

Тоді випадковий процес $u^N(X,t)$ *(7) є моделлю, що наближає випадковий процес* $u(X,t)$ *з надійністю* $1-\gamma$ *та точністю* δ *в рівномірній метриці області* D*, якщо виконуються нерівності:*

$$\left(T^{\frac{1}{2}} + l^{\frac{1}{2}}\right) A_N^2 \varepsilon_0^2(N) < \delta,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^{\frac{1}{3}} \left(\delta^{\frac{2}{3}} - 3 \left(T^{\frac{1}{2}} + l^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} A_N^{\frac{1}{3}} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}}(N) \right)}{\varepsilon_0(N)} \right)^2 \geq \ln \frac{1}{\gamma},$$

де

$$A_N = \frac{2\pi}{l}\left[\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k\sqrt{EA_k^2}\right)^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k\sqrt{EB_k^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\Lambda N\left[\frac{(N+1)^2}{4} + \frac{l^2}{\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\varepsilon_0(N) = \left(\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \sqrt{EA_k^2}\right)^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \sqrt{EB_k^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\Lambda\left(N + \frac{l^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай тепер в умовах теореми 1 $\eta(x) = 0$, $l = \pi$, $T = \pi$, $\xi(x)$ — гауссів випадковий процес такий, що $\xi(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j \sin(jx)$, де ξ_j — незалежні нормально розподілені випадкові величини такі, що $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = b^j$, де b — деяке число таке, що $0 < b < 1$.

Нехай $\hat{\xi}(x) = \hat{\xi}_M(x) = \sum\limits_{j=1}^{M} \xi_j \sin(jx)$. Отже,

$$\sqrt{E(\xi(x) - \hat{\xi}_M(x))^2} = \sum_{j=M+1}^{\infty} b^j \sin^2(jx) \le \sum_{j=M+1}^{\infty} b^j = \frac{b^{M+1}}{1-b},$$

тобто при заданому Λ M вибирається так, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{b^{M+1}}{1-b} < \Lambda, \quad \text{тобто} \quad M \ge \frac{\ln(\Lambda(1-b))}{\ln(b)}.$$

В цьому випадку $A_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \xi(x)\sin(kx)\,dx = \xi_k$ тобто, $EA_k^2 = b^k$. Отже,

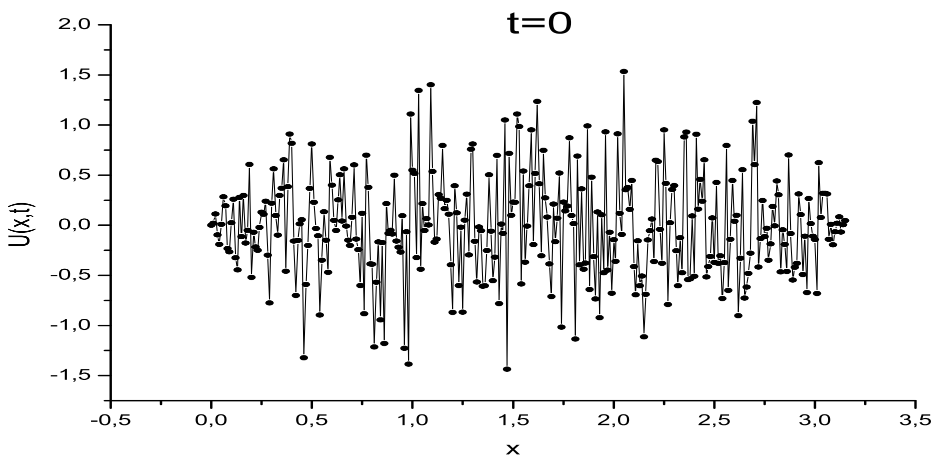
$$\begin{aligned} A_N &= 2\sum_{k=N+1}^{\infty} k(\sqrt{b})^k + 4\Lambda N\left[\frac{(N+1)^2}{4} + 1\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2\frac{(\sqrt{b})^{N+1}(N(1-\sqrt{b})+1)}{(1-\sqrt{b})^2} + 4\Lambda N\left[\frac{(N+1)^2}{4} + 1\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(N) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} (\sqrt{b})^k + 2\Lambda\left(N + \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \frac{(\sqrt{b})^{N+1}}{1-b} + 2\Lambda\left(N + (1+\ln(N))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \bar{\varepsilon}_0(N). \end{aligned}$$

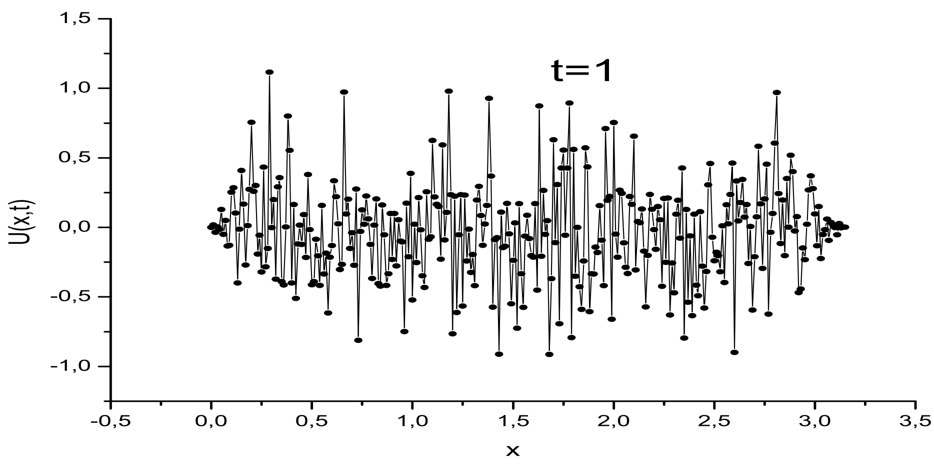
Таким чином, шуканою моделлю буде модель, де N та Λ підібрані так, що виконуються нерівності

$$A_N\varepsilon_0(N) < \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{та} \quad \left(\frac{\delta - 3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}A_N^{\frac{1}{3}}(\varepsilon_0(N))^{\frac{1}{3}}}{\bar{\varepsilon}_0(N)}\right) \ge 2\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

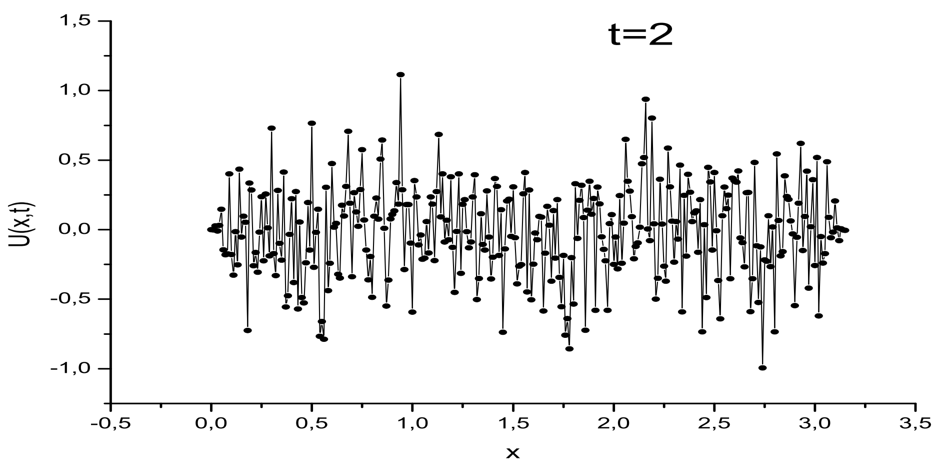
Розв'язавши дані нерівності, ми отримали, що при $\Lambda = 0,0005$ і $N = 34$ модель $U^N(X,t)$ наближає випадковий процес $U(X,t)$ з надійністю $0,99$ та точністю $0,01$



Мал. 1. Модель коливання струни в момент часу $t = 0$



Мал. 2. Модель коливання струни в момент часу $t = 1$



Мал. 3. Модель коливання струни в момент часу $t = 2$

в рівномірній метриці області D. На мал.1, мал.2, мал.3 подані моделі коливання струни відповідно в моменти часу $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

Висновки. У другому розділі роботи наведені необхідні відомості з теорії строго субгауссових випадкових процесів. У третьому розділі сформульований головний результат роботи, а саме, розглянуто метод моделювання розв'язку рівняння коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами у частинному випадку. Знайдено точність та надійність моделювання в рівномірній метриці. Для конкретної задачі побудовано моделі.

1. *Buldygin V.V and Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. – Rhode: American Mathematical Society.– 2000.
2. *Козаченко Ю.В. Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. – К.: Київський ун-т.– 1999.– 223 с.
3. *Козаченко Ю.В., Сливка Г.І.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірн. та матем. статистика. – 2003. – Вип. 69 – С. 63–78.
4. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа.– 1964.– 559 с.

Одержано 16.11.2005