УДК 512.547.25

О. А. Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ НАД ЛОКАЛЬНОЮ ОБЛАСТЮ ЦІЛІСНОСТІ

It is shown, that all matrix representations of odd degree $n > 1$ of group of order 2 over local integral domain of characteristic 2 in which any finitely generated ideal has minimal generator system of not greater then two elements are reducible.

Показано, що всі матричні зображення непарного степеня $n > 1$ групи другого прядку над локальною областю цілісноті характеристики 2, будь-який скінченно породжений ідеал якої володіє мінімальною системою з не більше ніж двох твірних елементів, звідні.

Добре відомо [1, 2], що тривіальне зображення першого степеня — єдине незвідне матричне зображення скінченної p-групи над областю головних ідеалів характеристики p. П. М. Гудивок, Є. Я. Погоріляк та В. М. Орос [3, 4] показали, що над нетеровим факторіальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, існує нескінченна кількість нееквівалентних незвідних матричних зображень скінченної p-групи G порядку $|G| > 1$ довільного наперед заданого степеня $n > 1$. В [5] показано існування незвідних матричних зображення скінченної p-групи G як завгодно високого степеня над цілісним комутативним нетеровим локальним кільцем характеристики p, яке не є областю головних ідеалів, у випадку, коли $|G| > 2$.

В роботі показано, що всі матричні зображення непарного степеня групи другого прядку над локальною областю цілісноті характеристики 2, будь-який скінченно породжений ідеал якої володіє мінімальною системою з не більше ніж двох твірних елементів, звідні.

Нехай R — комутативне кільце з одиницею. Далі через $\operatorname{Rad} R$ будемо позначати радикал Джекобсона кільця R. Нехай $\det M$ — детермінант квадратної матриці M над комутативним кільцем.

Лема 1. *Нехай R — комутативне локальне кільце, I — ідеал кільця R породжений елементами $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Якщо I володіє системою твірних елементів $b_1, b_2, \ldots, b_n$, де $n \le m$, то I також володіє системою з n твірних елементів, які можна вибрати серед елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m$.*

Доведення. Очевидно, лему досить довести для випадку, коли $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — мінімальна система твірних елементів ідеалу I. Тоді з умови $x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_nb_n = 0$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — деякі елементи кільця R, випливає, що $x_i \in \operatorname{Rad} R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Оскільки $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — система твірних елементів ідеалу I, $a_i \in I$ $(i = 1, \ldots, m)$, то для деякої $m \times n$-матриці A над кільцем R

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — система твірних елементів ідеалу I, $b_j \in I$ $(j = 1, \ldots, m)$, то для деякої $n \times m$-матриці B над кільцем R

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

і $BA \equiv E_n \pmod{\operatorname{Rad} K}$, де E_n — одинична матриця порядку n над кільцем R. У полі лишків кільця R ранг матриці $\overline{A}$, одержаної з матриці A редукцією за модулем ідеалу $\operatorname{Rad} R$, рівний n. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що перші n рядків матриці $\overline{A}$ лінійно незалежні над полем лишків кільця R. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

де A_2 — деяка матриця над кільцем R, A_1 — квадратна матриця порядку n над кільцем R, $\det A_1 \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{Rad} R}$. Отже, A_1 — оборотня матриця,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Отже, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — система твірних елементів ідеалу I. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай R — локальна область цілісності характеристики 2, будь-який скінченно породжений ідеал якої володіє мінімальною системою з не більше ніж двох твірних елементів, $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2. Всі матричні R-зображення групи G непарного степеня n звідні.*

Доведення. Нехай $\Gamma : a \to E_n + A$, де E_n — одинична матриця порядку n, A — деяка матриця того ж порядку над кільцем R, є незвідним матричним R-зображенням групи G. Очевидно, $A^2 = 0$.

Покажемо, що для довільного l $(0 \leqslant l \leqslant k,\ k = \frac{n-1}{2})$ знайдуться такі оборотні матриці B і C порядку n над кільцем R, що BAC має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} & a_{l5} & \ldots & a_{l\,2l} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{l+1\,1} & a_{l+1\,2} & a_{l+1\,3} & a_{l+1\,4} & a_{l+1\,5} & \ldots & a_{l+1\,2l} & a_{l+1\,2l+1} & \ldots & a_{l+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{n\,2l} & a_{n\,2l+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $a_{i\,2i} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, l)$. Застосуємо індукцію по числу l. При $l = 0$ твердження очевидне. Нехай $0 \leqslant l < k$ і для деяких оборотних матриць B і C порядку n над кільцем R $A' = BAC$ має вигляд (1). Якщо у матриці BAC є нульовий стовпчик, то у матриці AC, а, отже, і у матриці $C^{-1}AC$ є нульовий стовпчик. Тоді Γ — звідне зображення, що неможливо. Тому $a_{ij} \neq 0$ для деяких i, j $(l+1 \leqslant i \leqslant n,\ 2l+1 \leqslant j \leqslant n)$.

Оскільки домноження зліва деякої матриці на матрицю підстановки змінює порядок рядків, то, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $I = a_{l+1\,2l+1}R + {}$ ${}+a_{l+1\,2l+2}R + \cdots + a_{l+1\,n}R \neq \{0\}$. За лемою 1 $I = aR + bR$, де a і b вибрано серед елементів $a_{l+1\,2l+1}$, $a_{l+1\,2l+2}$, $\ldots$, $a_{l+1\,n}$. Очевидно, $a \neq 0$ або $b \neq 0$. Оскільки домноження зправа деякої матриці на матрицю підстановки змінює порядок стовпців, то, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $I = a_{l+1\,2l+1}R + a_{l+1\,2l+2}R$ і $a_{l+1\,2l+2} \neq 0$. Тоді $a_{l+1\ j} = a_{l+1\,2l+1}\gamma_{1j} + a_{l+1\,2l+2}\gamma_{2j}$ для деяких $\gamma_{ij} \in R$ $(i = 1, 2,\ j = 2l+3, \ldots, n)$. Нехай

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \gamma_{1\,2l+3} & \ldots & \gamma_{1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma_{2\,2l+3} & \ldots & \gamma_{2\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A'C' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{l+1\,1} & \alpha_{l+1\,2} & \alpha_{l+1\,3} & \alpha_{l+1\,4} & \alpha_{l+1\,5} & \ldots & \alpha_{l+1\,2l+2} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{l+2\,1} & \alpha_{l+2\,2} & \alpha_{l+2\,3} & \alpha_{l+2\,4} & \alpha_{l+2\,5} & \ldots & \alpha_{l+2\,2l+2} & \alpha_{l+2\,2l+3} & \ldots & \alpha_{l+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \alpha_{n5} & \ldots & \alpha_{n\,2l+2} & \alpha_{n\,2l+3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{i\,2i} = a_{i\,2i} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, l+1)$.

Проведена індукція показує, що для деяких оборотних матриць B і C порядку n над кільцем R

$$\widetilde{A} = BAC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & a_{k5} & \ldots & a_{k\,2k} & 0 \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & a_{k+1\,3} & a_{k+1\,4} & a_{k+1\,5} & \ddots & a_{k+1\,2k} & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{n\,2k} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де $a_{j\,2j} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Оскільки $A^2 = 0$, то в полі відношень кільця R $\operatorname{rank} A \leqslant \frac{n}{2}$, тобто $\operatorname{rank} A \leqslant k$. Тоді $\operatorname{rank} \widetilde{A} \leqslant k$. Тому мінор $k+1$-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{24} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k4} & a_{k6} & \ldots & a_{k\,2k} & 0 \\ a_{i2} & a_{i4} & a_{i6} & \ldots & a_{i\,2k} & a_{in} \end{vmatrix}$$

матриці $\overline{A}$ рівний 0 ($i = k+1, \ldots, n$). Оскільки $a_{j\,2j} \neq 0$ ($j = 1, \ldots, k$), то $a_{in} = 0$ ($i = k+1, \ldots, n$). Але тоді останній стовпчик матриці $\widetilde{A} = BAC$, а, отже, і AC, $C^{-1}AC$ рівний 0, що неможливо. Теорема доведена.

1. *Curtis C. W., Reiner I.* Methods of representation theory. – New York: John Willems & Sons Inc, 1981. — V. 1. — 820 p.
2. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородський нац. ун-т, 2003. – 119 с.
3. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О модулярных представлениях конечных групп над областями целосности // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 78–86.
4. *Орос В. М.* Про зображення скінченних p-груп над деякими факторіальними кільцями: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-матем. наук. – К.: Київський нац. ун-т, 1993. – 9 с.
5. *Тилищак О. А.* Про незвідні зображення скінченних p-груп над деякими локальними кільцями характеристики p // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 104–110.

Одержано 16.11.2005