

М. Д. Бабич, О. М. Гецко (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМІВ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ СКАЛЯРНИХ РІВНЯНЬ

Some questions of exactness and calculate complication of separating and making more precise algorithms all isolate solutions of systems' nonlinear scalar equations are considered.

Розглядаються питання точності та обчислювальної складності алгоритмів відокремлення і уточнення всіх ізольованих розв'язків систем нелінійних скалярних рівнянь.

Вступ. Відомо, що системи нелінійних скалярних рівнянь (СНСР) можуть служити як математичними моделями різних природничих процесів і явищ, так і бути дискретними аналогами різних нелінійних задач.

Процес глобального наближеного розв'язування таких систем є складним і складається з двох етапів: відокремлення усіх ізольованих розв'язків та їх ітераційного уточнення.

Якщо локальні ітераційні методи уточнення ізольованих розв'язків, що побудовані на різних ідеях, досліджені досить детально [1–3], то методи відокремлення розв'язків розроблені недостатньо. Серед таких алгоритмів відмітимо два, наведені в роботах [4], [5]. Обидва алгоритми побудовані на однаковій ідеї багаторазового рівномірного подрібнення області, що містить усі розв'язки, з наступною перевіркою певних критеріїв, своїх для кожного алгоритму. В даній роботі розглядається ε -алгоритм [5], що базується на покритті множини, яка містить усі ізольовані розв'язки СНСР, послідовністю ε_k -сіток ($k = 1, 2, \dots$) з наступною перевіркою певних умов, які забезпечують генерування послідовностей елементів ε_k -сіток, що збігаються до різних ізольованих розв'язків. У зв'язку з цим, важливим є питання своєчасного переходу до ітераційного уточнення, яке стає можливим при виконанні (на елементах ε_k -сіток) достатніх умов збіжності вибраного ітераційного методу.

Предметом дослідження в роботі являються питання точності і обчислювальної складності комбінованого алгоритму, який складається з ε -алгоритму відокремлення усіх розв'язків СНСР та ітераційного методу найшорішого спуску їх уточнення.

Відомо, що наближене розв'язування задач чисельними методами супроводжується в загальному випадку наступними похибками [3]: неусувною, методу, заокруглення і повною. Як правило, знайти реальні значення цих похибок у процесі розв'язування задач вдається в рідких випадках. Тому, замість реальних значень цих похибок, використовуються їх оцінки.

В залежності від розв'язуваних класів задач, наближених чисельних методів, що застосовуються і реалізуються на комп'ютерах, та можливостях реально обчислювати їх характеристики використовуються різні оцінки похибок (ап'юріорні, апостеріорні, асимптотичні, мажорантні, детерміновані і стохастичні). Наведені оцінки відображають характеристику точності наближених чисельних методів.

Аналогічно цьому для знаходження оцінок другої характеристики обчислювальних методів та алгоритмів, а саме обчислювальної складності, існують різні підходи. Так, при розв'язуванні операторних рівнянь виду $Au = f$ проєкційними методами часто за одиницю обчислювальної складності береться складність (час) обчислення (як домінуючої операції) скалярного добутку $(A\varphi_i, \psi_j)$, де φ_i, ψ_j — дві координатні

послідовності функцій, а наближений розв'язок шукається у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$. При наближеному розв'язуванні рівнянь виду $Tu = 0$ ітераційними методами за одиницю обчислювальної складності доцільно брати складність обчислення одної ітерації, складовими якої можуть бути обчислення нев'язки Tu^k , добутку $T'(u^k)Tu^k$ та скалярного добутку $(T'(u^k)Tu^k, Tu^k)$. При відокремленні ізольованих розв'язків нелінійних рівнянь εs -алгоритмом за одиницю складності доцільно брати складність або час обчислення нев'язки, як основної операції в цьому процесі. Накінець, в будь-якому із названих варіантів обчислювальну складність можна виразити як функцію числа затрачених арифметичних операцій, пов'язаною із розмірністю задачі, простору, числом вузлів сітки дискретизації, степенем апроксимуючого полінома, кількістю ітерацій і т.д.

1. Теоретичні основи і практична реалізація εs -алгоритму. Будемо розглядати СНСР виду:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ u_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \dots \\ u_l = f_l(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{cases} \quad (1)$$

де функції f_1, f_2, \dots, f_n — визначені і двічі неперервно диференційовні на деякій обмеженій області G дійсного арифметичного n -вимірного простору E_n , метризованого елементами деякої множини Q , тобто кожній парі точок $u, v \in E_n$ ставиться у відповідність елемент $\rho(u, v) \in Q$, що характеризує віддаль між u і v .

Систему (1) можна представити в еквівалентному операторному вигляді:

$$\overline{F}(\overline{u}) := \overline{u} - F(\overline{u}) = 0, \quad (2)$$

де $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ — вектор, а $F(\overline{u}) = (f_1(\overline{u}), f_2(\overline{u}), \dots, f_n(\overline{u}))$ — вектор функція двічі неперервно диференційовна на G .

Поставимо задачу: знайти всі ізольовані розв'язки u_i^* ($i = \overline{1, l}, l < \infty$) системи (1) або (2) в n -вимірному замкненому кубі $\overline{R} \subset E_n$, де $\overline{R} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid a \leq u_i \leq b, i = \overline{1, n}, -\infty < a, b < \infty, d = b - a\}$. Тут припускається, що система (1) або (2) має l ізольованих розв'язків в \overline{R} .

Практична реалізація наближеного методу знаходження усіх розв'язків \overline{u}_i^* передбачає обривання на певному етапі процесу побудови відповідних наближених розв'язків. Це означає, що задається число $\varepsilon > 0$, яке характеризує потрібну точність розв'язків, і для кожного фіксованого i шукається таке n і елемент \overline{u}_{in}^* послідовності наближених розв'язків, починаючи з якого буде виконуватись одна із двох наступних умов: $\rho(\overline{u}_{in}^*, F(\overline{u}_{in}^*)) \leq \varepsilon$ або $\rho(\overline{u}_{in}^*, \overline{u}_{in}^*) \leq \varepsilon$. У першому випадку \overline{u}_{in}^* називається наближеним ε -розв'язком системи (1) за нев'язкою, а у другому — ε -розв'язком системи (1) за аргументом. Очевидно, що різним значенням i , тобто різним точним розв'язкам, можуть відповідати різні значення n та елементи \overline{u}_{in}^* . Отже, задача глобального наближеного розв'язування рівняння (2) полягає у знаходженні відповідних ε -розв'язків.

Відокремлення ізольованих розв'язків означає знаходження таких замкнених областей $\overline{R}_i \subset \overline{R}$, зокрема, замкнених куль \overline{S} , кожна з яких буде містити єдиний розв'язок із \overline{R} . Це передбачає знаходження множини елементів $v_1, v_2, \dots, v_l \in E_n$ і дійсних чисел r_1, r_2, \dots, r_l , які назвемо відповідно центрами і радіусами куль $\overline{S}(v_i, r_i) = \{u \in \overline{R} : \|u - v_i\| \leq r_i\}$ ($i = \overline{1, l}$), щоб на кожній із них виконувались деякі достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

Для відокремлення усіх розв'язків використаємо εs -алгоритм. Розглянемо основні його складові. Наведемо наступні означення із функціонального аналізу.

Означення 1. Множина L_1 метричного простору X називається ε -сіткою для множини $L_2 \subset X$, якщо для будь-якої точки $x \in L_2$ знайдеться точка $z \in L_1$ така, що $\rho(x, z) \leq \varepsilon$.

Означення 2. Збіжна послідовність $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^k, \dots$ точок простору E_n називається розв'язувальною для неперервного оператора F , якщо $\rho(\bar{u}^k, F(\bar{u}^k)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Наступна теорема встановлює зв'язок між розв'язками рівняння (2) і розв'язувальними послідовностями для оператора $F(\bar{u})$.

Теорема 1 ([5]). Для існування в області \bar{R} хоча б одного ізолюваного розв'язку рівняння (2) з неперервною вектор-функцією $F(\bar{u})$ необхідно і досить існування для $F(\bar{u})$ хоча б однієї розв'язувальної послідовності $\{\bar{u}^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Наведена теорема є основною для практичного розв'язання проблеми відокремлення усіх ізолюваних в області \bar{R} розв'язків рівняння (2) за допомогою εs -алгоритму. Дійсно, оскільки, в загальному випадку, число розв'язків l рівняння (2) і їх розташування в області \bar{R} невідоме, то всю інформацію про ці розв'язки можна отримати у процесі побудови за допомогою εs -алгоритму розв'язувальних послідовностей, елементи яких з ростом ε_k -сіток будуть згущатися навколо ізолюваних точних розв'язків рівняння (2), визначаючи таким чином їх кількість та апроксимуючи їх із заданою точністю. Реалізація εs -алгоритма передбачає відображення оператором F куба \bar{R} у себе, тобто $F(\bar{R}) \subset \bar{R}$, та наявність такої додатної послідовності γ_k ($k = 1, 2, \dots$), яка збігається до 0, що ряд, складений із чисел $\varepsilon_k(\gamma_k)$ збігається при $k \rightarrow \infty$. За даними γ_k і $\varepsilon_k(\gamma_k)$ здійснюється побудова ε_k -сіток шляхом багаторазового подрібнення вихідного куба \bar{R} (компактної у собі множини) на кубики $\bar{R}_{i_k}^k$ з однаковими на кожному етапі подрібнення довжинами сторін $d_k = (b - a) \cdot 2^{-k}$.

Куб $\bar{R}_{i_0}^0 = \bar{R}$ називається кубом 0-ого етапу подрібнення з центром $\bar{u}_{i_0}^0$.

Центри кубів $\bar{R}_{i_k}^k$ позначимо $\bar{u}_{i_k}^k$, $i_k = 1, 2, \dots, 2^{kn}$ — кількість кубів k -ого етапу. Вони являються елементами послідовності ε_k -сіток.

Розглянемо питання побудови розв'язувальних послідовностей. Отже оператор $F(\bar{u})$ відображає куб \bar{R} у себе. Множину елементів $\bar{u}_{i_k}^k$ ε_k -сітки позначимо через $L_{\varepsilon_k}(\gamma_k)$, а множину їх образів $F(\bar{u}_{i_k}^k)$ через L_{γ_k} і будемо називати γ_k -сіткою куба \bar{R} . Інакше кажучи, $L_{\varepsilon_k}(\gamma_k)$ -сітка, що покриває куб \bar{R} , оператором F відображається в L_{γ_k} -сітку, яка належить \bar{R} .

Відомо, що якщо вектор-функція $F(\bar{u}_{i_k}^k)$ неперервна на $\bar{R} \subset E_n$, то вона рівномірно неперервна на \bar{R} . Це означає, що для будь-якого $\gamma > 0$ існує таке число $\varepsilon(\gamma) \leq \gamma$, що для довільної пари точок $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{R}$ із умови $\rho(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \leq \varepsilon(\gamma)$ випливає нерівність $\rho(F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2)) \leq \gamma$. Нехай \bar{u}_0 — розв'язок рівняння (2), тобто $\bar{u}^0 = F(\bar{u}^0)$. Нехай $N_\varepsilon(\gamma)$ -зірка навколо точки \bar{u}^0 , тобто множина точок \bar{u} $L_{\varepsilon_k}(\gamma_k)$ -сітки, для яких $\rho(\bar{u}^0, \bar{u}) \leq \varepsilon(\gamma)$ і оскільки $N_\gamma = F(N_\varepsilon(\gamma))$, то $\rho(F(\bar{u}^0), F(\bar{u})) \leq \gamma$. Тоді на основі наведених нерівностей можна записати, що для будь-якого $\bar{u} \in \bar{R}$ справедлива нерівність

$$\rho(\bar{u}, F(\bar{u})) \leq \rho(\bar{u}, \bar{u}^0) + \rho(F(\bar{u}^0), F(\bar{u})) \leq \varepsilon(\gamma) + \gamma,$$

що є основною при побудові розв'язувальних послідовностей. Дійсно, нехай сітки $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k в кубі \bar{R} побудовані і із елементів цих сіток утворений масив пар

$$\Delta_i^{(k)} = (\bar{u}_i^k, F(\bar{u}_i^k)), (i = 1, 2, \dots, s_k). \quad (3)$$

При кожному k із масиву (3) відбираємо ті пари, для яких виконується умова

$$\rho(\bar{u}_i^k, F(\bar{u}_i^k)) \leq \varepsilon_k(\gamma_k) + \gamma_k. \quad (4)$$

Із пар, що задовольняють (при кожному k) умові (4), утворимо ланцюжки за таким правилом: нехай на k і $k+1$ сітках знайдені відповідно пари $\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \dots, \Delta_{s_k}^{(k)}$; $\Delta_1^{(k+1)}, \Delta_2^{(k+1)}, \dots, \Delta_{s_{k+1}}^{(k+1)}$. Тоді пари $\Delta_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, s_k}$) віднесемо пари $\Delta_j^{(k+1)}$ ($j = \overline{1, s_{k+1}}$), для яких справедливі умови

$$\rho(\bar{u}_i^k, \bar{u}_j^{k+1}) \leq \varepsilon_k(\gamma_k) + \varepsilon_{k+1}(\gamma_{k+1}), \quad (5)$$

$$\rho(F(\bar{u}_i^k), F(\bar{u}_j^{k+1})) \leq \gamma_k + \gamma_{k+1}. \quad (6)$$

Продовжуючи цей процес можна побудувати множини розв'язувальних послідовностей, кожній з яких буде відповідати ізольований розв'язок рівняння (2). Цей процес закінчується тоді, коли або досягнута задана точність наближених розв'язків за нев'язкою, або елементи останньої ε_k -сітки задовольняють достатнім умовам теореми існування і збіжності одного із ітераційних методів, що гарантує можливість уточнення наближених розв'язків до наперед заданої точності ε за нев'язкою або аргументом.

Таким чином в теоретичному плані суть εs -алгоритму щодо наближеного розв'язування рівняння (2) полягає в наступному: відображаючи з допомогою вектор-функції $F(\bar{u})$ послідовності $\varepsilon_k(\gamma_k)$ -сіток, які покривають \bar{R} , у послідовності γ_k -сіток, що належать \bar{R} і задовольняючи умовам (4)–(6) можна відокремити усі ізольовані розв'язки системи (1) або (2) і апроксимувати їх з точністю, допустимою на даній ЕОМ. Ефективність цього процесу залежить від точності апроксимації лівих частин (4)–(6) величинами $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k . Має місце наступна теорема 2.

Теорема 2. *Нехай куб \bar{R} , що відображається вектор-функцією $F(\bar{u})$ у себе, покривається послідовністю рівномірних ε_k -сіток, елементи яких являються центрами $\bar{u}_{i_k}^k$ кубів $\bar{R}_{i_k}^k$, причому $F(\bar{u}_{i_k}^k) \subset \bar{R}_{i_k}^k$. Тоді справедливе таке твердження: для кожного куба $\bar{R}_{i_k}^k$, що містить принаймні один розв'язок системи (1), послідовності $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k задовольняють рівності $\gamma_k = 2\varepsilon_k(\gamma_k)$ і визначаються формулами:*

а) якщо для $\bar{u}, \bar{v} \in E_n$, $\rho(\bar{u}, \bar{v}) = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - v_i|$, тоді

$$\varepsilon_k(\gamma_k) = d \cdot 2^{-k}, \gamma_k = 2\varepsilon_k(\gamma_k) = d \cdot 2^{-(k-1)};$$

б) якщо для $\bar{u}, \bar{v} \in E_n$, $\rho(\bar{u}, \bar{v}) = \left[\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \right]^{1/2}$, тоді

$$\varepsilon_k(\gamma_k) = d\sqrt{n} \cdot 2^{-k}, \gamma_k = 2\varepsilon_k(\gamma_k) = d\sqrt{n} \cdot 2^{-(k-1)}.$$

Доведення теореми базується на основі рівномірного подрібнення куба \bar{R} , відображення складових кубів у себе і метрики простору E_n .

Якщо для кожного ізольованого розв'язку \bar{u}_i^* системи (1), потрібно знайти відповідний йому ε -розв'язок за нев'язкою, тоді з (4) із врахуванням значень $\varepsilon_k(\gamma_k)$ і γ_k можна визначити номер k ε_k -сітки, на якому він досягається. Теоретично

$$k = \log_2[3d\sqrt{n} \cdot \varepsilon^{-1}]. \quad (7)$$

Практичне застосування εS -алгоритму доцільно здійснювати до тих пір, поки елементи ε_k -сіток не утворять множини, на кожній із яких будуть виконуватися достатні умови існування і збіжності деякого локального ітераційного методу. Вибір такого методу визначається практичною можливістю реалізувати такі достатні умови і обчислити апостеріорну оцінку похибки.

Розглянемо ітераційний метод найшвидшого спуску (МНС) [1], згідно з яким послідовні наближення обчислюються за формулою:

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k - \frac{\|\bar{F}'(\bar{u}^k)\|^2}{(\bar{F}'(\bar{u}^k)\bar{F}(\bar{u}^k), \bar{F}(\bar{u}^k))} \bar{F}(\bar{u}^k), \quad (8)$$

де $\bar{F}(\bar{u})$ — двічі неперервно диференційовна вектор-функція.

Щодо існування єдиного розв'язку рівняння (2) та збіжності методу (8) має місце теорема.

Теорема 3. *Нехай у кулі $\bar{S}(u^0, r)$, де u^0 — один з елементів v_i , а r — відповідне йому значення r_i , виконуються умови:*

$$\|\bar{F}(\bar{u}^0)\| \leq \delta_0, \|\bar{F}'(\bar{u})\| \leq M(u^0, r), \|\bar{F}''(\bar{u})\| \leq N(u^0, r), \quad (9)$$

$$|(\bar{F}'(\bar{u})h, h)| \geq m(u^0, r)\|h\| \text{ або } \|\bar{F}'(\bar{u})h\| \geq m(u^0, r), \quad (10)$$

де $\delta_0, M(u^0, r), N(u^0, r), m(u^0, r)$ — константи, які забезпечують виконання умов:

$$q(r) = \sqrt{\frac{M^2}{m^2} + \frac{\delta_0 N}{m^2}} - 1 < 1, \quad (11)$$

$$\frac{\delta_0}{m[1 - q(r)]} \leq r. \quad (12)$$

Тоді рівняння (2) в кулі $\bar{S}(u^0, r)$ має єдиний розв'язок \bar{u}^* , до якого збігається послідовність \bar{u}^k , побудована згідно з (8) з початковим наближенням \bar{u}^0 , причому швидкість збіжності та оцінка похибки характеризується нерівністю:

$$\|\bar{u}^* - \bar{u}^k\| \leq \frac{\delta_0}{m[1 - q(r)]} [q(r)]^k. \quad (13)$$

При $k = 0$

$$\|\bar{u}^* - \bar{u}^0\| \leq \frac{\delta_0}{m[1 - q(r)]} \leq r, \quad (14)$$

що характеризує близькість точного і відповідного йому наближеного розв'язку, одержаного εS -алгоритмом.

Із (13) визначається оцінка числа ітерацій, необхідних для одержання при кожному $\bar{u}^0 = v_i$ наближених розв'язків рівняння (2) із заданою точністю. Наприклад, нерівність $\|\bar{u}^* - \bar{u}^k\| \leq \varepsilon$, що характеризує точність наближеного розв'язку за аргументом, буде виконуватись якщо

$$k \geq \frac{1}{\ln q} \cdot \ln \frac{m(1 - q)\varepsilon}{\delta_0}. \quad (15)$$

Таким чином, для реалізації МНС потрібно знайти константи умов (9), (10), за яких будуть виконуватись нерівності (11), (12). Якщо радіус r невідомий, тоді величини

$M(\bar{u}^0, r)$, $N(\bar{u}^0, r)$ і $m(\bar{u}^0, r)$ перетворюються у функції радіуса r і реалізація МНС буде можлива за умови сумісності системи нерівностей (11), (12) відносно радіуса r .

2. Про загальну оцінку характеристики точності. При глобальному наближеному розв'язуванні СНСР користуються, як правило, комбінованою обчислювальною схемою, яка полягає у відокремленні усіх ізольованих розв'язків та їх наступному ітераційному уточненні. У цьому випадку сумарна похибка обчислення кожного наближеного розв'язку буде складатися із похибки початкового наближення \bar{u}^0 , яке забезпечує можливість застосування ітераційного методу, та обчислювальної похибки реалізації на ЕОМ ітераційного процесу, що складається із похибки методу та похибки заокруглення. З іншої сторони \bar{u}^0 можна розглядати як точний розв'язок деякого наближеного до (2) рівняння, коефіцієнти якого будуть наближеними значеннями коефіцієнтів рівняння (2). У цьому випадку схема оцінки повної похибки комбінованого методу матиме вигляд $\|\bar{u}^* - \bar{u}_\tau^k\| \leq \|\bar{u}^* - \bar{u}^0\| + \|\bar{u}^0 - \bar{u}^k\| + \|\bar{u}^k - \bar{u}_\tau^k\|$. Перші два доданки цієї оцінки визначаються згідно з (14) і (13), а третій доданок на основі оцінок заокруглення арифметичних операцій [6] матиме вигляд

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}_\tau^k\| \leq \|\bar{u}_\tau\| \varphi(n, c) (1, 06) 2^{-\tau} 1 - q^{-1}, \quad (16)$$

де δ_0 , m , q визначаються згідно (9)-(11), $\|\bar{u}_\tau\| \equiv \max \|\bar{u}_\tau^k\|$, $\varphi(n, c)$ — функція натурального аргументу, яка характеризує кількість стандартних комп'ютерних операцій при реалізації одного кроку ітераційного методу, τ — довжина мантиси комп'ютерних чисел, c — стала величина.

3. Оцінка обчислювальної складності відокремлення і уточнення усіх ізольованих розв'язків. При чисельній реалізації εs -алгоритму відокремлення розв'язків та їх уточнення ітераційними методами важливим є питання знаходження оцінки обчислювальної складності, яка в даному випадку складається із двох компонент: оцінки складності реалізації εs -алгоритму до моменту відокремлення усіх ізольованих розв'язків (або отримання ε -розв'язків за нев'язкою) і оцінки складності ітераційного уточнення до моменту отримання ε -розв'язку за аргументом.

За оцінку $N_1(\varepsilon)$ обчислювальної складності εs -алгоритму приймається оцінка загального числа елементів ε_k -сіток, на яких обчислюються значення вектор-функції $\bar{F}(\bar{u})$, до моменту виконання умов теореми 3 на деяких елементах усіх множин розв'язувальних послідовностей, тобто до відокремлення розв'язків, або до отримання ε -розв'язків за нев'язкою для всіх \bar{u}_i^* .

За оцінку $N_2(\varepsilon)$ обчислювальної складності ітераційного процесу уточнення всіх відокремлених розв'язків приймається сума добутків числа ітерацій k_i , визначених згідно з (8), що забезпечують задану точність ε , для кожного відокремленого розв'язку, на оцінку складності одної ітерації, тобто $N = \sum_{i=1}^l (k_i)\theta$. У даному випадку $\Theta = \varphi(n, c)$.

Нехай для отримання ε -розв'язків за нев'язкою або відокремлення усіх розв'язків системи (2) в розумінні виконання умов теореми 3, потрібно зробити не менше k кроків εs -алгоритму. Якщо при цьому будуть використані всі точки ε_k -сіток, то їх загальне число буде дорівнювати $(2^{kn} - 1)/(2^n - 1)$.

В реальній ситуації таких точок буде значно менше, оскільки, по-перше, кожна з умов (4)-(6) буде відсіювати певну кількість точок, а по-друге, різні ε -розв'язки або виконання умов теореми 3, можуть здійснюватися на елементах різних ε_k -сіток.

Слід зауважити, що апіорі визначити число відсіюваних точок ε_k -сіток, практично неможливо. Однак у процесі реалізації εs -алгоритму на комп'ютері можна

відслідковувати число відсіюваних точок на кожній сітці. Це дозволяє з певною долею точності прогнозувати можливість подальшого застосування εs -алгоритму за критеріями часу і пам'яті.

Якщо позначити через i_k ($k = 2, 3, \dots$) число точок ε_k -сітки, які відбраковуються на k -му кроці εs -алгоритмом, то число усіх точок, що будуть використовуватись в подальших обчисленнях на кожній із сіток відповідно дорівнюватиме $1, 2^n - i_1, 2^{2n} - 2^n i_1 - i_2, \dots, 2^{kn} - 2^{(k-1)n} i_1 - \dots - i_k$, а їх сума на ε_k -сітках виразиться числом

$$N_k = \frac{2^{kn} - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} i_j (2^{(k-j)n} - 1)}{2^n - 1}.$$

Конкретні оцінки N_k можна отримати при заданні i_j , тобто порядку росту таких точок. Наприклад, якщо взяти $i_j = c2^{j-1}$, де $c \in s[0, 1]$, то для N_k буде мати місце оцінка

$$N_k \leq \frac{2^n + ck(2^n - 1) + c - 1}{(2^n - 1)^2} 2^{kn}.$$

Маючи оцінки повної похибки та обчислювальної складності процесу глобального наближеного розв'язування СНСР (при заданій інформаційній ємності), можна ставити питання про оптимізацію однієї із цих характеристик за умови реальних обмежень на дві інші.

1. Приближенное решение операторных уравнений / *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. Н. и др.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
2. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
3. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 583 с.
4. *Волков Е. А.* О поиске максимума функции и приближенном глобальном решении систем нелинейных уравнений // Труды МИАМ СССР. – 1974. – **131**. – С. 64–80.
5. *Бабич М. Д., Шевчук Л. Б.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74–79.
6. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

Одержано 14.09.2006