В. В. Бондаренко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ПРО УНІТРИКУТНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ ГРУП

In this paper we consider the problem of classifying representations of finite groups by unitriangular matrices over a field.

У цій статті ми розглядаємо задачу про опис зображень скінченних груп унітрикутними матрицями над полем.

Унітрикутним зображенням групи G над полем k назвемо гомоморфізм G в групу $\mathbf{UT}_n(k)$ (верхніх) унітрикутних матриць над k, де n — деяке натуральне число. Два унітрикутні зображення $S : G \to \mathbf{UT}_n(k)$ та $T : G \to \mathbf{UT}_n(k)$ назвемо унітрикутно еквівалентними, якщо існує унітрикутна матриця M, така, що $S(g) = MT(g)M^{-1}$ для довільного $g \in G$. Якщо характеристика поля k ділить порядок групи G, то унітрикутне зображення назвемо модулярним.

Безпосередньо із результатів роботи [1] випливає, що задача про опис унітрикутних зображень нескінченної циклічної групи містить в собі задачу про унітрикутну подібність пари матриць (тобто подібність за допомогою унітрикутних матриць). У цій статті ми отримуємо подібний результат для модулярних зображень більшості скінченних груп (теореми 2 і 3). Окрім того, ми вказуємо повний опис модулярних унітрикутних зображень циклічної групи другого порядку (теорема 1).

1. Модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку. Унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку над полем характеристики $p \neq 2$ описуються тривіальним чином — вони вичерпуються одиничними зображеннями, тобто такими зображеннями, всі матриці яких є одиничними (див. параграф 3). У цьому параграфі ми опишемо модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку.

Для довільних натуральних чисел p і q, таких, що $p \leq q$, покладемо $[p, q] = \{p, p+1, \ldots, q\}$, $[p, q]^2 = [p, q] \times [p, q]$ та позначимо через $[p, q]^2_<$ підмножину всіх елементів (i, j) із $[p, q]^2$, таких, що $i < j$.

Через k позначаємо довільне поле характеристики 2 і покладемо $k^* = k \setminus 0$. Через $E(n)$ будемо позначати одиничну матрицю розміру $n \times n$, а через $I_{ij}(n)$ — матрицю розміру $n \times n$, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на решті місць стоять нульові елементи.

Нехай P — підмножина в $[1, n]^2_<$. Елемент $x = (i, j) \in [1, n]^2_<$ назвемо P-ізольованим, якщо для довільного елементу $y = (p, q) \in P$, $y \neq x$, множина $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ порожня (зрозуміло, що $y = x$ може мати місце лише в тому випадку, коли $x \in P$). Позначимо через $\mathcal{I}_n$ сукупність всіх підмножин $P \subset [1, n]^2_<$, $P \neq \varnothing$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P-ізольованим.

Множину всіх пар (X, λ), де $X \in \mathcal{I}_n$ і λ — відображення із X в k^*, будемо позначати через $\mathcal{P}_n$; замість $\lambda((i, j))$ будемо писати $\lambda(i, j)$.

Ми зіставляємо парі $(X, \lambda) \in \mathcal{P}_n$ матрицю $M(X, \lambda) \in \mathbf{UT}_n(k)$ наступним чином:

$$M(X, \lambda) = E(n) + \sum_{(i,j) \in X} \lambda(i, j) I_{ij}(n).$$

Очевидно, що $(M(X, \lambda))^2 = E(n)$.

Модулярне унітрикутне зображення K циклічної групи другого порядку $G = \{a \mid a^2 = 1\}$, таке, що $K(a) = M(X, \lambda)$, будемо позначати через $K_{(X,\lambda)}$.

Наступна теорема повністю описує (з точністю до унітрикутної еквівалентності) модулярні унітрикутні зображення циклічної групи другого порядку.

Теорема 1. 1) *Будь-яке модулярне унітрикутне зображення циклічної групи другого порядку унітрикутно еквівалентне зображенню виду* $K_{(X,\lambda)}$.

2) *Зображення* $K_{(X,\lambda)}$ *і* $K_{(X',\lambda')}$ *не є унітрикутно еквівалентними, якщо* $(X, \lambda) \neq (X', \lambda')$.

Теорема 1 випливає із основного результату роботи [2], в якій автор описав повну систему представників класів спряжених елементів групи $\mathbf{UT}_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2 (просто цей результат потрібно переформулювати в термінах теорії зображень).

2. Означення унітрикутно диких груп. Перед тим, як перейти безпосередньо до основного поняття цього параграфу, сформулюємо важливе для нас твердження. Усі матриці розглядаємо над довільним полем. Одиничну матрицю (будь-якого розміру $m \times m$) будемо позначати через E.

Твердження 1. *Задача про приведення однієї (навіть унітрикутної) матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі задачу про приведення пари матриць за допомогою (однакових) унітрикутних подібних перетворень.*

Це твердження вперше доведено в роботі [1], присвяченій вивченню скінченних груп унітрикутних матриць (формально для скінченного поля, а по суті для довільного).

Укажемо ідею нашого доведення.

Розглянемо спочатку матриці вигляду

$$X_1(A) = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E & A & 0 \\ 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де A — довільна матриця (всі клітини однакового розміру).

Розглядаючи рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $X_1(A)$ і $X_1(B)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A і B (зрозуміло, що клітини матриць $X_1(A)$ і $X_1(B)$ можна вважати однакового розміру, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру). Розіб'ємо матрицю C на блоки у відповідності з розбиттям матриць $X_1(A)$ та $X_1(B)$:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \hline 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{array}\right),$$

де $C_{11}, \ldots, C_{66}$ — унітрикутні матриці; перемноживши блокові матриці, які стоять в лівій і правій частинах рівності та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{1}$$
$$C_{23} = 0, \tag{2}$$
$$C_{24} = C_{12} + C_{13}, \tag{3}$$
$$C_{25} = C_{12}B + C_{13}, \tag{4}$$
$$C_{26} = C_{15}, \tag{5}$$
$$C_{44} = C_{22} + C_{23}, \tag{6}$$
$$C_{45} + AC_{55} = C_{22}B + C_{23}, \tag{7}$$
$$C_{46} + AC_{56} = C_{25}, \tag{8}$$
$$C_{44} = C_{33}, \tag{9}$$
$$C_{45} + C_{55} = C_{33}, \tag{10}$$
$$C_{46} + C_{56} = C_{35}, \tag{11}$$
$$0 = C_{45}, \tag{12}$$
$$C_{66} = C_{55}. \tag{13}$$

Проаналізуємо цю систему. Із рівнянь (1), (2), (6), (9), (10), (12), (13) випливає, що $C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66}$, а із рівнянь (2), (7), (12) — що $AC_{55} = C_{22}B$; значить $AC_{22} = C_{22}B$ або $(C_{22})^{-1}AC_{22} = B$ (зауважимо, що матриця C_{22} унітрикутна). І тому якщо матриці $X_1(A)$ і $X_1(B)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $X_1(A)C = CX_1(B)$ для деякої (фіксованої) унітрикутної матриці C, то матриці A і B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A і B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $X_1(A)C = CX_1(B)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, і значить матриці $X_1(A)$ і $X_1(B)$ унітрикутно подібні.

Отже, задача про приведення унітрикутної матриці за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі аналогічну задачу для довільної матриці. Це твердження безпосередньо не зв'язане з твердженням 1, але воно легко узагальнюється на випадок пари матриць (який розглядається в твердженні 1). А саме, розглянемо тепер матриці вигляду

$$X_2(A_1, A_2) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc|c}
E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & A_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & A_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right),$$

де A_1, A_2 — довільні матриці (всі клітини однакового розміру).

Розглядаючи рівність $X_2(A_1, A_2)C = CX_2(B_1, B_2)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, легко впевнитися в тому, що $X_2(A_1, A_2)$ і $X_2(B_1, B_2)$

унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є пари (A_1, A_2) і (B_1, B_2). Це здійснюється таким же чином: як і у випадку матриць вигляду $X_1(A)$ (з технічної точки зору цей випадок більш громіздкий, але ніяких принципових труднощів немає).

Зауважимо, що задача про приведення однієї унітрикутної матриці над полем за допомогою унітрикутних подібних перетворень містить в собі аналогічну задачу не лише для пари матриць, а і для $m > 2$ матриць. Якщо врахувати сказане вище, відповідні матриці $X_m(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ легко побудувати. Ми вкажемо їх лише для $m = 3$:

$$X_3(A_1, A_2, A_3) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|cc|c}
E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & E & A_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & A_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & A_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right).$$

Усе вищесказане є мотивом для наступного означення.

Групу G назвемо унітрикутно дикою над полем k, якщо задача про опис (із точністю до унітрикутної еквівалентності) її унітрикутних зображень містить в собі задачу про опис квадратних матриць над k з точністю до унітрикутних подібних перетворень.

3. Теореми про унітрикутно дикі скінченні групи. Розглянемо спочатку випадок модулярних зображень p-груп.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Будь-яка скінченна p-група G порядку $n > 2$ є унітрикутно дикою над полем характеристики p.*

Нехай спочатку G — циклічна група порядку $n = p^s > 3$ (іншими словами, коли $p = 2$ і $n = 2^s$, де $s \geq 2$, або $p = 3$ і $n = 3^s$, де $s \geq 2$, або $p > 3$ і $n = p^s$, де $s \geq 1$); твірний елемент G позначимо через a.

Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця (над k), унітрикутне зображення групи G, таке, що $T_A(a) = X_1(A)$ (див. попередній параграф); той факт, що це зображення групи G, випливає із рівності $X_1(A)^n = [(X_1(A) - E) + E]^n = [(X_1(A) - E) + E]^{p^s} = (X_1(A) - E)^{p^s} + E^{p^s} = 0 + E = E$ ($(X_1(A) - E)^{p^s} = 0$, бо $(X_1(A) - E)^4 = 0$ і $p^s > 3$). Згідно викладеного в попередньому параграфі два зображення T_A і T_B групи G унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A і B унітрикутно подібні. А значить група G унітрикутно дика.

Нехай тепер G — циклічна група порядку 3: $G = \{a \mid a^3 = 1\}$ (тоді характеристика поля дорівнює 3). Позначимо через T_A, де A — довільна квадратна матриця (над k), унітрикутне зображення групи G наступного вигляду:

$$T_A(a) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & E & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & E & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array}\right),$$

де A — довільна матриця (всі клітини однакового розміру).

Розглядаючи рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$, де C — унітрикутна матриця з невизначеними коефіцієнтами, покажемо, що $T_A(a)$ і $T_A(b)$ унітрикутно подібні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A і B (клітини матриць $T_A(a)$ і $T_B(a)$ можна вважати однакового розміру, інакше вони не можуть бути подібними як матриці різного розміру). Розіб'ємо матрицю C на блоки C_{ij} у відповідності з розбиттям матриць $T_A(a)$ та $T_B(a)$ (див. попередній параграф). Перемноживши блокові матриці, які стоять в лівій і правій частинах рівності та прирівнявши відповідні матриці, отримаємо наступну систему лінійних матричних рівнянь відносно ненульових клітин матриці C (тотожні рівняння ми не вказуємо):

$$C_{22} = C_{11}, \tag{14}$$
$$C_{23} = 0, \tag{15}$$
$$C_{24} = 0, \tag{16}$$
$$C_{25} = C_{12} + C_{13} + C_{14}, \tag{17}$$
$$C_{26} = C_{13}B + C_{14}, \tag{18}$$
$$C_{27} = C_{14}, \tag{19}$$
$$C_{28} = C_{17}, \tag{20}$$
$$C_{55} = C_{22} + C_{23} + C_{24}, \tag{21}$$
$$C_{56} = C_{23}B + C_{24}, \tag{22}$$
$$C_{57} = C_{24}, \tag{23}$$
$$C_{58} = C_{27}, \tag{24}$$
$$C_{55} = C_{33} + C_{34}, \tag{25}$$
$$C_{56} + AC_{66} = C_{33}B + C_{34}, \tag{26}$$
$$C_{57} + AC_{67} = C_{34}, \tag{27}$$
$$C_{58} + AC_{68} = C_{37}, \tag{28}$$
$$C_{55} = C_{44}, \tag{29}$$
$$C_{56} + C_{66} = C_{44}, C_{57} + C_{67} + C_{77} = C_{44}, \tag{30}$$
$$C_{58} + C_{68} + C_{78} = C_{47}, \tag{31}$$
$$0 = C_{57}, \tag{32}$$
$$0 = C_{67}, \tag{33}$$
$$C_{88} = C_{77}. \tag{34}$$

Проаналізуємо цю систему. Із рівнянь (15), (16), (22) випливає, що $C_{56} = 0$, а із рівнянь (27), (33), (34) — що $C_{34} = 0$. Далі, із рівнянь (25), (29), (30) і $C_{34} = 0$, $C_{56} = 0$ випливає, що $C_{33} = C_{66}$. Нарешті, із (26), $C_{56} = 0$, $C_{34} = 0$ і $C_{33} = C_{66}$ випливає, що

$AC_{33} = C_{33}B$ (зауважимо, що матриця C_{33} унітрикутна). І тому якщо матриці $T_A(a)$ і $T_B(a)$ унітрикутно подібні, тобто має місце рівність $T_A(a)C = CT_B(a)$ для деякої (фіксованої) унітрикутної матриці C, то матриці A і B є унітрикутно подібними.

Навпаки, якщо матриці A і B є унітрикутно подібними, тобто $AX = XB$ для деякої унітрикутної матриці X, то $T_A(a)C = CT_B(a)$ для блоково-діагональної матриці C із діагональними блоками $C_{ii} = X$, і значить матриці $T_A(a)$ і $T_B(a)$ унітрикутно подібні.

Отже, ми довели, що зображення T_A і T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли унітрикутно подібними є матриці A і B. А значить група G унітрикутно дика.

Таким чином, теорема 2 має місце, якщо група G циклічна.

Нехай група G нециклічна. Оскільки в цьому випадку фактор-група по комутанту $H = G/G'$ не може бути циклічною групою, то H (а значить і G) має фактор-групу H_0, що є прямим добутком двох циклічних підгруп порядку p. Звідси випливає, що для $p > 2$ група G має циклічну фактор-групу порядку p, а значить (згідно доведеного вище) є унітрикутно дикою. Таким чином, щоб завершити доведення теореми, нам залишилося розглянути випадок, коли G — прямий добуток двох циклічних підгруп порядку 2: $G = \{a, b \,|\, a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba\}$. У цьому потрібно покласти

$$T_A(a) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad T_A(b) = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Легко побачити, що два такі зображення T_A і T_B унітрикутно еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці A і B унітрикутно подібні. Значить G унітрикутно дика.

Теорема 2 доведена.

Розглянемо тепер випадок довільних скінченних груп.

Для скінченної групи G і цілого числа $m \geq 0$ позначимо через $G(n)$ нормальний дільник G, породжений елементами, порядки яких взаємно прості з n (зокрема, $G(0) = G$). Очевидно, що коли число n просте, то фактор-група $G/G(n)$ є n-групою.

Твердження 2. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p \geq 0$. Тоді будь-яке унітрикутне зображення $T : G \to \mathbf{UT}_n(k)$ індукується зображенням фактор-групи $G/G(p)$ (тобто $T = \phi S$, де S — унітрикутне зображення $G/G(p)$ і $\phi : G \to G/G(p)$ — проекція G на $G/G(p)$).*

Твердження випливає із того, що якщо $A^m = E$ для унітарної матриці A і до того ж m взаємно просте з p, то $A = E$.

Безпосередньо із теореми 2 і твердження 2 (з урахуванням того факту, що $G/G(p)$ — p-група) випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група і k — поле характеристики $p > 0$. Тоді*
a) якщо $p \neq 2$ і $[G : G(p)] > 1$, то група G унітрикутно дика;
b) якщо $p = 2$ і $[G : G(p)] > 2$, то група G унітрикутно дика.

Якщо $G = G(p)$ (а це виконано, зокрема, коли p взаємно просте з порядком групи), то згідно твердження 2 унітрикутні зображення групи G вичерпуються одиничними зображеннями. У випадку, коли $p = 2$ і $[G : G(p)] = 2$ унітрикутні зображення G описує теорема 2 (з урахуванням твердження 2).

1. *Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Циткин А. И.* Классы сопряженных элементов унитреугольной группы // Кибернетика. – 1990. – №1. – С. 40–48, 133.
2. *Бондаренко В. В.* Про спряжені елементи порядку 2 в групі унітрикутних матриць над полем характеристики 2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 9–21.

Одержано 15.09.2006