М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ І РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

The use of the Non-classical Newtonian majorants and diagrams functions for the construction of numerical method of finding of the extremum non-differentiable and discontinuous functions has been considered.

Розглядається використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій для побудови чисельного методу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій.

Задача відшукання екстремуму негладких і розривних функцій є однією з важливих задач прикладної математики. Така задача виникає, наприклад, у теорії апроксимації, при розв'язуванні відповідних задач дослідження операцій, у застосуваннях теорії керування рухом динамічних систем та ін. [1, 2]. Зазначимо, що розриви можуть мати не тільки похідні від функцій, що досліджуються, а й самі функції можуть виявитися розривними. Пошук екстремуму розривних функцій є складною проблемою.

Розглянемо використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично або аналітично [3, 4], для побудови чисельного методу відшукання екстремуму (максимуму) негладких і розривних функцій однієї дійсної змінної.

Алгоритм методу побудуємо окремо для логарифмічно вгнутої і довільної функції $f(x)$, визначеної на деякому проміжку $[a,b]$. При цьому функція $f(x)$ може бути негладкою на заданому проміжку $[a,b]$ або на цьому проміжку мати скінченну кількість точок розриву першого роду. Крім того, вважатимемо, що $f(x)>0$ для всіх $x\in[a,b]$. Якщо ця умова не виконується, то можна шукати максимальне значення функції $f(x)+C$, де C — довільна стала, така, що $f(x)+C>0$ для всіх $x\in[a,b]$.

Алгоритм відшукання максимального значення функції $f(x)$ у випадку, коли $f(x)$ є логарифмічно вгнутою функцією на проміжку $[a,b]$. Виберемо на проміжку $[a,b]$ систему точок $x_0,x_1,\dots,x_n$, де $x_k=x_0+kh$ $(k=0,1,\dots,n)$, $x_0=a$, $h=(b-a)/n$, і знайдемо значення функції $y=f(x)$ в цих точках. Нехай $f(x_i)=a_i$, $i=0,1,\dots,n$.

Оскільки згідно припущення $f(x)$ — логарифмічно вгнута функція на проміжку $[a,b]$, то числові нахили діаграми Ньютона, побудованої за значеннями функції в точках x_k $(k=0,1,\dots,n)$, визначатимуться за формулою

$$R_k=\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{h}},\ k=1,2\dots,n,\ R_0=0.$$

У цьому випадку $R_0<R_1<R_2<\dots<R_n$.

Відхилення D_k діаграми Ньютона задовольнятимуть умову $D_k>1$, $k=1$, 2, 3, ..., $n-1$, $D_0=D_n=\infty$. Враховуючи властивість діаграми Ньютона у випадку логарифмічно вгнутої функції, алгоритм методу є таким. Визначаємо спочатку R_1. Якщо $R_1\geq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо x_0. Якщо $R_1<1$, то визначаємо R_n. При $R_n\leq 1$ за точку максимуму функції приймаємо x_n. Припустимо, що $R_1<1$, $R_n>1$. Тоді серед точок $x_0,x_1,\dots x_n$ вибираємо середню. Нехай такою точкою буде x_m. Визначаємо

$$R_m=\left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^{\frac{1}{h}},\ R_{m+1}=\left(\frac{a_m}{a_{m+1}}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Тоді можливі такі випадки:

1) $R_m \leq 1,\ R_{m+1} \geq 1\ (R_m \neq R_{m+1})$;

2) $R_m > 1$;

3) $R_{m+1} < 1$.

У першому випадку за точку максимуму функції приймаємо x_m; у другому шукаємо найменше значення індексу ν , для якого $R_{m-\nu} \leq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = p$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m-p}. У третьому випадку шукаємо найменше значення індексу ν , для якого $R_{m+\nu} \geq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = q$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m+q}.

Алгоритм відшукання максимального значення функції $f(x)$ у випадку, коли $f(x)$ є довільною функцією на заданому проміжку $[a, b]$. Виберемо на проміжку $[a, b]$ систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $x_0 = a$, $h = (b - a)/n$, і знайдемо значення функції $y = f(x)$ в цих точках. Нехай $f(x_i) = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Визначаємо послідовність вершинних індексів $\{i_0, i_1, \ldots i_k\}$ і послідовність числових нахилів $\{R_{i_0}, R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}\}$ діаграми Ньютона, побудованої за значеннями функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Розглянемо алгоритм визначення послідовності вершинних індексів. Припустимо, що за допомогою r кроків вже знайдені послідовні вершинні індекси $\{i_0, i_1, \ldots i_{r-1}\}$, де $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{r-1}$, і числові нахили $R_{i_0}, R_{i_1}, \ldots, R_{i_{r-1}}$, де

$$0 = R_{i_0} < R_{i_1} < \ldots < R_{i_{r-1}}.$$

Тоді на $(r + 1)$-му кроці знаходимо

$$R = \min_{i_{r-1} < i \leq n} \left(\frac{a_{i_{r-1}}}{a_i} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i_{r-1}}}} . \tag{1}$$

Визначаємо індекс i для якого в (1) досягається мінімум і позначаємо його через i_r. Якщо мінімум в (1) досягається для декількох індексів $i_{r1}, i_{r2}, \ldots, i_{rs_r}$, то через i_r позначаємо більший з них:

$$i_r = \max_{1 \leq j \leq s_r} i_{rj}.$$

Покладаємо $R_{i_r} = R$.

Оскільки $0 = R_0 = R_{i_0} < R_{i_1} < R_{i_2} \ldots < R_{i_k}$, то за точку максимуму функції $f(x)$ приймаємо одну з точок $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Для відшукання цієї точки використовуємо попередній алгоритм. Якщо $R_{i_1} \geq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо $x_{i_0} = x_0$. Якщо $R_{i_k} \leq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{i_k}. Припустимо, що $R_{i_1} < 1,\ R_{i_k} > 1$. Тоді вибираємо точку x_{i_m}, яка є середньою серед точок $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

Якщо $R_{i_m} \leq 1,\ R_{i_{m+1}} \geq 1$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{i_m}. Якщо $R_{i_m} > 1$, то шукаємо найменше значення індексу ν , для якого $R_{i_{m-\nu}} \leq 1$. Нехай таким значенням є $\nu = p$. Тоді за точку максимуму функції приймаємо $x_{i_{m-p}}$. Якщо $R_{i_{m+1}} < 1$, то шукаємо найменше значення індексу ν , для якого $R_{i_{m+\nu}} \geq 1$. Нехай таким значенням є $\nu = q$, то за точку максимуму функції приймаємо $x_{i_{m+q}}$.

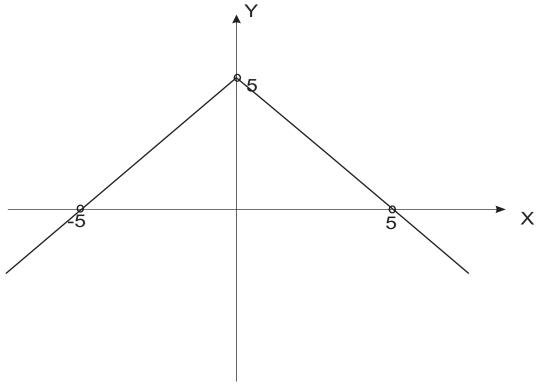
Відмітимо, якщо задана функція $f(x)$ в деяких околах дуже швидко зростає або спадає, то, щоб не помилитися з вибором точки, у якій функція досягає глобального максимуму, бажано алгоритм повторити декілька разів, причому кожного разу з меншим кроком.

Якщо треба уточнити точку, яку вибрано згідно з алгоритмом за точку максимуму функції, то той же алгоритм застосовуємо, вибравши за проміжок $[a, b]$ відповідний окіл знайденої точки. Також алгоритм можна застосувати у випадку, коли функція $f(x)$ в окремих точках розриву проміжку $[a, b]$ є невизначеною. В цьому випадку такі точки розриву не повинні потрапляти в систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Метод може бути узагальнений для відшукання екстремуму негладких і розривних функцій від двох і більше дійсних змінних.

Приклади.

1. Розглянемо функцію $f(x) = 5 - |x|$.



Мал. 1

Дана функція досягає максимуму в точці $x = 0$, але в цій точці похідна не існує, тобто скористатись класичним означенням екстремуму функції не можна. Але вона є неперервна і логарифмічно вгнута, для відшукання екстремуму цієї функції використаємо перший алгоритм.

Виберемо проміжок $[-4; 2]$, $n = 25$.

k	x_k	a_k	R_k
0	-4	1	0
1	$-3,76$	$1,24$	$0,41$
2	$-3,52$	$1,48$	$0,47$
3	$-3,28$	$1,72$	$0,53$
4	$-3,04$	$1,96$	$0,58$
5	$-2,8$	$2,2$	$0,62$
6	$-2,56$	$2,44$	$0,64$
7	$-2,32$	$2,68$	$0,67$

k	x_k	a_k	R_k
8	$-2,08$	$2,92$	$0,69$
9	$-1,84$	$3,16$	$0,72$
10	$-1,6$	$3,4$	$0,73$
11	$-1,36$	$3,64$	$0,75$
12	$-1,12$	$3,88$	$0,76$
13	$-0,88$	$4,12$	$0,77$
14	$-0,64$	$4,36$	$0,79$
15	$-0,4$	$4,6$	$0,79$
16	$-0,16$	$4,84$	$0,8$

k	x_k	a_k	R_k
17	$0,08$	$4,92$	$0,93$
18	$0,32$	$4,68$	$1,23$
19	$0,56$	$4,44$	$1,24$
20	$0,8$	$4,2$	$1,26$
21	$1,04$	$3,96$	$1,27$
22	$1,28$	$3,72$	$1,29$
23	$1,52$	$3,48$	$1,32$
24	$1,76$	$3,24$	$1,34$
25	2	3	$1,37$

Згідно алгоритму за точку максимуму функції приймаємо $x_{17} = 0,08$. Уточнимо дану точку звузивши проміжок $[a, b]$.

Виберемо проміжок $[-0,08; 0,32]$, $n = 25$.

k	x_k	a_k	R_k
0	$-0,08$	4,92	0
1	$-0,064$	4,936	0,816
2	$-0,048$	4,952	0,816
3	$-0,032$	4,968	0,817
4	$-0,016$	4,984	0,817
5	0	5	0,818
6	0,016	4,984	1,221
7	0,032	4,968	1,222

k	x_k	a_k	R_k
8	0,048	4,952	1,223
9	0,064	4,936	1,224
10	0,08	4,92	1,224
11	0,096	4,904	1,225
12	0,112	4,888	1,l226
13	0,128	4,872	1,227
14	0,144	4,856	1,228
15	0,16	4,84	1,229
16	0,176	4,824	1,229

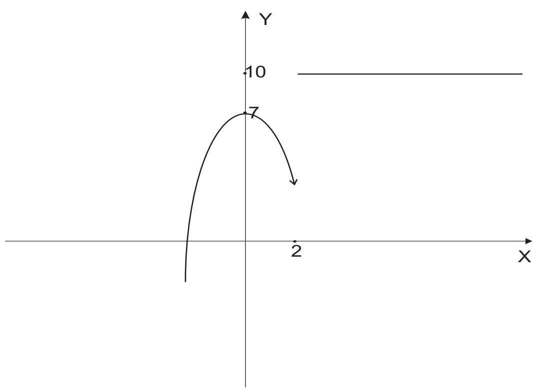
k	x_k	a_k	R_k
17	0,192	4,808	1,23
18	0,208	4,792	1,231
19	0,224	4,776	1,232
20	0,24	4,76	1,233
21	0,256	4,744	1,234
22	0,272	4,728	1,235
23	0,288	4,712	1,235
24	0,304	4,696	1,263
25	0,32	4,68	1,237

За точку максимуму функції приймаємо $x_5 = 0$.

2. Розглянемо розривну, не логарифмічно вгнуту функцію

$$y = \begin{cases} 7 - x^2, & x < 2, \\ 10, & x \geq 2 \end{cases}$$

на проміжку $[-1; 3]$, $n = 50$.



Мал. 2

Послідовность вершинних індексів складає множина $\{0, 5, 6, 38, 50\}$, і відповідні їм числові нахили $R_0 = 0$, $R_5 = 0,826$, $R_6 = 0,845$, $R_{38} = 0,856$, $R_{50} = 1$. Тоді точка максимуму є $x_{38} = 2,04$.

Уточнимо дану точку звузивши проміжок $[a, b]$.

Виберемо проміжок $[1,96; 2,12]$, $n = 50$. Множина вершинних індексів $\{0, 13, 50\}$ і числові нахили $R_0 = 0$, $R_{13} = 8,44 \cdot 10^{-13}$, $R_{50} = 1$.Тоді точка максимуму є $x_{13} = 2,0016$.

1. *Батухтин В. Д, Майборода Л. А.* Оптимизация разрывных функций. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
2. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 199 с.
3. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
4. *Цегелик Г. Г.* Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке //Докл. АН УССР. Сер.А. – 1987. - №6. – С. 18-19.

Одержано 17.09.2006