А. І. Железник, М. М. Маляр, І. А. Мич (Ужгородський нац. ун-т)

КОЛЕКТИВНИЙ ВИБІР З ВРАХУВАННЯМ НЕМАНІПУЛЬОВАНОСТІ

The task of collective nonmanipulated choice with the final number of alternatives is considered.

Розглядається задача колективного неманіпульованого вибору з скінченним числом альтернатив.

Вступ. В даний час спостерігається новий етап прояву інтересу до застосування сучасних математичних методів і моделей в економіці, бізнесі, сфері керування. Проблеми прийняття рішень в складних умовах займають на теперішній час особливе місце в інформаційних технологіях. Математичні методи стали широко застосовуватися для описання та аналізу складних економічних, соціальних та інших систем. Теорія прийняття рішень створила ряд методів, які допомогають при використанні ЕОМ ефективно приймати рішення при відомих і фіксованих параметрах, а також і в тому випадку, коли параметри — випадкові величини з відомими законами розподілу, або коли параметри обставин являються невизначеними (хоча, можуть бути і не випадковими) і коли вони в той же час сильно впливають на результати рішення.

Постановка задачі. Розглянемо задачу неманіпульованого колективного прийняття рішень (механізм колективного прийняття рішень являється неманіпульованим, якщо при всіх можливих варіантах кожен учасник передає центру повідомлення, яке є найкращим з некооперативної точки зору, незалежно від того які повідомлення передають інші учасники [1]). Нехай задана множина альтернатив, з якої потрібно вибрати найкращу альтернативу для множини осіб, що приймають рішення. Модель такої задачі складається з скінченного числа активних елементів (АЕ, агентів, осіб що приймають рішення (ОПР)). Множину АЕ позначимо $I = \{1, \ldots, k\}$. Задачею є вибір найкращої для множини АЕ альтернативи x з наперед визначеної множини можливих альтернатив. Множину альтернатив позначимо через X. Ця множина може бути скінченною, тобто допустимі альтернативи можна перерахувати $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, або неперервною, заданою умовами-обмеженнями. Позначимо K^i, $i = 1, 2, \ldots, m$ критерії ефективності, за допомогою яких проводиться оцінка кожної альтернативи з множини X.

Таким чином, задачу вибору для кожного агента можна сформулювати так: вибрати найкращу альтернативу з множини X, коли на цій множині задані критерії ефективності, за якими можна отримати оцінки $K^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, де m — кількість оцінок. Далі будемо розглядати задачі вибору, в яких множина допустимих альтернатив скінченна, а кращою оцінкою є найбільше значення. Тоді модель такої задачі може бути представлена таблицею:

	x^1	x^2	x^3	$\ldots$	x^n
K^1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	$\ldots$	O_{1n}
K^2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	$\ldots$	O_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
K^m	O_{m1}	O_{m2}	O_{m3}	$\ldots$	O_{mn}

або матрицею рішень:

$$O = (O_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

У випадку колективного прийняття рішень таких матриць буде стільки, скільки є АЕ (у кожного ОПР своя матриця).

Модель задачі вибору. В даній роботі представимо задачу вибору через нечіткі множини.

Нехай задана матриця рішень оцінок i-го АЕ позначається O^i, тобто кожна альтернатива $x \subset X$ виходячи із моделі задачі вибору представляє собою m-вимірний вектор $x^j = (O_{1j}, O_{2j}, \dots, O_{mj})$ $(j = 1,..,n)$ з простору R^m_{++}, компоненти якого є оцінки по відповідним критеріям.

Введемо в розгляд точку задоволення $T = (t_1, ..., t_m)$ (точка, компоненти якої є оцінки, що задовольняють ОПР) з простору R^m_{++} і спробуємо описати нечітку множину точок близьких до цієї точки. Нечітка множина описується множиною самих точок і функцією належності. Оберемо за множину точок альтернативи з множини X, а функцію належності множини точок близьких до точки задоволення T позначимо через $\mu_A(x)$. Тоді задачу вибору для кожної ОПР можна описати за допомогою нечіткої моделі: вибрати найкращу (ефективну) альтернативу з нечіткої множини:

$$A_m = \{x, \mu_A(x)\}, \quad \forall x \in X \subset R^m_{++},$$

де A_m — множина точок близьких до заданої точки T, $\mu_A(x)$ характеризує степінь належності елементів $x \in X$ точці $T \in R^m_{++}$. Кожна ОПР може задавати свою точку задоволення, тому точки задоволення різних ОПР можуть не співпадати і відповідно функції належності різних ОПР не обов'язково мають співпадати.

Тепер опишемо підхід побудови функції належності $\mu_A(x)$. Припустимо, що нам відома матриця рішень (1) і задана точка "задоволення" $T = (t_1, \dots, t_m)$. Визначимо матрицю Z, яка складається з множини величин $\{z_{ij}\}$, визначених наступним чином:

$$z_{ij} = 1 - |t_i - O_{ij}| / \max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Кожна така величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (1) до відповідного елемента точки "задоволення". Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою простору R^m_{++}, то визначена таким чином матриця Z характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернативи x^j до точки "задоволення" T по кожному конкретному критерію і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова функції належності як деякої згортки даних числових оцінок. У роботах [2]—[4] було запропоновано застосування наступної групи згорток при рівноважливих критеріях ефективності:

$$\mu^2_A(x^j) = \frac{m}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{z_{ij}}}, \quad \mu^3_A(x^j) = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} z_{ij}}, \quad \mu^4_A(x^j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} z_{ij}}{m}, \quad \mu^5_A(x^j) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (z_{ij})^2}{m}}, \quad (3)$$

де m — число додатніх елементів у j-му стовпці матриці Z, який відповідає j-й альтернативі.

В запропонованих згортках враховуються лише додатні елементи матриці Z. Кожний агент може вибрати одну з цих згорток, або задати свою. Далі застосовуємо вибрану згортку до матриці Z^p (матриця Z агента p) яка побудована за правилом (2) на основі матриці рішень агента O^p, p=1,. . . ,k. Таким чином, кожен агент задає свою точку задоволення і будує нечітку множину точок близьких до точки задоволення із відповідною функцією належності. Нижче буде показано, що агенту невигідно подавати неправдиві дані.

Алгоритм розв'язування. На основі значень функції належності побудуємо матрицю S розмірності $k*n$ наступного виду:

$$S = \begin{pmatrix} \mu_1(x^1) & \mu_1(x^2) & \dots & \mu_1(x^n) \\ \mu_2(x^1) & \mu_2(x^2) & \dots & \mu_2(x^n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_k(x^1) & \mu_k(x^2) & \dots & \mu_k(x^n) \end{pmatrix},$$

де i-й рядок є значення функції належності i-го агента, а j-й стовбець є значення функції належності j-ї альтернативи індивідуальній нечіткій множині кожного агента; i=1,...,k, j=1,. . . ,n.

Використовуючи елементи матриці S опишемо підхід для знаходження ефективного рішення для коаліції агентів. Ефективним рішенням будемо вважати те рішення, яке максимізує загальну корисність, тобто для нього виконується умова:

$$\sum_i S_{il} \geq \sum_i S_{ij}, \quad \forall j=1,\dots,n \,, \tag{4}$$

при чому на ключових агентів одразу накладаються штрафи, що дає можливість забезпечити неманіпульованість даного механізму (i-й агент являється ключовим, якщо ефективне рішення для агентів з $I\backslash\{i\}$ відрізняється від ефективного рішення для коаліції). Штрафи, що накладаються на ключових агентів, розраховуються за наступною формулою:

$$t_i = \sum_{q \neq i} \sum_{r=1}^{m} \frac{O^q_{rw} - O^q_{rl}}{m},$$

де x_l — ефективне рішення (рішення, що максимізує колективну корисність) вибране за правилом (4), x_w – деяке інше рішення, яке задовольняє умові: $\max\limits_{j \neq l} \sum\limits_i \mu_i(x^j)$ для $j = w$. Таким чином на ключових агентів накладається штраф в розмірі t_i. При t_i<0 ніякої компенсації агентам не передбачається. Виходячи із результатів описаних в [1] випливає, що запропонована система штрафів робить даний механізм вибору кращої альтернативи неманіпульованим, приводить до правдивого повідомлення переваг агентами, тобто до правдивого задання матриць рішень.

Платежі з агентів можна стягувати з урахуванням їх ваг. Ваги агентів визначаються згідно їх "важливості" для коаліції (ваги визначаються деяким незацікавленим, об'єктивним органом). Якщо γ_i — вага i-го агента, $i = 1,\dots,k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i = 1$, то на агента накладається платіж:

$$t_i = \sum_{q \neq i} \sum_{r=1}^{m} \frac{\gamma_q(O^q_{rw} - O^q_{rl})}{m}.$$

На основі вище приведених міркувань можна описати наступний алгоритм прийняття рішень для неманіпульованих механізмів в нечітких моделях багатокритеріального вибору:

Крок 1. Кожний агент формує свою матрицю оцінок O^i за правилом (1) (агент може залучати експертів для формування цієї матриці).

Крок 2. Кожний агент задає свою точку задоволення.

Крок 3. По даним з матриць O^i і точкам задоволення за правилом (2)

$$z_{ij} = 1 - |t_i - O_{ij}| / \max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$$

формуються матриці Z^i.

Крок 4. Для кожної з матриць Z^i може вибиратися одна із згорток (3), або деяка інша згортка.

Крок 5. По матрицях Z^i всіх агентів і по вибраних згортках формується матриця S.

Крок 6. За формулою

$$\sum_i S_{il} \geq \sum_i S_{ij}, \quad \forall j\text{=}1,\dots,n$$

знаходиться ефективне рішення, а для того щоб цей алгоритм був неманіпульованим з агентів стягуються платежі за формулою $t_i = \sum\limits_{q \neq i} \sum\limits_{r=1}^{m} \frac{O^q_{rw} - O^q_{rl}}{m}$ або $t_i = \sum\limits_{q \neq i} \sum\limits_{r=1}^{m} \frac{\gamma_q (O^q_{rw} - O^q_{rl})}{m}$, де $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i = 1$.

1. *Лавреш И., Тихомиров М.* Применение кооперативных решений при формировании целевой программы регионального уровня // Журнал по теории и практике управления, становлению системы местного самоуправления, вопросам истории местных органов власти. – Вып. № 2. — 2001.
2. *Маляр М. М.* Опис задач вибору на мові розмитих множин // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. № 4. – С. 197–201.
3. *Маляр М. М., Швалагін О. Ю.* Побудова функції належності для задач вибору // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 65–69.
4. *Волошин А.Ф., Маляр Н.Н.* Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора // Proceedings of XI International Conference "Knowledge – Dialogue - Solution". – Sofia, 2005. – Vol. 1. – P. 247–250.

Одержано 15.09.2006