І. А. Мич (Ужгородський нац. ун-т)

БАЗИСИ ПРОСТОРУ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

Let $K_{\tilde{\alpha}}$ be the matrix of generalized conjunctive transformation which is generated by a boolean vector $\tilde{\alpha}$. The paper deals with the problem of the construction of transition operator matrix of a bases of the signal space V_{2^n}, which are generated by the sets of columns of matrix $K_{\tilde{\alpha}}$ and $K_{\tilde{\beta}}$ respectively.

Нехай $K_{\tilde{\alpha}}$ — це матриця узагальненого кон'юктивного перетворення, породженого бульовим вектором $\tilde{\alpha}$. В роботі розглядається задача побудови матриці оператора переходу від базису простору сигналів V_{2^n}, який задається множиною стовпців матриці $K_{\tilde{\alpha}}$, до іншого базису цього простору, який задається множиною стовпців матриці $K_{\tilde{\beta}}$ відповідної бульовому вектору $\tilde{\beta}$.

Значна частина алгоритмів цифрової обробки сигналів базуються на розкладі дискретних сигналів у скінченновимірному просторі, який в цьому випадку є векторним [1, 2]. Знаходження спектру сигналів скінченновимірного простору сигналів зводиться до знаходження добутку деякої матриці, побудованої на основі бази простору, на сигнал. Оскільки спектри сигналів у різних базах мають, як правило, різні спектральні властивості, що ефективно використовується при розробці різних алгоритмів цифрової обробки сигналів [2], то актуальною є задача побудови нових базисів скінченновимірних просторів сигналів та операторів переходу від одного базису до іншого.

Нехай $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1})^T$ — деяка, необов'язково бульова, функція визначена на множині $\mathbb{Z}_2^n$, тобто f_δ — це значення функції f на векторі $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, номером якого є число $\delta \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Позначимо через V_{2^n} множину функцій, визначених на множині $\mathbb{Z}_2^n$, де $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — поле з двох елементів, зі значеннями в множині дійсних чисел, тобто V_{2^n} — це скінченновимірний простір дискретних сигналів над полем дійсних чисел.

Введемо в розгляд матриці

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

і нехай

$$K_{\tilde{\alpha}} = K_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} = K_{\alpha_1} \times K_{\alpha_2} \times \cdots \times K_{\alpha_n},$$

де $\times$ — символ операції кронекерівського добутку матриць, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Множина стовпців матриці $K_{\tilde{\alpha}}$ задає базис простору сигналів [4, 5].

Розглянемо задачу знаходження матриці $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ оператора переходу від бази простору сигналів (функцій) V_{2^n}, яка задається множиною стовпців матриці $K_{\tilde{\alpha}}$ до бази цього простору, яка задається множиною стовпців матриці $K_{\tilde{\beta}}$.

Теорема 1. *Якщо $K_{\tilde{\alpha}}$ та $K_{\tilde{\beta}}$ — матриці узагальнених кон'юнктивних перетворень відповідно з мітками $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ та $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, матриця $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ задовольняє умову*

$$K_{\tilde{\beta}} = M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}},$$

то

$$M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_{p_1} \times M_{p_2} \times \cdots \times M_{p_n}, \tag{1}$$

де вектор $\tilde{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$ *визначається з умови* $p_i = \alpha_i - \beta_i$, *а*

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Теорему доведемо методом математичної індукції по n.

Для $k = 1$ маємо

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто можливі чотири випадки:

1) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $p_1 = 0$;
2) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $p_1 = -1$;
3) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $p_1 = 1$;
4) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $p_1 = 0$.

У випадку 1) маємо:

$$M_0 \cdot K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K_0,$$

тобто $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_0$.

Розглянемо випадок 2):

$$M_{-1} \cdot K_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K_0,$$

тобто $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_{-1}$.

У випадку 3):

$$M_1 \cdot K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = K_1,$$

тобто $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_1$.

І, нарешті, у випадку 4 одержимо:

$$M_0 \cdot K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = K_1,$$

тобто $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_0$.

Отже для $n = 1 \quad M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M_p$.

Нехай тепер рівність (1) має місце для $k = n$, тобто для довільних векторів $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ справедлива рівність $K_{\tilde{\beta}} = M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}}$ і $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ визначається з рівності (1).

Покажемо, що рівність (1) має місце і для $k = n + 1$.

Розглянемо вектори $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$, $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}) \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$, де $\gamma_1 = \gamma$, $\delta_1 = \delta$, $\gamma_{i+1} = \alpha_i$, $\delta_{i+1} = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тобто $K_{\tilde{\gamma}} = K_\gamma \times K_{\tilde{\alpha}}$, $K_{\tilde{\delta}} = K_\delta \times K_{\tilde{\beta}}$.

Тоді знову можливі чотири випадки:

1) $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $p_i = 0$;
2) $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $p_i = -1$;
3) $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $p_i = 1$;
4) $\gamma = 1$, $\delta = 1$, $p_i = 0$.

У випадку 1 маємо:

$$K_{\tilde{\gamma}} = K_0 \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix},$$

$$K_{\tilde{\delta}} = K_0 \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \\ 0 & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix},$$

$$\text{а } M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} = M_0 \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \cdot K_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \\ 0 & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = K_{\tilde{\delta}}.$$

Аналогічно у випадку 2 одержимо, що

$$K_{\tilde{\gamma}} = K_0 \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix},$$

$$K_{\tilde{\delta}} = K_1 \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & 0 \\ K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix},$$

$$M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} = M_{-1} \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & -M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \cdot K_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & -M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & 0 \\ K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = K_{\tilde{\delta}}.$$

У випадку 3:

$$K_{\tilde{\gamma}} = K_1 \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix},$$

$$K_{\tilde{\delta}} = K_0 \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \\ 0 & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix},$$

$$M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} = M_1 \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ -M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Тоді $M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \cdot K_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ -M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \\ 0 & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = K_{\tilde{\delta}}.$$

І у випадку 4:

$$K_{\tilde{\gamma}} = K_1 \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix},$$

$$K_{\tilde{\delta}} = K_1 \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & 0 \\ K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix},$$

$$M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} = M_0 \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} {}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Тоді $M_{\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \cdot K_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} & 0 \\ 0 & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ K_{\tilde{\alpha}} & K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} & M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \cdot K_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} K_{\tilde{\beta}} & 0 \\ K_{\tilde{\beta}} & K_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times K_{\tilde{\beta}} = K_{\tilde{\delta}}.$$

Теорема доведена.

З урахуванням визначення поля $\mathbb{Z}_2$ отримаємо очевидний наслідок.

Наслідок 1. *Над полем* $\mathbb{Z}_2$ *справедлива рівність*

$$M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = M'_{p_1} \times M'_{p_2} \times \cdots \times M'_{p_n}, \tag{2}$$

де $p_i = \alpha_i - \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *а*

$$M'_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо також, що визначені в рівностях (1) та (2) матриці $M_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ можна факторизувати над відповідним полем.

1. *Айзенберг Н.Н., Трофимлюк О.Т.* Сдвиг, свертка и корреляционная функция дискретных сигналов в произвольном базисе // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 250. – №1. – С. 47-51.
2. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов.радио, 1973. – 367 с.
3. *Мич І.А., Трофимлюк О.Т.* Застосування узагальнених кон'юнктивних перетворень в теорії бульових функцій // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – №337. – 1998. – С. 47-49.
4. *Трофимлюк О.Т., Мич І.А.* Узагальнені кон'юнктивні перетворення скінченомірного простору дискретних сигналів // Тези доп. Міжнар. наук.-практ. конф. "Інформатизація діяльності підприємств малого та середнього бізнесу: механізм, порблеми, розвиток спец. випуск журналу Науковий вісник УжДУ. Сер. екон. – 2000. – №5. – С. 109–112.

Одержано 15.09.2006